УДК 586.4:621.791.85:620.18

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ТЕМПЕРАТУРНЫЙ РЕЖИМ ПОЛУПРОВОДНИКА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ИМПУЛЬСНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

В. И. МАЖУКИН, Д. И. ЧЕРЕДНИЧЕНКО

(Таганрог)

Решена нелинейная задача теплопроводности для полупроводниковой пластины, нагреваемой импульсным тепловым источником. На основании анализа полученных результатов определяются температура и время нагрева, при которых возможна линеаризация тепловых задач.

Физическая постановка задачи. Технологические методы, основанные на термическом воздействии лазера или электронного луча на полупроводниковые материалы, требуют тщательного анализа температурных режимов обработки. Качественный и количественный анализ подобных тепловых процессов, проводившийся на базе математических моделей в линейной постановке, достаточно полно выполнен в работах [1–3]. Более близкую к реальной картину дают расчеты, выполненные с учетом нелинейности теплофизических характеристик материала. Однако аналитические методы решения нелинейных задач еще недостаточно развиты. Поэтому наиболее эффективными методами решения квазилинейных дифференциальных уравнений являются численные методы.

В настоящей работе предлагается метод численного решения нелинейной тепловой задачи для полупроводниковой пластины конечных размеров. Проводится количественный анализ температурных полей с целью обоснования возможности линеаризации тепловых процессов при различных граничных условиях и различных режимах обработки, определяется также допускаемая при этом погрешность.

При математической формулировке задачи считаем, что поперечные размеры луча значительно больше толщины пластины. В этом случае задача значительно упрощается и может быть сведена к одномерной модели.

Математическая постановка задачи. Дано квазилинейное дифференциальное уравнение теплопроводности

$$C_v(T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right] \tag{1}$$

Отыскивается решение $T(x, t)$ в области $0\leqslant x\leqslant L$, $0\leqslant t\leqslant t_c$, удовлетворяющее краевому условию

$$\lambda(T)\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=I_0,\quad T(L,t)=T_0,\quad T(x,0)=T_0 \tag{2}$$

Здесь $\lambda(T)$ — коэффициент теплопроводности; $C_v(T)$ — объемная теплоемкость полупроводника.

Экспериментальные зависимости теплофизических характеристик $\lambda(T)$, $C_v(T)$ от температуры для полупроводников приведены в [4] и с погрешностью, не превышающей 2%, могут быть аппроксимированы следующими выражениями:

$$\lambda(T)=\lambda_0\left[\left(\frac{b}{PT+a}\right)\varepsilon+k\right] \tag{3}$$

$$C_v(T)=C_0(1+RT) \tag{4}$$

где для германия $b=12$, $\varepsilon=2.95$, $d=2$, $k=3$, $P=10^{-2}$ [*град*$^{-1}$], $\lambda_0=10^{-2}$ [*кал*$\cdot$*см*$^{-1}\cdot$*сек*$^{-1}\cdot$*град*$^{-1}$], $C_0=0.365$ [*кал*$\cdot$*см*$^{-3}\cdot$*град*$^{-1}$], $R=1.826\cdot10^{-4}$ [*град*$^{-1}$].

Численный метод решения задачи. Учитывая импульсный характер лучевой обработки материалов, характеризующийся быстрыми переходными процессами, за основу решения задачи (1)—(2) был взят конечно-разностный метод прямых, позволяющий исходное квазилинейное дифференциальное уравнение заменить системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которая затем интегрируется с переменным шагом. Вариация шага интегрирования дает возможность получать решения с одинаковой ошибкой для теплового импульса любой продолжительности.

Перед аппроксимацией краевой задачи (1)—(2) конечно-разностной использовалась постановка Гудмэна [5]

$$F(x,t)=\int_0^T C_v(T)\,dT$$

Дискретизация уравнения (1) по переменной X осуществлялась методом баланса [6]. Частная производная $\partial F/\partial t$ заменялась производной dF/dt на каждой i-й прямой. В результате получили систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dF_i}{d\tau}=n^2(G_{i-1}-2G_i+G_{i+1}) \tag{5}$$

где

$$G_i=\int_{F_0}^{F_i}\frac{\lambda[T(F)]}{G_v[T(F)]}dF=\int_{F_0}^{F_i}\left[\frac{b}{a(\sqrt{1+2rF}-1)+d}\right]^{\varepsilon}\frac{dF}{\sqrt{1+2rF}}=$$

$$=\frac{b^{\varepsilon}}{p(\varepsilon-1)}\left[\frac{1}{(m+a\sqrt{1+2rF_0})^{\varepsilon-1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(m+a\sqrt{1+2rF_i})^{\varepsilon-1}}\right]+\frac{k}{r}(\sqrt{1+2rF_i}-\sqrt{1+2rF_0})$$

$$F_i=\frac{T_i}{T_0}+\frac{r}{2}\left(\frac{T_i}{T_0}\right)^2,\quad r=RT_0,\quad p=PT_0,\quad a=\frac{p}{r},\quad m=d-a$$

$$z=x/L,\ \tau=\lambda\cdot t/C_v\cdot L^2,\ g_0=I_0L/\lambda T_0,\ n=10,\ g_0=0.05$$

Правая часть системы (5) представляет собой трехточечные разностные соотношения, записанные по неявной схеме и аппроксимирующие краевую задачу (1)—(2) с точностью $O(h^2)$. Полученная система (5) содержит $(n-1)$ уравнений и $(n+1)$ неизвестных. Значения двух недостающих неизвестных определяются из граничных условий. В итоге вместо краевой задачи (1)—(2) получили систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями $F_i(z,\ 0)=F_0$, т. е. задачу Коши.

Численное решение этой задачи осуществлялось методом Рунге—Кутта с автоматическим выбором шага, дающим порядок точности $O(l^5)$,

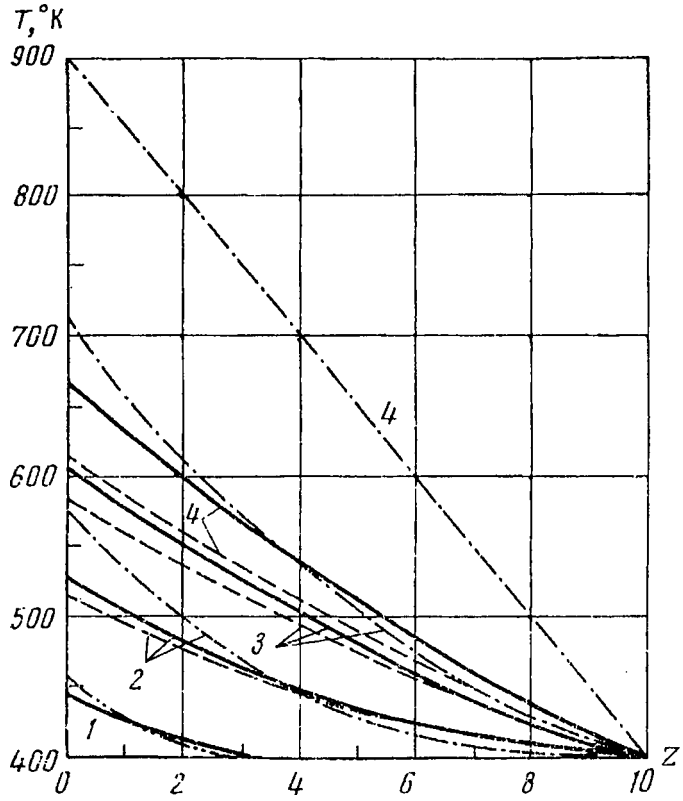

Рис. 1. К задаче (1)—(2). Сплошные кривые — нелинейная модель; штриховые — линейная при $T=400°$ К, штрихпунктирные — при $T=1000$—1200° К:

1 — $\tau=0.1$, 2 — 1.0, 3 — 3.0, 4 — 17.0

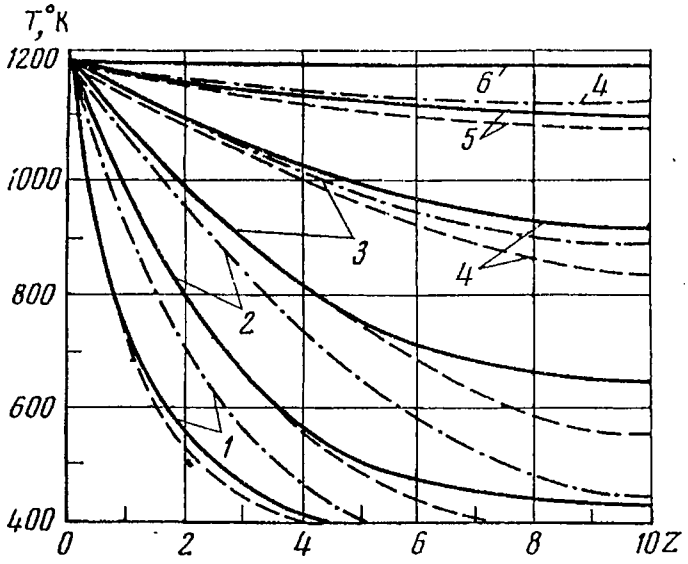

Рис. 2. К задаче (1)—(6). Сплошные кривые — нелинейная модель; штриховые — линейная при $T_s=1200°$ К; штрихпунктирные при $T_s=400°$ К:

1 — $\tau=0.1$, 2 — 0.5, 3 — 2.0, 4 — 5.0, 5 — 10.0, 6 — 20.0

где l — шаг разностной сетки по переменной τ. Вычислительная схема для задачи (1)—(2) выполнена на языке Алгол-60 и реализована на ЭВМ М-222.

Из-за отсутствия универсальных критериев устойчивости разностных схем для нелинейных параболических уравнений правомочность использованного метода проверялась сравнением полученных численных решений с решениями линейной модели. Для численного анализа линейной модели были использованы аналитические решения, приведенные в [7].

В работах [5, 8] указывается, что выбор определяющей температуры при линеаризации тепловых задач без учета граничных условий приводит к существенным погрешностям. Поэтому для сравнения была решена тепловая задача при следующих краевых условиях:

$$T(0,t)=T_c,$$

$$\lambda(T)\frac{\partial T(L,t)}{\partial x}=0,$$

$$T(x,0)=T_0 \qquad (6)$$

где

$T_c=1209°$ К, $T_0=400°$ К

Обсуждение результатов. В линейных моделях для обеих краевых задач температурные поля были рассчитаны для значений $\lambda(T)$ и $C_v(T)$, взятых при различных температурах с интервалом 100°. На рис. 1, 2 приведены кривые, характеризующие области наибольшего и наименьшего совпадений решений линейной и нелинейной моделей. Сравнение кривых показало, что для граничного условия (2) наибольшее совпадение температурных полей отмечается для значений $\lambda(T)$ и $C_v(T)$, взятых при $T_s=400°$ К (рис. 1, сплошные и пунктирные линии). Для граничного условия (6) наибольшее совпадение наблюдается в высокотемпературной области изме-

нения $\lambda(T)$ и $C_v(T)$, T_s=1200° К (рис. 2, сплошные и пунктирные линии). При малых временах теплового воздействия $\tau \leqslant 1$ ошибка линеаризации невелика, расхождение не превышает 1—2%. При увеличении длин времени нагрева до наступления стационарного состояния влияние нелинейности сказывается сильнее и расхождение достигает 9—12%.

Наибольшее несовпадение кривых распределения температуры для граничного условия (2) наблюдается для значений $\lambda(T)$ и $C_v(T)$ при T_s=1000—1200° К, для (6) — если значения $\lambda(T)$ и $C_v(T)$ выбраны при T_s=400° К (сплошные и штрихпунктирные линии). Максимальная величина ошибки реализации достигает 26—28%.

Выводы. 1. Выбор определяющей температуры T_s, при которой задаются значения теплофизических характеристик полупроводниковых материалов в линейной постановке задачи, необходимо производить с учетом граничных условий.

2. Линеаризация тепловых задач для полупроводников с приемлемой для технических расчетов точностью возможна в областях наибольшего совпадения температурных полей только в начале тепловых импульсов ($\tau \leqslant 1$).

Поступила 29 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Макаров Н. Н., Рыкалин Н. Н., Углов А. А. О выборе схемы расчета температурного поля пластин при сварке световым потоком лазера. Физ. и хим. обраб. материалов, 1967, № 3.
2. Рыкалин Н. Н., Углов А. А. Расчет процессов нагрева при сварке металлов лучом лазера. Сварочное произ-во, 1967, № 6, 1.
3. Добровольский И. П., Углов А. А. О нагреве твердых тел излучением лазера с учетом температурной зависимости поглощательной способности. Квантовая электроника, 1974, № 6.
4. Glassbrennert C., Slak G. Thermal Conductivity of Silicon and Germanium from 3° K to the Meeting Point. J. Phys. Rev., 1964, 134, 4A, 1058.
5. Коздоба Л. А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. «Наука», 1975.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. «Наука», 1972.
7. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. «Наука», 1964.
8. Коздоба Л. А. Качественный анализ линеаризации квазилинейных задач нестационарной теплопроводности. Теплофизика и теплотехника, 1972, № 21.