

УДК 519.6:517.958

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ЛАЗЕРНОМ ПРОБОЕ ПЛОТНОГО ГАЗА

**В. И. МАЖУКИН, А. А. УГЛОВ, Б. Н. ЧЕТВЕРУШКИН**

(Москва)

Построена математическая модель пробоя плотного холодного газа лазерным излучением вблизи металлической поверхности. Разработана методика численного решения уравнений кинетики и энергии с учетом процессов переноса, по которой выполнены расчеты на ЭВМ.

1. В серии опытов [1-3] исследовались условия пробоя инертных газов и азота излучением неодимового лазера и особенности взаимодействия лазерного излучения с твердым веществом при малых плотностях потока и высоких давлениях окружающей среды. Опыты показали, что пробой вблизи металлических поверхностей происходил без заметных механических повреждений, т. е. в отсутствие процессов развитого испарения вещества мишени, а облучаемые поверхности под влиянием плотной плазмы изменяли свои физические свойства (например, микротвердость стали в азотной среде в зоне облучения увеличивалась в 2-3 раза).

Однако чрезвычайно высокая скорость протекающих процессов, жесткая конструкция камеры, которая должна выдерживать давления в сотни атмосфер, а также то обстоятельство, что образующаяся плазма непрозрачна, затрудняют получение исчерпывающей информации экспериментальным путем. Наиболее труднодоступны экспериментальные данные о начальной стадии образования плазмы — пробое холодного газа. В то же время эта стадия вызывает повышенный интерес, так как не понятен до конца механизм пробоя холодного газа столь низкими потоками излучения. В связи с этим становятся актуальными методы численного моделирования указанных процессов. В свою очередь, численное моделирование сталкивается с рядом трудностей, основной из которых является то обстоятельство, что в задаче о лазерном пробое газов требуется проследживать целый ряд физико-химических процессов с существенно различающимися (на несколько порядков) характерными временами, т. е. требуется на фоне медленных процессов, таких, как диффузия заряженных частиц в плотном газе, выделять быстротекающие процессы, например возбуждение и ступенчатую ионизацию частиц. Численная реализация задачи осложняется еще и тем, что решение имеет экспоненциально нарастающий характер, в связи с чем первостепенное значение приобретают вопросы аппроксимации и устойчивости.

В настоящей работе рассматривается методика численного решения системы уравнений, описывающая явление пробоя плотного атомарного газа излучением.

Необходимо заметить, что данная методика легко обобщается и на случай молекулярных газов, при решении задач для которых сталкиваются с теми же математическими трудностями [4]. Однако молекулярные газы характеризуются большим числом химических реакций и, соответственно, описываются большим числом уравнений. Поэтому отработку методики целесообразнее проводить по более простой модели для атомарных газов.

2. Система уравнений, описывающая кинетику столкновений в атомарных газах, обмен энергией при этом и процессы переноса, записывается следующим образом:

$$(1) \quad \frac{\partial N}{\partial t} = -(k^+N - \beta^+N^+N_e)N_e - (k^-N - \beta^-N^*)N_e,$$

$$(2) \quad \frac{\partial N^*}{\partial t} = (k^+N - \beta^-N^*)N_e - (k^{*+}N^* - \beta^+N^+N_e)N_e,$$

$$(3) \quad \frac{\partial N_e}{\partial t} = (k^+N - \beta^+N^+N_e)N_e - (k^{*+}N^* - \beta^+N^+N_e)N_e + \frac{\partial}{\partial x} D_a \frac{\partial N_e}{\partial x},$$

$$(4) \quad \frac{3}{2} \frac{\partial (N_e T_e)}{\partial t} = \left[ \frac{4\pi e^2 G}{m c \omega^2} - \frac{3}{2} \Lambda (T_e - T_g) \right] (v_{en} + v_{ei}) N_e - \\ - I^-(k^-N - \beta^-N^*)N_e - I^+(k^+N - \beta^+N^+N_e)N_e - \\ - I^{*+}(k^{*+}N^* - \beta^+N^+N_e)N_e + \frac{\partial}{\partial x} \kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial x},$$

$$(5) \quad \frac{\partial (N_g T_g)}{\partial t} = \Lambda (T_e - T_g) (v_{en} + v_{ei}) N_e.$$

С целью некоторого упрощения задачи предполагаем, что пробой развивается в условиях квазинейтральности, т. е.  $N_e \sim N_i$ , где  $N_e$ ,  $N_i$  — концентрация электронов и ионов, а также пренебрегаем диффузией и теплопроводностью нейтральной компоненты и потерями на излучение.

Уравнение (1) представляет собой уравнение баланса для заселенности основного уровня, (2) — уравнение баланса для первого возбужденного уровня, (3) — уравнение баланса для плотности электронов, (4) — уравнение баланса энергии для электронов, (5) — уравнение баланса энергии для тяжелых частиц.

Система уравнений (1) — (5) дополняется граничными условиями в точках  $x=0$  и  $x=L$ ;  $x=0$  — точка на поверхности пластины. Расстояние от правой границы выбрано произвольно:  $\sim 100$  мкм. На левой границе  $x=0$  определяются температура поверхности и термоэлектронный поток. Температура поверхности мишени определяется из решения задачи теплопроводности для полубесконечного тела, на которое воздействует источник постоянной интенсивности  $G_n$ . Для оценки термоэлектронного тока с единицы поверхности использована формула Ричардсона [5]. На правой границе  $x=L$  граничные условия удобно задавать в виде соотношений, свя-

зывающих односторонние потоки электронов и тепла с функциями плотности и температуры:

$$\begin{aligned}
 &x=0, \\
 &T_e(0, t) = T_g(0, t) = 2G_n(at/\pi)^{1/2}/\lambda, \\
 (6) \quad &D_e(0, t) \frac{\partial N_e(0, t)}{\partial x} = BT_e^2(0, t) \exp\left[-\frac{\Phi}{T_e(0, t)}\right]; \\
 &x=L, \\
 &D_a(L, t) \frac{\partial N(L, t)}{\partial x} = -\frac{1}{2}v_e N_e(L, t), \\
 &\kappa_e(L, t) \frac{\partial T_e(L, t)}{\partial x} = -\frac{1}{2}v_e N_e(L, t) T_e(L, t).
 \end{aligned}$$

Принятые обозначения:  $T_e$ ,  $T_g$  — температура электронов и тяжелых частиц,  $t$  — время,  $x$  — пространственная координата,  $h$  — шаг по  $x$ ,  $\tau$  — шаг по  $t$ ,  $c$  — скорость света,  $e$  — заряд электрона,  $\omega$  — частота лазерного излучения,  $\kappa_v$  — коэффициент тормозного поглощения,  $\nu_{ei}$ ,  $\nu_{en}$  — частоты упругих столкновений электронов с ионами и атомами,  $D_e$ ,  $D_i$ ,  $D_a$  — коэффициенты электронной, ионной и амбиполярной диффузий,  $I^*$ ,  $I^+$ ,  $I^{++}$  — энергия возбуждения и ионизации атомов из основного и возбужденного состояний,  $k^*$ ,  $k^+$ ,  $k^{++}$  — коэффициенты скоростей возбуждения и ионизации,  $\beta^*$ ,  $\beta^+$ ,  $\beta^{++}$  — коэффициенты скоростей девозбуждения и рекомбинации (причем полагается, что  $\beta^{++} = \beta^+$ ),  $v_g$ ,  $v_e$  — средние тепловые скорости атомов и электронов,  $\sigma$  — сечение упругих столкновений электронов с атомами,  $A$  — атомный вес,  $\kappa_e$  — коэффициент электронной теплопроводности,  $m$ ,  $M$  — массы электрона и атома,  $\sigma_{ei}$  — сечение упругих столкновений ионов с атомами,  $\kappa_v$  — коэффициент поглощения лазерного излучения,  $G_0$  — плотность потока излучения лазера,  $G_n$  — поток излучения, поглощенный мишенью,  $G$  — суммарный поток излучения с учетом отражения от мишени,  $B$  — постоянная термоэмиссии,  $\Phi$  — работа выхода,  $\lambda$ ,  $a$  — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности мишени.

Использовались следующие выражения и численные значения:

$$D_e = v_e / \sigma N, \quad D_i = v_i / \sigma N, \quad D_a = D_i (1 + T_e / T_g),$$

$$v_e = 6.7 \cdot 10^7 T_e^{1/2}, \quad v_a = 1.56 \cdot 10^6 (T_g / A)^{1/2},$$

$$G_n = R G_0 \exp\left(-\int \kappa_v dx\right), \quad G = (2 - R) G_0 \exp\left(-\int \kappa_v dx\right),$$

$$\kappa_v = \frac{16\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{e^6 Z^2 k T_e}{h^4 c v^3} \exp\left(-\frac{I^+ - h\nu}{k T_e}\right), \quad \Lambda = \frac{2m}{M}, \quad R = 0.2,$$

$$\kappa_e = \frac{5}{2} \frac{v_e N_e}{\sigma N}, \quad \hbar\omega = 1.17 \text{ эВ}, \quad I^+ = 14.58 \text{ эВ},$$

$$I^* = 10.3 \text{ эВ}, \quad I^{++} = I^+ - I^*, \quad \Phi = 4.1 \text{ эВ}, \quad a = 0.54 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1},$$

$$B = 60.2 \text{ А} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{град}^{-2}, \quad \lambda = 1.4 \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}.$$

3. Системы уравнений, описывающие ступенчатую ионизацию, рекомбинацию и обмен энергией между частицами, обычно относят к жестким системам, у которых собственные значения матрицы Якоби имеют отрицательные вещественные части и большой разброс по абсолютной величине. Для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо зарекомендовала себя методика Гира [6-8].

С целью применения методики Гира для решения системы (1) — (5) уравнения в частных производных с помощью метода прямых преобразовывались к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в правой части которых стоят разностные соотношения (число получающихся уравнений равно  $M \times K$ , где  $M$  — число уравнений в исходной системе,  $K$  — число внутренних узлов сетки):

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dt_i} &= [-(k^+N - \beta^+N^+N_e)N_e - (k^*N - \beta^*N^*)N_e]_i, \\
 \frac{dN^*}{dt_i} &= [(k^*N - \beta^*N^*)N_e - (k^{**}N^* - \beta^{**}N^{**}N_e)N_e]_i, \\
 \frac{dN_e}{dt_i} &= [(k^+N - \beta^+N^+N_e)N_e + (k^{**}N^* - \beta^{**}N^{**}N_e)N_e]_i + \\
 &+ \frac{1}{\hbar_i} \left[ \frac{D_{a,i+1} + D_{ai}}{2} \frac{N_{e,i+1} - N_{ei}}{h_{i+1}} - \frac{D_{ai} + D_{a,i-1}}{2} \frac{N_{ei} - N_{e,i-1}}{h_i} \right], \\
 \frac{3}{2} \frac{d(N_e T_e)}{dt_i} &= \left\{ \left[ \frac{4\pi e^2 G}{m\omega^2} - \frac{3}{2} \Lambda(T_e - T_g) \right] (\nu_{en} + \nu_{ei}) N_e - I^+ (k^+N - \beta^+N^+N_e) N_e - I^* (k^*N - \beta^*N^*) N_e - I^{**} (k^{**}N^* - \beta^{**}N^{**}N_e) N_e \right\} + \\
 &+ \frac{1}{\hbar_i} \left[ \frac{\chi_{e,i+1} + \chi_{ei}}{2} \frac{T_{e,i+1} - T_{ei}}{h_{i+1}} - \frac{\chi_{ei} + \chi_{e,i-1}}{2} \frac{T_{ei} - T_{e,i-1}}{h_i} \right], \\
 \frac{d(N_g T_g)}{dt_i} &= [\Lambda(T_e - T_g) (\nu_{en} + \nu_{ei}) N_e]_i, \\
 \hbar_i &= \frac{h_{i-1} + h_i}{2}, \quad 1 \leq i \leq K.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Однако применение методики Гира к (7) желаемых результатов не принесло. Интегрирование производилось только с малым шагом и первым порядком точности. При увеличении шага  $\tau$  или порядка метода решение становилось неустойчивым. Физическая причина этого заключается в следующем. Явление пробоя плотного газа характеризуется тем, что незначительное возмущение концентрации электронов на некотором участке приводит к ее экспоненциальному росту со временем, т. е. скорость ионизирующего нарастания возмущения превышает скорость его диффузионного расплывания. Экспоненциальное нарастание решения системы (1) — (5), как показало численное решение задачи на отыскание собственных значений для упрощенной линеаризованной системы (1) — (5), характери-

зуются собственными значениями  $\text{Re } \lambda_i > 0$ . Таким образом, система (1) — (5) не является жесткой в указанном выше смысле. Кроме того, зависимость коэффициентов  $\kappa_e$ ,  $D_e$  от температуры и плотности частиц приводит к тому, что диффузионные члены становятся главным источником погрешности при решении системы (7). Методы типа предиктор-корректор, используемые в методике Гира, при продвижении по  $t$  на один шаг, т. е. при переходе со слоя  $j$  на слой  $j+1$ , используют значения функций со слоя  $j$  и ниже. Известно [9], что если значения  $\kappa_e$  и  $D_e$  берутся со слоя  $j$ , то решение квазилинейных уравнений диффузии и теплопроводности имеет невысокую точность. Наличие тесной связи между уравнениями кинетики и энергии приводит к тому, что погрешность, допущенная при вычислении  $\partial N_e / \partial t$ , переносится непосредственно в уравнение (4), где  $N_e$  стоит под знаком производной  $\partial / \partial t$ . В условиях экспоненциально растущего решения это приводит к неустойчивости.

Более эффективным для решения системы (1) — (5) оказался метод суммарной аппроксимации [9], суть которого заключается в том, что процесс отыскания приближенного решения сложной задачи разбивается на несколько этапов, на каждом из которых решается более простая задача. С этой целью краевая задача (1) — (6) была представлена в виде двух последовательно решаемых задач: для процессов кинетики и обмена энергией за счет столкновений — задача

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N}{\partial t} &= -(k^+ N - \beta^+ N^+ N_e) N_e - (k^- N - \beta^- N^-) N_e, \\
 \frac{\partial N^*}{\partial t} &= (k^+ N - \beta^- N^-) N_e - (k^{*+} N^* - \beta^+ N^+ N_e) N_e, \\
 \frac{\partial N_e}{\partial t} &= (k^+ N - \beta^+ N^+ N_e) N_e + (k^{*+} N^* - \beta^+ N^+ N_e) N_e,
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{3\partial(N_e T_e)}{2\partial t} &= \left[ \frac{4\pi e^2 G}{m c \omega^2} - \frac{3}{2} \Lambda(T_e - T_g) \right] (v_{ei} + v_{en}) N_e - I^+ (k^+ N - \beta^+ N^+ N_e) N_e - \\
 &\quad - I^- (k^- N - \beta^- N^-) N_e - I^{*+} (k^{*+} N^* - \beta^+ N^+ N_e) N_e, \\
 \frac{\partial(N_g T_g)}{\partial t} &= \Lambda(T_e - T_g) (v_{ei} + v_{en}) N_e
 \end{aligned}$$

и для процессов переноса — задача

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} D_e \frac{\partial N_e}{\partial x}, \quad \frac{\partial(N_e T_e)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial x}.
 \tag{9}$$

С помощью метода прямых система (8) преобразуется в разностную:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dt_i} &= [-(k^+ N - \beta^+ N^+ N_e) N_e - (k^- N - \beta^- N^-) N_e]_i, \\
 \frac{dN^*}{dt_i} &= [(k^+ N - \beta^- N^-) N_e - (k^{*+} N^* - \beta^+ N^+ N_e) N_e]_i,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \frac{dN_e}{dt_i} &= [(k^+N - \beta^+N^+N_e)N_e + (k^+N^* - \beta^+N^+N_e)N_e]_i, \\
 \frac{3}{2} \frac{d(N_e T_e)}{dt_i} &= \left\{ \left[ \frac{4\pi e^2 G}{m c \omega^2} - \frac{3}{2} \Lambda(T_e - T_g) \right] (v_{en} + v_{ei})N_e - I^+(k^+N - \right. \\
 &\quad \left. - \beta^+N^+N_e)N_e - I^-(k^+N - \beta^+N^*)N_e - I^+(k^+N^* - \beta^+N^+N_e)N_e \right\}_i, \\
 \frac{d(N_g T_g)}{dt_i} &= [\Lambda(T_e - T_g)(v_{en} + v_{ei})N_e]_i.
 \end{aligned}$$

Для уравнений (9) записывается разностная консервативная схема [10], представляющая собой систему двух разностных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \frac{N_{ei}^{j+1} - N_{ei}^j}{\tau} &= \frac{1}{h_i} \left[ \frac{D_{a,i+1}^{j+1} + D_{ai}^{j+1}}{2} \frac{N_{e,i+1}^{j+1} - N_{ei}^{j+1}}{h_{i+1}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{D_{ai}^{j+1} + D_{a,i-1}^{j+1}}{2} \frac{N_{ei}^{j+1} - N_{e,i-1}^{j+1}}{h_i} \right], \\
 \frac{(N_e T_e)_i^{j+1} - (N_e T_e)_i^j}{\tau} &= \frac{2}{3} \frac{1}{h_i} \left[ \frac{\kappa_{e,i+1}^{j+1} + \kappa_{ei}^{j+1}}{2} \frac{T_{e,i+1}^{j+1} - T_{ei}^{j+1}}{h_{i+1}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\kappa_{ei}^{j+1} + \kappa_{e,i-1}^{j+1}}{2} \frac{T_{ei}^{j+1} - T_{e,i-1}^{j+1}}{h_i} \right].
 \end{aligned}$$

Общая разностная схема представляет собой цепочку из одной явной (10) и одной неявной (11) разностных схем. Переход со слоя  $j$  на слой  $j+1$  осуществляется через вспомогательный слой  $j+1/2$ . Сначала решается задача (11), а затем с полученными результатами в качестве начальных данных решается система (10).

Для решения (10) использовался метод Нордсика, предусмотренный в алгоритме Гира [11, 12]. Решение трехточечной разностной задачи (11) осуществлялось методом раздельных прогонок с итерациями [13].

Применение метода суммарной аппроксимации позволяет обе системы уравнений, (10) и (11), считать более точно по сравнению с (7). Повышение точности решения нелинейной системы (9) достигается за счет итерационных процедур, применяемых при решении. Выделение процессов переноса в отдельную задачу позволяет систему уравнений кинетики считать с более высоким порядком точности  $p \leq 4$ .

4. В качестве модельного примера и для отработки методики численного решения задачи (1)–(6) были выполнены расчеты для атомарного азота, для коэффициентов скоростей возбуждения и ионизации которого имеются приближенные аналитические выражения в  $\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$  (см. [14, 15])

$$k^+(T_e) = 1.6 \cdot 10^{-9} \frac{(I^*(I^* + T_e))^{1/2}}{(I^* + 0.13T_e)} \exp\left(-\frac{I^*}{T_e}\right),$$

$$k^+(T_e) = 3.1 \cdot 10^{-7} \left( \frac{1}{I^+ + T_e} \right)^{1/2} \frac{T_e}{I^+ + 0.21 T_e} \exp\left(-\frac{I^+}{T_e}\right),$$

$$k^*(T_e) = 1.24 \cdot 10^{-6} T_e^{-1/2} \exp(-I^+/T_e).$$

Скорость рекомбинации  $\beta^+$  оценивалась в  $\text{см}^6 \cdot \text{с}^{-1}$  по формуле Пятаевского [16]

$$\beta^+(T_e) = \frac{4\sqrt{2} \pi^{3/2} e^{10} Z^2 \Lambda}{9m^{1/2} (kT_e)^{3/2}}, \quad Z=1, \quad \Lambda=10.$$

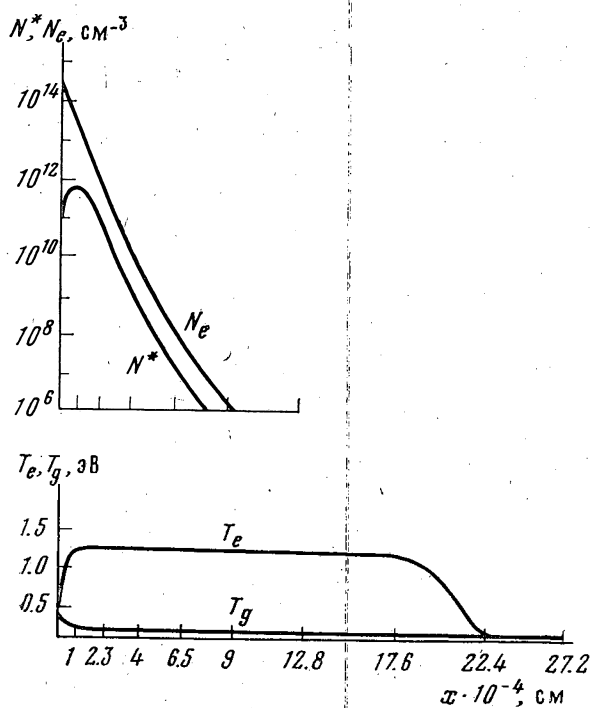
Коэффициент скорости девозбуждения атома определялся согласно принципу детального равновесия (в  $\text{см}^3 \cdot \text{с}$ ):

$$\beta^*(T_e) = \frac{k^*(T_e)}{S(T_e)};$$

константа равновесия определялась формулой Саха:

$$S(T_e) = 2 \frac{g^+}{g} \left( \frac{2\pi m T_e}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{I^+}{T_e}\right).$$

В качестве  $\sigma(\epsilon)$  использовались экспериментальные значения [17].

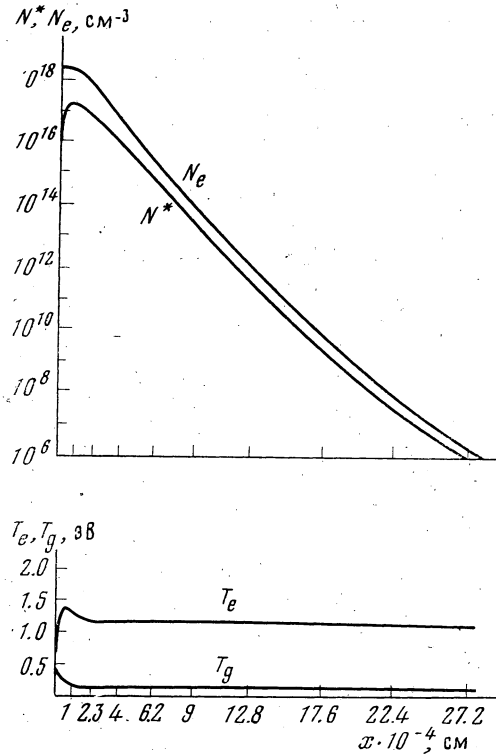


Фиг. 1

В расчетах использовалась неравномерная сетка по пространственной координате  $x$  с числом узлов  $K=20$  при длине интервала  $L=80$  мкм. Величина первого шага  $h_1=0.1$  мкм. Последующие шаги задавались в виде геометрической прогрессии со знаменателем 1.3. С целью определения точ-

ности численных расчетов производилось сгущение сетки по  $t$  в два раза. Различие в решении появлялось в четвертом знаке после запятой.

На фиг. 1–3 показаны пространственные профили плотностей  $N$ ,  $N^*$ ,  $N_e$  и температур  $T_e$ ,  $T_g$ , рассчитанные при начальном давлении 100 атм, что соответствует  $N=2.7 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3}$ , и при плотности потока излучения  $G_0=4 \cdot 10^8 \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-2}$ . Из фиг. 1–3 видно, что на расстоянии свыше 10 мкм

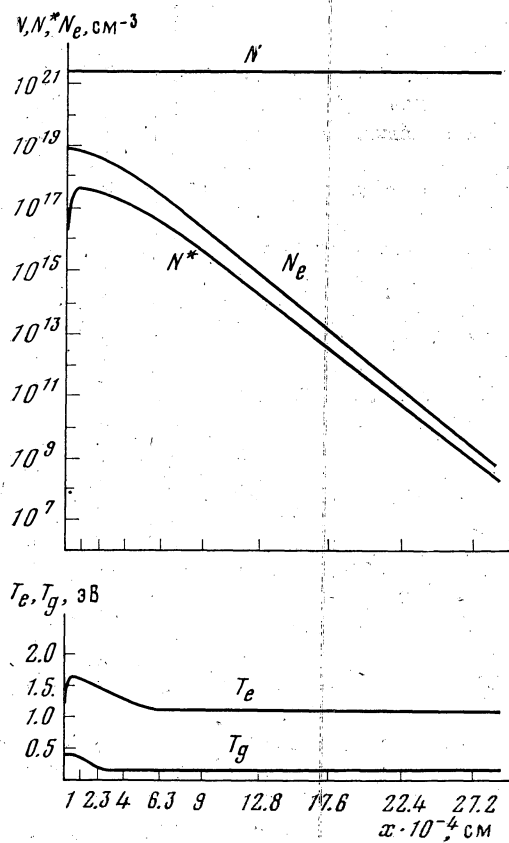


Фиг. 2

электронов мало, так как высокое давление газа препятствует диффузии электронов и основные процессы пробоя развиваются на расстоянии нескольких микрон от мишени. Электронная температура при  $x \geq 0.4$  мкм очень быстро (за  $2 \cdot 10^{-10}$  с) устанавливается равной 1.21 эВ. Газ в это время полностью холодный (фиг. 1,  $t=6.3 \cdot 10^{-10}$  с). Затем под влиянием термоэмиссии и ионизации плотность электронов в точке  $x=0.4$  мкм возрастает до  $10^{18} \text{ см}^{-3}$ . При такой плотности заряженных частиц частота кулоновских столкновений становится преобладающей,  $v_{ei} > v_{en}$  и  $T_e$  резко возрастает, что вызывает лавинную ионизацию и дальнейшее усиление неравенства  $v_{ei} > v_{en}$  (фиг. 2,  $t=3.65 \cdot 10^{-9}$  с). К моменту времени  $5.6 \cdot 10^{-9}$  с температура  $T_e$  в точке  $x=0.4$  мкм достигает своей максимальной величины  $T_{e \text{ max}}=1.64$  эВ, при этом  $N_e \approx 2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$  (фиг. 3,  $t=5.6 \cdot 10^{-9}$  с). В дальнейшем значение  $T_e$  в этой точке несколько понижается из-за уменьшения потока лазерного излучения  $G_0$  вследствие роста поглощения в соседней области справа, где также начинается лавинная ионизация. Благодаря вы-



сокой плотности электронов температура газа быстро повышается за счет упругих столкновений до 0.35 эВ. На этом начальную стадию пробоя холодного газа можно считать законченной, поскольку в пространстве сформировалась локальная область интенсивного поглощения лазерного излучения. Дальнейшие расчеты не проводились, так как математическая мо-



Фиг. 3

дель (1)–(6) не учитывает газодинамического движения нагретого газа, что может привести к неадекватному отображению действительной картины протекающих процессов.

Необходимо отметить, что принятые в постановке задачи предположения несколько упрощают реальную физическую картину вследствие молекулярности азота, а также из-за нарушения условия квазинейтральности, вызываемого термоэмиссией электронов. Численное моделирование процесса лазерного пробоя в молекулярном газе является предметом дальнейших исследований.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность А. А. Самарскому и Н. Н. Рыкалину, а также В. Я. Гольдину и Н. Н. Калиткину за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию 19.01.1979

## Цитированная литература

1. Н. Н. Рыкалин, А. А. Углов, М. М. Низаметдинов. О пробое газа излучением лазера при малых плотностях потока и высоких давлениях. Докл. АН СССР, 1974, 218, № 2, 330–331.
2. Н. Н. Рыкалин, А. А. Углов, М. М. Низаметдинов. Особенности взаимодействия излучения лазера с материалами при высоком давлении окружающей среды. Ж. эксперим. и теор. физ., 1975, 69, № 2, 722–731.
3. Н. Н. Рыкалин и др. Воздействие излучения ОКГ на металлы при высоких давлениях окружающей среды. Квантовая электроника, 1974, 1, № 9, 1928–1933.
4. В. И. Мажукин. Численное моделирование пробоя плотного молекулярного газа лазерным излучением вблизи металлической поверхности. Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 30.
5. С. И. Анисимов и др. Действие излучения большой мощности на металлы. М., «Наука», 1970.
6. C. W. Gear. The numerical integration of ordinary differential equations. Math. Comput., 1967, 21, 146–156.
7. A. Nordsteck. On numerical integration of ordinary differential equations. Math. Comput., 1962, 16, 22–49.
8. A. Nordsteck. Automatic numerical integration of ordinary differential equations. AMS Proc. Sympos. Appl. Math., 1963, 15, 241–250.
9. А. А. Самарский. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
10. А. А. Самарский. Теория разностных схем. М., «Наука», 1977.
11. C. W. Gear. DIFSUB for solution of ordinary differential equations. Commun. Assoc. Comput. Machinery, 1971, 14, 185–190.
12. С. М. Гольберг, А. Ю. Захаров, С. С. Филиппов. О некоторых численных методах решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Препринт ИПМ АН СССР, 1976, № 12.
13. А. А. Самарский, Е. С. Николаев. Методы решения сеточных уравнений. М., «Наука», 1978.
14. Л. А. Вайнштейн, И. И. Собельман, Е. А. Юков. Сечения возбуждения атомов и ионов электронами. М., «Наука», 1973.
15. Я. Б. Зельдович, Ю. Н. Райзер. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
16. А. В. Абрамов. Релаксационные процессы в частично ионизованном газе. В сб. «Очерки физ. и хим. низкотемпературной плазмы». М., «Наука», 1971, 113–169.
17. A. G. Engelhardt, A. V. Phillips, C. G. Risk. Determination of momentum transfer and inelastic collision cross sections for electrons in nitrogen using transport coefficients. Phys. Rev., 1964, 135, 1566–1574.