

УДК 517.958:533.7

**РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ
ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА**

**ВОЛЧИНСКАЯ М. И., МАЖУКИН В. И., ЧЕТВЕРУШКИН Б. Н.,
ЧУРБАНОВА Н. Г.**

(Москва)

Рассматривается алгоритм численного решения двумерной нестационарной задачи радиационной газовой динамики на ортогональных сетках. В качестве примера рассматривается расчет задачи о взаимодействии лазерного излучения с азотной плазмой.

§ 1. Введение

Учет излучения в задачах газовой динамики сильно усложняет алгоритм их решения. В первую очередь это относится к двумерным нестационарным задачам, в которых излучение учитывается в достаточно полной постановке. Методы численного решения этих задач стали развиваться сравнительно недавно [1]—[5].

В [2] был рассмотрен алгоритм решения двумерной задачи динамики излучающего газа. Для описания газодинамического течения использовались лагранжевы переменные. Выбор разностной сетки в лагранжевых координатах позволяет естественно учесть форму течения. Поэтому переменные Лагранжа удобны для решения многих задач, в частности для расчета течения композиций нескольких зон разных веществ. Однако применение лагранжевых координат в двумерных задачах связано с использованием неортогональных сеток, что значительно усложняет разностную схему, делает ее громоздкой. Громоздкость схемы при аналогичном алгоритме расчета ведет к увеличению объема вычислений. Кроме того, повышаются требования к объему оперативной памяти ЭВМ.

Поэтому представляет значительный интерес возможность расчета задач радиационной газовой динамики (РГД) с использованием ортогональных сеток в переменных Эйлера, что делает расчет более экономичным.

Ниже будет рассмотрен алгоритм решения задачи РГД, использующий эйлеровы переменные. Для решения уравнений движения применяется метод FLIC (см. [6], [7]), поле излучения определяется с помощью алгоритма, близкого к описанному в [2]. При этом в значительной мере используется подход к решению задач динамики излучающего газа, рассмотренный в [2].

Перенос излучения рассматривается в многогрупповом диффузионном приближении. Система уравнений для осесимметричного случая выглядит следующим образом:

$$(1) \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} - \rho \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial(P+\omega)}{\partial r},$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial(P+\omega)}{\partial z},$$

$$(2) \quad \rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -P \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial(rW_r)}{\partial r} - \frac{\partial W_z}{\partial z} + Q,$$

$$(3) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(rW_r^h)}{\partial r} + \frac{\partial W_z^h}{\partial z} + \kappa_h U^h = \kappa_h U^{hp},$$

$$\frac{l_h}{3} \frac{\partial U^h}{\partial r} = -W_r^h, \quad \frac{l_h}{3} \frac{\partial U^h}{\partial z} = -W_z^h,$$

$$(4) \quad W = \sum_{h=1}^{N_h} W^h.$$

Здесь r — расстояние от оси симметрии, z — расстояние вдоль оси симметрии, t — время, u и v — компоненты скорости по r и z соответственно, ε — внутренняя энергия, ω — искусственная вязкость, ρ — плотность, P — давление, W — вектор потока энергии излучения, κ_ν — коэффициент поглощения фотонов частоты ν , Q — вклад в уравнение энергии различных источников тепла.

§ 2. Алгоритм численного решения

Алгоритм численного решения системы уравнений (1)–(4) состоит из отдельных блоков:

- 1) решение уравнений газовой динамики,
- 2) решение разностных эллиптических уравнений,
- 3) осреднение уравнений диффузии по энергиям фотонов,
- 4) совместное решение уравнения энергии и диффузии излучения.

Рассмотрим подробно методы, применяемые в каждом из них.

1. В качестве основы для решения уравнений газовой динамики использовался метод FLIC (см. [6]). Этот метод характеризуется лагранжево-эйлеровым подходом к решению уравнений. На первом этапе — лагранжевом — плотность вещества в ячейке считается неизменной и производится подсчет промежуточных значений скорости и энергии за счет работы сил давления:

$$\tilde{u}_{in}^j = u_{in}^{j-1} - \frac{\tau^{j-1}}{\rho_{in}^{j-1}(r_{i+1} - r_i)} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{r_{i+1}}{r_{i+1/2}} (P_{i+1,n}^{j-1} - P_{in}^{j-1}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{r_i}{r_{i+1/2}} (P_{in}^{j-1} - P_{i-1,n}^{j-1}) \right] + \omega_{i+1,n}^{j-1} - \omega_{in}^{j-1} \right\},$$

$$\tilde{v}_{in}^j = v_{in}^{j-1} - \frac{\tau^{j-1}}{\rho_{in}^{j-1}(z_{n+1} - z_n)} \left(\frac{P_{i,n+1}^{j-1} - P_{i,n-1}^{j-1}}{2} + \omega_{i,n+1}^{j-1} - \omega_{in}^{j-1} \right),$$

$$\tilde{\varepsilon}_{in}^j = \varepsilon_{in}^{j-1} - \frac{\tau^{j-1}}{\rho_{in}^{j-1}} \left\{ \frac{1}{2(z_{n+1} - z_n)} [P_{in}^{j-1} (\bar{v}_{i,n+1} - \bar{v}_{i,n-1}) + \right. \\ \left. + \omega_{i,n+1}^* (\bar{v}_{i,n+1} - \bar{v}_{in}) + \omega_{in}^* (\bar{v}_{in} - \bar{v}_{i,n-1}) \right] + \\ \left. + \frac{1}{2(r_{i+1} - r_i)} \left[P_{in}^{j-1} \left(\frac{r_{i+1}}{r_{i+1/2}} (\bar{u}_{i+1,n} + \bar{u}_{in}) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{r_i}{r_{i+1/2}} (\bar{u}_{in} + \bar{u}_{i-1,n}) \right) + \omega_{i+1,n} \left(\frac{r_{i+1/2}}{r_{i+1/2}} \bar{u}_{i+1,n} - \bar{u}_{in} \right) + \right. \\ \left. \left. + \omega_{in} \left(\bar{u}_{in} - \frac{r_{i-1/2}}{r_{i+1/2}} \bar{u}_{i-1,n} \right) \right] \right\},$$

где j — номер временного слоя, τ — шаг по времени, \tilde{u} , \tilde{v} и $\tilde{\varepsilon}$ — промежуточные значения скоростей и внутренней энергии, $r_{i+1/2} = 0.5(r_i + r_{i+1})$, $z_{n+1/2} = 0.5(z_n + z_{n+1})$, $\bar{u}_{in} = 0.5(u_{in}^{j-1} + \tilde{u}_{in})$, $\bar{v}_{in} = 0.5(v_{in}^{j-1} + \tilde{v}_{in})$. Искусственная вязкость ω определяется следующим образом:

$$\omega_{in}^{j-1} = BC_{in}^{j-1} \frac{(\rho_{i-1,n}^{j-1} + \rho_{in}^{j-1})}{2} (u_{i-1,n}^{j-1} - u_{in}^{j-1}),$$

если одновременно $k[(u_{i-1,n} + u_{in})^2/4 + (v_{i-1,n} + v_{in})^2/4] < C_{in}^2$ и $u_{i-1,n} > u_{in}$, иначе $\omega_{in} = 0$. Здесь C_{in} — скорость звука. Значение констант B и k определяется опытным путем, причем $0 \leq k \leq 2B$.

Аналогичным образом вычисляется и ω^* .

На втором — эйлеровом — этапе давление не учитывается, а рассматриваются потоки вещества, импульса и энергии за счет вычисленных скоростей. Сначала энергия пересчитывается в полную:

$$E_{in} = \tilde{\varepsilon}_{in} + (\tilde{u}_{in}^2 + \tilde{v}_{in}^2)/2.$$

Поток вещества в r -направлении таков:

$$\Delta M_{in} = \tau^{j-1} \frac{(\tilde{u}_{i-1,n} + \tilde{u}_{in})}{2} \times \begin{cases} \rho_{i-1,n}^{j-1}, & \tilde{u}_{i-1,n} + \tilde{u}_{in} > 0, \\ \rho_{in}^{j-1}, & \tilde{u}_{i-1,n} + \tilde{u}_{in} \leq 0. \end{cases}$$

Аналогично вычисляются потоки импульса и энергии, а также потоки в z -направлении. После этого производится пересчет газодинамических параметров:

$$\rho_{in}^j = \rho_{in}^{j-1} - \frac{1}{(z_{n+1} - z_n)} (\Delta M_{i,n+1}^* - \Delta M_{in}^*) - \frac{2}{(r_{i+1} - r_i)(r_{i+1} + r_i)} (r_{i+1} \Delta M_{i+1,n} - r_i \Delta M_{in}).$$

Так же пересчитываются u , v и E . Новые значения внутренней энергии $\varepsilon_{in}^j = E_{in} - 0.5(u_{in}^2 + v_{in}^2)$.

На этом этапе вычислений необходимы ограничения на шаг по времени на случай резкого убывания или возрастания плотности в ячейке, а также обычное ограничение на шаг по Куранту.

Более подробное описание формул имеется в [8].

2. Поле излучения описывается двумя уравнениями диффузии:

$$\operatorname{div} W_k + \kappa_k U^k = F_k, \quad W_k = -\frac{l_k}{3} \operatorname{grad} U^k.$$

Эти уравнения можно свести к одному эллиптическому уравнению

$$(5) \quad -\operatorname{div} \frac{l_k}{3} \operatorname{grad} U^k + \kappa_k U^k = F_k.$$

В отличие от лагранжевых, в эйлеровых переменных это уравнение аппроксимируется на пятиточечном шаблоне, в результате чего получается разностное уравнение

$$(6) \quad B_{in}^k U_{i,n-1}^k + K_{in}^k U_{i-1,n}^k - C_{in}^k U_{in}^k + E_{in}^k U_{i+1,n}^k + Z_{in}^k U_{i,n+1}^k + F_{in}^k = 0.$$

Конкретный вид коэффициентов этого уравнения определяется обычным образом [9], например $B_{in}^k = 2\{3(z_{n+1} - z_n)[\kappa_{in}^k(z_{n+1} - z_n) + \kappa_{i,n-1}^k(z_n - z_{n-1})]\}^{-1}$. Эти коэффициенты гораздо менее громоздки, чем используе-

мые при разностной аппроксимации уравнения (5) в лагранжевой системе координат [2].

Для решения эллиптических уравнений используется нелинейный итерационный $(\alpha-\beta)$ -алгоритм [10], который применительно к уравнению (6) имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_{N-1,n}^{(s+1/2)} &= \gamma_n, & \gamma_{i-1,n}^{(s+1/2)} &= K_{in} (C_{in} - \bar{\alpha}_{in}^{(s)} B_{in} - \bar{\gamma}_{in}^{(s+1/2)} Z_{in} - \\ & & & - \gamma_{in}^{(s+1/2)} E_{in})^{-1}, \\ \alpha_{in}^{(s+1/2)} &= 1, & \alpha_{i+1,n}^{(s+1/2)} &= E_{in} (C_{in} - \bar{\alpha}_{in}^{(s)} B_{in} - \bar{\gamma}_{in}^{(s+1/2)} Z_{in} - \\ & & & - \alpha_{in}^{(s+1/2)} K_{in})^{-1}, \\ \gamma_{i,N-1}^{(s+1/2)} &= 1, & \bar{\gamma}_{i,n-1}^{(s+1/2)} &= B_{in} (C_{in} - \alpha_{in}^{(s+1/2)} K_{in} - \\ & & & - \gamma_{in}^{(s+1/2)} E_{in} - \bar{\gamma}_{in}^{(s+1/2)} Z_{in})^{-1}, \\ \gamma_{N-1,n}^{(s+1)} &= \gamma_n, & \gamma_{i-1,n}^{(s+1)} &= K_{in} (C_{in} - \bar{\alpha}_{in}^{(s+1)} B_{in} - \\ & & & - \bar{\gamma}_{in}^{(s+1/2)} Z_{in} - \gamma_{in}^{(s+1)} E_{in})^{-1}, \\ \alpha_{in}^{(s+1)} &= 1, & \alpha_{i+1,n}^{(s+1)} &= E_{in} (C_{in} - \bar{\alpha}_{in}^{(s+1)} B_{in} - \\ & & & - \bar{\gamma}_{in}^{(s+1/2)} Z_{in} - \alpha_{in}^{(s+1)} K_{in})^{-1}, \\ \bar{\alpha}_{ii}^{(s+1)} &= 1, & \bar{\alpha}_{i,n+1}^{(s+1)} &= Z_{in} (C_{in} - \alpha_{in}^{(s+1)} K_{in} - \\ & & & - \gamma_{in}^{(s+1)} E_{in} - \bar{\alpha}_{in}^{(s+1)} B_{in})^{-1}. \end{aligned}$$

После окончания α -процесса при помощи найденных α , γ , $\bar{\alpha}$, $\bar{\gamma}$ строится итерационный процесс для нахождения β , d , $\bar{\beta}$, \bar{d} :

$$\begin{aligned} d_{M-1,n}^{(s+1/2)} &= 0, & d_{i-1,n}^{(s+1/2)} &= \frac{\bar{d}_{in}^{(s+1/2)} E_{in} + X_{in}^{(s)} \bar{d}_{in}^{(s+1/2)} + Y_{in}^{(s)}}{C_{in} - \bar{\alpha}_{in} B_{in} - \bar{\gamma}_{in} Z_{in} - \gamma_{in} E_{in}}, \\ \beta_{in}^{(s+1/2)} &= 0, & \beta_{i+1,n}^{(s+1/2)} &= \frac{\beta_{in}^{(s+1/2)} K_{in} + X_{in}^{(s)} \bar{d}_{in}^{(s+1/2)} + Y_{in}^{(s)}}{C_{in} - \bar{\alpha}_{in} B_{in} - \bar{\gamma}_{in} Z_{in} - \alpha_{in} K_{in}}, \\ \bar{d}_{i,N-1}^{(s+1/2)} &= 0, & \bar{d}_{i,n-1}^{(s+1/2)} &= \frac{\bar{d}_{in}^{(s+1/2)} Z_{in} + \beta_{in}^{(s+1/2)} K_{in} + d_{in}^{(s+1/2)} E_{in} + F_{in}}{C_{in} - \alpha_{in} K_{in} - \gamma_{in} E_{in} - \bar{\gamma}_{in} Z_{in}}, \end{aligned}$$

где $X_{in}^{(s)} = Z_{in} + f_{in}^{-1(s)} \omega B_{in}$, $Y_{in}^{(s)} = (1-\omega) B_{in} \beta_{in}^{(s)} + F_{in}$, $\omega=0$ для $n=N-1$, $f_{in}^{(0)} = (1-\bar{\gamma}_{in}) / (1-\bar{\alpha}_{in})$;

$$\begin{aligned} d_{M-1,n}^{(s+1)} &= 0, & d_{i-1,n}^{(s+1)} &= \frac{d_{in}^{(s+1)} E_{in} + X_{in}^{(s+1/2)} \bar{\beta}_{in}^{(s+1)} + Y_{in}^{(s+1/2)}}{C_{in} - \bar{\alpha}_{in} B_{in} - \bar{\gamma}_{in} Z_{in} - \gamma_{in} E_{in}}, \\ \beta_{i+1,n}^{(s+1)} &= \frac{\beta_{in}^{(s+1)} K_{in} + X_{in}^{(s+1/2)} \bar{\beta}_{in}^{(s+1)} + Y_{in}^{(s+1/2)}}{C_{in} - \bar{\alpha}_{in} B_{in} - \bar{\gamma}_{in} Z_{in} - \alpha_{in} K_{in}}, \\ \bar{\beta}_{i,n+1}^{(s+1)} &= \frac{\bar{\beta}_{in}^{(s+1)} B_{in} + \beta_{in}^{(s+1)} K_{in} + d_{in}^{(s+1)} E_{in} + F_{in}}{C_{in} - \alpha_{in} K_{in} - \gamma_{in} E_{in} - \bar{\alpha}_{in} B_{in}}, \end{aligned}$$

где $X_{in}^{(s+1/2)} = B_{in} + f_{in}^{(s)} \omega Z_{in}$, $Y_{in}^{(s+1/2)} = (1-\omega) Z_{in} \bar{d}_{in}^{(s+1/2)} + F_{in}$.

Функция f_{in} вводится для ускорения сходимости. Решение разностного уравнения (6) определяется с помощью прогоночных коэффициентов:

$$U_{in}^{h(s+1)} = \alpha_{i,n+1}^{h(s+1)} U_{i,n+1}^{h(s+1)} + \beta_{i,n+1}^{h(s+1)}.$$

Пересчитывается функция f для следующей итерации β -процесса:

$$f_{in} = \frac{U_{i,n+1}^{(s+1)} - \bar{\nu}_{in} U_{in}^{(s+1)}}{U_{i,n-1}^{(s+1)} - \bar{\alpha}_{in} U_{in}^{(s+1)}}.$$

Приведенные итерационные формулы значительно проще и компактнее, чем формулы для решения девятиточечных схем, используемые в [2]. Правая часть уравнения (5) вычисляется следующим образом (см. [11], [12]):

$$F_{in}^h = 4\chi_{in}^h \sigma_{in}^h T_{in}^h,$$

где $\sigma_{in}^h = [\sigma(\nu_{in}/T_{in})^{h+1} - \sigma(\nu_{in}/T_{in})^h]$.

Для вычисления $\sigma(x)$ используются приближенные формулы:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1.379944x^3(1/3 - x/8 + x^2/62.4), & x \leq 2, \\ 1.379944[6.4939 - e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 7.28)], & x > 2. \end{cases}$$

3. Для нахождения плотности энергии излучения U^h приходится на каждом временном шаге решать N_k эллиптических уравнений (5). Однако для дальнейших вычислений нужны лишь суммарный поток и суммарная плотность энергии излучения ΣW^h и ΣU^h .

Для сокращения вычислений используется подход, рассмотренный в работах [2], [13]. Осреднив разностное уравнение (6) по k , получим

$$(7) \quad B_{in} U_{i,n-1} + K_{in} U_{i-1,n} - C_{in} U_{in} + E_{in} U_{i+1,n} + Z_{in} U_{i,n+1} + F_{in} = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения определяются следующим образом:

$$B_{in} = \left(\sum_{k=1}^{N_k} U_{i,n-1}^k \right)^{-1} \sum_{k=1}^{N_k} U_{i,n-1}^k B_{in}^k,$$

$$E_{in} = \left(\sum_{k=1}^{N_k} U_{i+1,n}^k \right)^{-1} \sum_{k=1}^{N_k} U_{i+1,n}^k E_{in}^k$$

и аналогично — все остальные коэффициенты.

В (7)

$$F_{in} = \sum_{k=1}^{N_k} F_{in}^k.$$

На некотором шаге по времени считается система многогрупповых уравнений и определяются осредненные коэффициенты, которые в течение дальнейших N шагов считаются неизменными. Через N шагов снова пересчитываются многогрупповые уравнения и снова определяются осредненные коэффициенты. В [13] даются примеры использования приведенного здесь метода осреднения, которые показали его хорошую эффективность.

4. Температура определяется из совместного решения уравнения энергии и диффузии излучения. Предполагается, что остальные газодинамические величины известны.

Разностная аппроксимация уравнения энергии и осредненного уравнения диффузии излучения:

$$(8) \quad \frac{\varepsilon_{in}^{(s+1)} - \varepsilon_{in}^{j-1}}{\tau^{j-1}} = -\frac{1}{\rho} (\operatorname{div} W^{(s+1)} + Q_{in}),$$

$$(9) \quad B_{in} U_{i,n-1}^{(s+1)} + K_{in} U_{i-1,n}^{(s+1)} - C_{in} U_{in}^{(s+1)} + E_{in} U_{i+1,n}^{(s+1)} + Z_{in} U_{i,n+1}^{(s+1)} + F_{in}^{(s+1)} = 0,$$

где s — номер итерации на $(j+1)$ -м слое по времени, Q — вклад в уравнение всех членов, кроме излучения; дивергенция потока излучения

$$\begin{aligned} \operatorname{div} W = & -\frac{\pi}{V_{in}} \{2r_{i+1} [W_{i+1,n}^{[r]j(s+1)} (z_{n+1} - z_n)] + \\ & + (r_{i+1} + r_i) W_{i,n+1}^{[z]j(s+1)} (r_{i+1} - r_i) + \\ & + 2r_i [W_{in}^{[r]j(s+1)} (z_n - z_{n+1})] + (r_{i+1} + r_i) W_{in}^{[z]j(s+1)} (r_i - r_{i+1})\}, \end{aligned}$$

где объем четырехугольной ячейки $V_{in} = \pi S_{in} (r_i + r_{i+1})$, $S_{in} = (z_{n+1} - z_n) \times (r_{i+1} - r_i)$; потоки $W^{[r]}$, $W^{[z]}$ вычисляются по формулам

$$W_{in}^{[r]j(s+1)} = -O_{in}^{[r]} U_{in}^{j(s+1)} + T_{in}^{[r]} U_{i-1,n}^{j(s+1)},$$

$$W_{in}^{[z]j(s+1)} = -O_{in}^{[z]} U_{in}^{j(s+1)} + T_{in}^{[z]} U_{i,n-1}^{j(s+1)},$$

а коэффициенты O_{in} и T_{in} осредняются по группам, аналогично коэффициентам осредненного уравнения (7):

$$O_{in}^{[r]} = \left(\sum_{k=1}^{N_k} U_{in}^k \right)^{-1} \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{N_k} U_{in}^k [\kappa_{in}^k (r_{i+1} - r_i) + \kappa_{i-1,n}^k (r_i - r_{i-1})]^{-1}$$

и т. д. Неизвестна величина $F_{in}^{(s+1)}$, которая необходима для построения неявной схемы.

Линеаризуем $F_{in}^{(s+1)}$ и $\varepsilon_{in}^{(s+1)}$:

$$(10a) \quad F_{in}^{(s+1)} = F_{in}^{(s)} + \left(\frac{\partial F_{in}^{(s)}}{\partial T} \right) (T_{in}^{(s+1)} - T_{in}^{(s)}),$$

$$(10б) \quad \varepsilon_{in}^{(s+1)} = \varepsilon_{in}^{(s)} + \left(\frac{\partial \varepsilon_{in}^{(s)}}{\partial T} \right) (T_{in}^{(s+1)} - T_{in}^{(s)}).$$

Из (8) и (10) получим

$$(11) \quad (T_{in}^{j(s+1)} - T_{in}^{j(s)}) = \frac{1}{\rho (\partial \varepsilon_{in}^{(s)} / \partial T)} \left(\varepsilon_{in}^{j-1} - \varepsilon_{in}^{j(s)} + O_{in} + \frac{\tau^j \operatorname{div} W^{(s+1)}}{\rho_{in}} \right).$$

Подставляя (11) в линеаризованное выражение для F , а также используя выражение

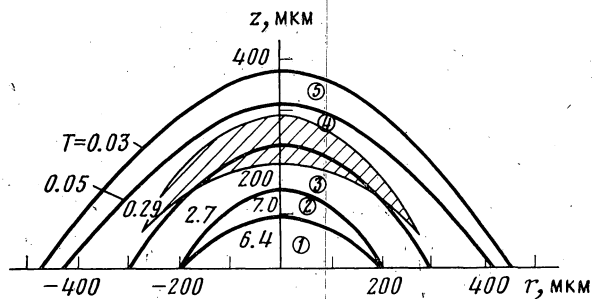
$$\operatorname{div} W = B_{in} U_{i,n-1} + K_{in} U_{i-1,n} - C_{in} U_{in} + E_{in} U_{i+1,n} + Z_{in} U_{i,n+1},$$

получаем окончательную неявную схему для решения осредненного уравнения диффузии:

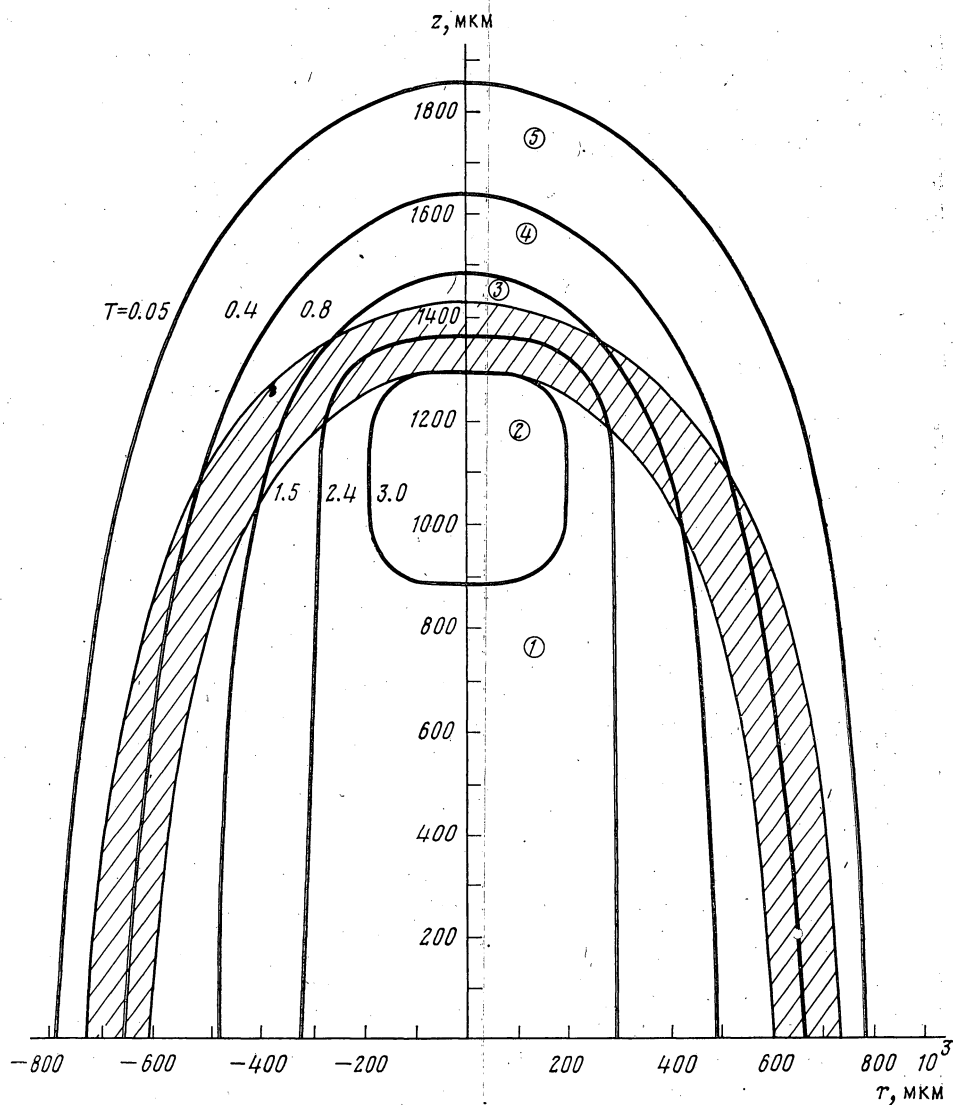
$$(12) \quad (1 + g_{in}^{(s)}) [B_{in} U_{i,n-1}^{(s+1)} + K_{in} U_{i-1,n}^{(s+1)} - C_{in} U_{in}^{(s+1)} + E_{in} U_{i+1,n}^{(s+1)} + Z_{in} U_{i,n+1}^{(s+1)}] -$$

$$- \kappa_{in} U_{in}^{(s+1)} + F_{in}^{(s)} + g_{in}^{(s)} \left(Q_{in} - \frac{\varepsilon_{in}^{(s)} - \varepsilon_{in}^{j-1}}{\tau^{j-1}} \right) = 0,$$

$$g_{in}^{(s)} = \left(\frac{\partial F_{in}^{(s)}}{\partial T} \right) \tau^{j-1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{in}^{(s)}}{\partial T} \rho_{in} \right)^{-1}.$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Плотность энергии излучения U и температура T находятся из совместного решения уравнений (11) и (12). Приведенные здесь расчетные формулы значительно проще аналогичных формул решения уравнений в лагранжевой системе координат [2].

В заключение отметим, что программы, созданные на основе рассмотренных в данной работе и в [2], позволяют вести расчеты достаточно широкого класса двумерных задач динамики излучающего газа.

§ 3. Пример расчета

Для иллюстрации возможностей предлагаемого метода численно решалась двумерная задача о взаимодействии лазерного излучения с веществом. Лазерное излучение с длиной волны $\lambda=1.06$ мкм и интенсивностью $G_0=10^8$ Вт·см⁻² падает на поверхность твердого тела. Считалось, что падающий вдоль оси z поток осесимметричен и интенсивность в нем распределена по закону Гаусса $G=G_0 \exp(-r^2/R^2)$, где $R=300$ мкм — радиус пятна фокусировки. Параметры лазерной системы выбраны из наиболее типичных для лазерно-плазменной обработки неорганических материалов [14]. Особенности взаимодействия, а также поведение лазерной плазмы в воздухе с давлением 1 атм исследовались начиная с момента, когда вблизи поверхности тела уже произошел пробой газа и образовался тонкий, $\sim 30 \div 50$ мкм, плазменный слой, сильно поглощающий лазерное излучение.

Математическая постановка задачи такова. Взаимодействие лазерного излучения с веществом описывается системой уравнений (1)–(4), где в уравнении энергии (2)

$$Q = \frac{\partial W_{\pi}}{\partial z}, \quad W_{\pi} = G \exp \int -\kappa_{\pi} dz.$$

Система уравнений (1)–(4) дополнялась следующими граничными и начальными условиями: $t=0$: $P=P_0=1$ атм, $T=1.7$ эВ при $r \leq 3 \cdot 10^{-2}$ см, $z \leq 5 \cdot 10^{-3}$ см и $P=P_0=1$ атм, $T=T_0=3 \cdot 10^{-2}$ эВ при $r > 3 \cdot 10^{-2}$ см, $z > 5 \cdot 10^{-3}$ см; $r=0$: $v=0$, $W_r=0$; $z=0$: $u=0$, $U=\sigma T^4$; $r=r_N$: $P=P_0=1$ атм, $W_r=-U/2$; $z=z_M$: $P=P_0=1$ атм, $W_z=-U_{\pi}/2$.

Лазерное излучение в начальные моменты времени почти полностью поглощается в горячей приповерхностной области, где $T=1.7$ эВ, вызывая ее нагрев до 10 эВ и, как следствие, интенсивный разлет, сопровождающийся генерацией ударной волны в холодный газ. Область, охваченная ударной волной, на фиг. 1, 2 заштрихована. Примерно через 50 нс существенным становится расширение горячей области в боковых направлениях (фиг. 1), приводящее к тому, что к концу лазерного импульса $\tau_{\pi} \sim 1$ мкс основание плазменного факела в несколько раз превышает пятно фокусировки лазерного излучения (фиг. 2). Интенсивный разлет горячей области приводит к ее охлаждению до 3–5 эВ.

Температурные профили сечения плазменного сгустка в моменты времени $t=65$ нс (фиг. 1) и $t=120$ нс (фиг. 2) позволяют выделить несколько областей, в которых доминируют различные механизмы нагрева. Области 1 и 2 нагреваются лазерным излучением, области 3 и 4 нагреваются в результате работы сил сжатия и потоками собственного излучения W , идущими из горячих областей 1, 2. Нагрев области 5 происходит только за счет радиационных потоков.

Анализ основных параметров (скорости движения, плотности вещества, температуры) ударной волны

$$v_{y,v} = 3 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}, \quad \rho_{y,v} = (1.8 \div 2.2) \cdot 10^{-3} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \quad T_{y,v} = 1.5 \div 2 \text{ эВ}$$

и горячих областей 1 и 2

$$\rho_1 \approx 10^{-4} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \quad T_1 = 2.0 \div 2.5 \text{ эВ},$$

$$\rho_2 \approx (2.5 \div 5.5) \cdot 10^{-4} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \quad T_2 = 3.5 \div 4.2 \text{ эВ}$$

показал, что распространение плазменных образований происходит в режиме светодетонации [15].

Пространственный профиль плазменного факела быстро приобретает характерную цилиндрическую форму (фиг. 2). Сравнение с фоторегистрограммами плазменного факела, развивающегося при аналогичных давлениях [16], показало, что расчетные данные находятся в хорошем соответствии с экспериментальными.

Литература

1. Sandford M. T. et al. Improved, implicit radiation hydrodynamics. — J. Comput. Phys., 1975, v. 19, № 3, p. 280–297.
2. Волчинская М. И., Четверушкин Б. Н. Решение двумерных нестационарных задач радиационной газовой динамики. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, № 5, с. 1262–1275.
3. Кривоцов В. М. Расчет течения воздуха в трубе при воздействии лазерного излучения. — В кн.: Динамика излучающего газа. Вып. 3. М.: ВЦ АН СССР, 1980, с. 105–118.
4. Зубов В. И. и др. Расчет взаимодействия лазерного излучения с алюминиевым сосудом и его парами. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т. 20, № 6, с. 1513–1524.
5. Шильников Е. В. Исследование движения газа под действием сфокусированного лазерного излучения. — В кн.: Динамика излучающего газа. М.: ВЦ АН СССР, 1981.
6. Jentry R. A., Martin R. E., Daly B. I. An Eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems. — J. Comput. Phys., 1966, v. 6, p. 87–118.
7. Герасимов Б. П., Семушин С. А. Расчет на неподвижной эйлеровой сетке обтеканий тел изменяющейся формы. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 7, с. 1214–1221.
8. Волчинская М. И., Четверушкин Б. Н., Чурбанова Н. Г. Решение двумерных нестационарных задач РГД с использованием эйлеровых переменных. — Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1981, № 33.
9. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
10. Четверушкин Б. Н. Об одном итерационном алгоритме решения разностных уравнений. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 2, с. 519–524.
11. Гольдин В. Я., Четверушкин Б. Н. Методы расчета переноса излучения в одномерных задачах низкотемпературной плазмы. — Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1970, № 12.
12. Четверушкин Б. Н. Решение одномерных задач радиационной газовой динамики. — Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1978, № 44.
13. Филиппычев Д. С., Четверушкин Б. Н. Об одном способе осреднения уравнений диффузионного типа по энергиям фотонов. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 6, с. 1601–1605.
14. Рыкалин Н. Н., Углов А. А. Лазерно-плазменная обработка металлов при высоких давлениях газов. — Квантовая электроника, 1981, т. 8, № 6, с. 1193–1201.
15. Райзер Ю. П. Лазерная искра и распространение зарядов. М.: Наука, 1970.
16. Рыкалин Н. Н., Углов А. А., Низаметдинов М. М. Воздействие лазерного излучения на материалы в широком диапазоне давлений. — Квантовая электроника, 1978, т. 5, № 1, с. 89–98.

Поступила в редакцию 30.XI.1981