Доклады Академии наук СССР
1985. Том 281, № 4

УДК 517.944:536.4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В.И. МАЖУКИН, А.А. САМОХИН

# О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИНТЕНСИВНОГО ПОВЕРХНОСТНОГО ИСПАРЕНИЯ ВЕЩЕСТВА

*(Представлено академиком А.А. Самарским 3 IV 1984)*

1°. В отличие от плавления, которое удовлетворительно описывается в рамках известной задачи Стефана [1], при анализе поверхностного испарения необходимо в общем случае рассматривать кинетику фазового перехода совместно с газовой динамикой потока испаренного вещества.

Математическое описание этих процессов производится системой нелинейных уравнений в частных производных с фактором неравновесности в граничных условиях. Если не учитывать гидродинамические процессы в конденсированной среде и возможность образования плазмы в потоке пара, то математическая модель представляет собой систему, состоящую из квазилинейного уравнения теплопроводности для конденсированной среды и уравнений газовой динамики для испаренного вещества. В системе координат, связанной со скоростью фронта $v$, эта система имеет вид

$$c\,\mathrm{Ro}\left(\frac{\partial T}{\partial t} - v\,\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\,\lambda\,\frac{\partial T}{\partial z}\,,\quad -l < z < 0,\quad \lambda\,\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=-l} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial(u-v)}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z}\,,\quad \frac{\partial S}{\partial t} + u\,\frac{\partial S}{\partial z} = 0, \tag{2}$$
$$0 < z < L,\ p|_{z=L} = 0.$$

Процесс испарения, происходящий на границе раздела сред, представляется обычно в виде сильного газодинамического разрыва, на котором формулируется три закона сохранения

$$z = 0:\ \mathrm{Ro}_s v_s = \rho_0 u_0,\ P_s + \mathrm{Ro}_s v_s^2 = p_0 + \rho_0 u_0^2,\ \lambda\frac{\partial T}{\partial z} = L_v\,\mathrm{Ro}_s v_s - G \tag{3}$$

и два дополнительных соотношения, характеризующих кинетику фазового перехода,

$$p(0,t) \equiv p_0 = p_0(T_s, \mathrm{M}),\ u(0,t) \equiv u_0 = u_0(T_s, \mathrm{M}), \tag{4}$$

где $u$, $\rho$, $p$, $T$, $S$ – скорость, плотность, давление, температура, энтропия. Индексы $s$ и 0 означают принадлежность величин к конденсированной и газовой средам соответственно. $G$ – интенсивность источника, $c$, $\lambda$ – теплоемкость и коэффициент теплопроводности конденсированной среды, $\mathrm{M} = u_0/u_c$ – число Маха.

Задача о нахождении явного вида соотношений (4) или других аналогичных условий выходит за рамки механики сплошной среды, и ее решение обычно получают при некоторых предположениях о виде неравновесной функции распределения [2–4].

Общие свойства нелинейных уравнений (1)–(2), а также трудности, возникающие при их решении, в настоящее время достаточно хорошо изучены [5]. Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что степень неравновесности испарительного процесса, которая определяется параметром M в граничных условиях (4), не является заранее заданной величиной. В состоянии фазового равновесия $M = 0$ и $\rho_0 u_0 = 0$, а величина $P_s = p_0$ совпадает с давлением насыщенного пара $p_н$, тогда как при $M = 1$ поток вещества через границу раздела достигает максимума, а давление отдачи $P_s = 0{,}55 p_н$ имеет минимум.

В последнем случае может реализоваться такой режим испарения, когда поведение конденсированной среды перестает зависеть от внешней газодинамической задачи, что существенно упрощает описание испарительного процесса. Однако область реализации подобного режима остается неопределенной. Эта проблема связана непосредственно с тем обстоятельством, что из-за нелинейности уравнений газовой динамики линия перехода решения с $M < 1$ и $M \geqslant 1$ не может быть определена заранее и зависит от искомого решения. Математическая структура и особенности решения таких задач до настоящего времени практически не исследовались.

В данной работе на основе численного моделирования нелинейной задачи испарения и аналитического рассмотрения ее линеаризованного варианта установлено:

1. В дозвуковой области $M < 1$ квазистационарные вариации температуры поверхности обязательно сопровождаются изменением степени неравновесности испарительного процесса. Решение задачи претерпевает качественное изменение в трансзвуковой области, что проявляется, в частности, в недоопределенности линеаризованного варианта задачи (1)–(4), для замыкания которого при $M \geqslant 1$ требуется дополнительное граничное условие на поверхности раздела фаз.

2. Таким дополнительным соотношением в некоторых случаях может быть условие постоянства величины $M = 1$ в конечном диапазоне изменения температуры $T_s$. Численное моделирование показывает наличие нетривиальной области реализации нестационарного испарительного процесса, в том числе и для режимов с уменьшающейся интенсивностью источника, с постоянным значением $M = 1$, которая существенно зависит от режима воздействия.

2°. Вопрос об изменении величины M играет существенную роль в линеаризованных вариантах задачи испарения, которые используются, в частности, при анализе поведения малых возмущений на поверхности испаряющейся жидкости [6–8].

Рассмотрим линейную реакцию стационарного газодинамического потока на заданную модуляцию температуры поверхности $\tilde{T}_s(t) = T_s \exp(i\omega t)$:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + u^0 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} = -\rho^0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{u} - \tilde{v}) + u^0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho^0}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} + u^0 \frac{\partial \tilde{s}}{\partial z} = 0, \tag{5}$$

$$\tilde{p}_0 = \frac{\partial p_0^0}{\partial T_s^0}\tilde{T}_s + \frac{\partial p_0^0}{\partial M}\tilde{M}, \quad \tilde{u}_0 = \frac{\partial u_0^0}{\partial T_s^0}\tilde{T}_s + \frac{\partial u_0^0}{\partial M}\tilde{M},$$

где $\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{S}$ – малые добавки к стационарным значениям соответствующих величин, обозначенных индексом 0 ($\rho^0, \ldots$).

При $M^0 < 1$ решение системы (5) для $\tilde{p}$ и $\tilde{u}$ состоит из одной бегущей волны

$$\tilde{p} = p^0 A \exp(i\omega t + \lambda_1 z)) = \rho^0 u_c(\tilde{u} + \tilde{v}),$$

$$u^0 = M u_c, \qquad \lambda_1 = \frac{\omega}{u^0 + u_c} = \frac{\omega}{u_c(M + 1)}. \tag{6}$$

Выбор конкретного вида решения (6) определяется направлением распространения возмущений в газодинамическом потоке, т.е. знаком величины $\omega/\lambda_1$. Отметим в качестве аналогии, что в известной задаче об устойчивости фронта медленного горения [9] выражение для возмущений давления также содержит только одно собственное решение. Из (6) и линеаризованного варианта соотношений (4) получим связь между $\tilde{T}_s$ и M

$$(7)\qquad \tilde{M}\left(\frac{\partial u_0^0}{\partial M^0}+\frac{\partial v_s^0}{\partial M^0}-\frac{\partial p_0^0}{\partial M^0}\frac{1}{\rho^0 u_c}\right)=\tilde{T}_s\left(\frac{1}{\rho^0 u_c}\frac{\partial p_0^0}{\partial T_s^0}-\frac{\partial u_0^0}{\partial T_s^0}-\frac{\partial v_s^0}{\partial T_s^0}\right).$$

При стремлении $M^0$ к единице слева и учете конкретного вида [3] соотношений (4) из (7) следует

$$(8)\qquad \tilde{M}=\frac{\tilde{T}_s}{15T_s^0}\left(6\frac{T_s^0}{p_н}\frac{dp_н}{dT_s^0}-5\right),\ \tilde{v}\ll\tilde{u}\,.$$

Поскольку $\dfrac{T_s^0}{p_н}\dfrac{dp_н}{dT_s^0}\simeq 10$, то амплитуда $\tilde{M}$ в несколько раз превосходит относительную величину амплитуды модуляции температуры поверхности $\tilde{T}_s/T_s^0$.

Если $M^0\geqslant 1$, то в формуле для давления (6) необходимо учитывать оба собственных решения

$$\tilde{p}=p^0[A\exp(i\omega t+\lambda_1 z))+B\exp(i\omega t+\lambda_2 z))],\quad \lambda_2=\frac{\omega}{u_c(M-1)},$$

соответственно

$$\tilde{u}=\tilde{v}+p^0/\rho^0 u^0[A\exp(i(\omega t+\lambda_1 z))-B\exp(i(\omega t+\lambda_2 z))].$$

В этом случае $\tilde{p}$ и $\tilde{u}+\tilde{v}$, а также $\tilde{T}_s$ и $\tilde{M}$ оказываются линейно независимыми, что качественно меняет характер поведения газодинамических возмущений. По этой причине результаты работы [8], где использовалось лишь одно собственное решение для возмущения давления в потоке пара, относятся фактически только к дозвуковому режиму испарения и не могут быть непосредственно распространены на область $M^0\geqslant 1$.

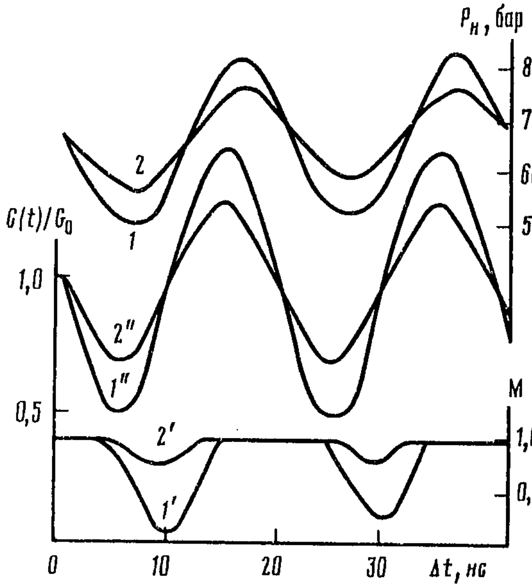
Для полного определения газодинамической задачи (5) требуется в этом случае дополнительное граничное условие на поверхности раздела фаз, получение которого выходит за рамки линейного анализа. Поскольку для процесса интенсивного испарения обычно считается, что значение M на разрыве не превышает единицы [2–4], то в качестве дополнительного условия можно взять соотношение $\tilde{M}=0$.

Подчеркнем, что условие $\tilde{M}=0$ не получается путем предельного перехода из дозвукового решения (7), (8). Как уже отмечалось выше, для обоснования такого условия и определения его области применимости необходимо решать нелинейную задачу (1)–(4).

3°. При испарении в вакуум изменение M может быть связано с подогревом потока испаренного вещества или с быстрыми вариациями $T_s$ при переменной интенсивности нагрева. Эти вопросы изучены еще недостаточно. В частности, нуждается в пересмотре вывод работы [10] о поведении M в условиях нестационарного нагрева.

В работе [10] приведены результаты численного решения задачи испарения в случае нагрева поверхности конденсированной среды прямоугольным импульсом излучения микросекундной длительности, на основе которых без каких-либо ограничений сформулирован вывод об уменьшении M при уменьшении интенсивности нагрева. Такое заключение представляется необоснованным уже хотя бы по той

Рис. 1. Поведение $p_н$ (1, 2) и М (1', 2'') при гармонической модуляции интенсивности $G(t)$ (1'', 2'') с глубиной модуляции $a = 0{,}5$ (1) и 0,3 (2)




причине, что результаты, полученные для данного режима нагрева, не могут быть перенесены на другие случаи изменения интенсивности.

Проведенное нами численное моделирование испарительного процесса показывает, что поведение М в более общем случае качественно отличается от описанного в [10]. При анализе процесса использовались такие же граничные условия и характеристики конденсированной среды, что и в работе [10]. Для решения нелинейной задачи (1) – (4) разработан численный алгоритм, состоящий из вложенных итерационных процедур [11]. Величина $M \leqslant 1$ при этом заранее не фиксировалась и определялась из совместного решения задач теплопроводности и газовой динамики (1)–(4).

Из результатов численного моделирования следует, что характер изменения М сложным образом зависит от режима нагрева облучаемой поверхности, т.е. от величины и скорости изменения поглощаемой интенсивности $G$ и длительности ее воздействия. По сути дела, теоретический анализ степени неравновесности испарительного процесса в нестационарных условиях требует проведения детального численного эксперимента.

В качестве примера на рис. 1 представлены графики изменения М при модуляции интенсивности излучения $G(t) = G_0 [1 - a \sin(2\pi\Delta t/\tau)]$, которая включается спустя 2 мкс после начала действия на поверхность среды постоянной интенсивности $G_0 = 5$ МВт/см$^2$. Период модуляции $\tau = 20$ нс. Из этих графиков видно, что поведение М существенно зависит от глубины модуляции $a$, причем решение задачи попадает в область $M < 1$ только после значительного спада интенсивности и остается там почти на всем участке роста $G(t)$.

В случае $a = 0{,}5$, когда $\tilde{T}_s/T_s^0 = 0{,}03$, изменение $\tilde{M}$ по порядку величины согласуется с линейной оценкой (7), однако с уменьшением глубины модуляции величина $\tilde{M}$ резко убывает. При $a = 0{,}2$ отличие М от единицы не превышает $10^{-4}$. Это согласуется с предположением, что для данного режима воздействия решение нелинейной задачи не выходит из области постоянных значений М.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР, Москва

Поступило
18 IV 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Langer J.S.* – Rev. Mod. Phys., 1980, vol. 52, № 1, p. 1. 2. *Knight C.J.* – AIAA J., 1980, vol. 17, № 5, p. 519. 3. *Самохин А.А.* – Краткие сообщ. по физике. ФИАН, 1982, № 6, с. 3. 4. *Мойжес Б.Я., Немчинский В.А.* – ЖТФ, 1982, т. 52, № 4, с. 684. 5. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы газовой динамики. М.: Наука, 1980. 6. *Самохин А.А.* – Квантовая электроника, 1983, т. 10, № 10, с. 2022. 7. *Коротченко А.И., Самохин А.А.* – ДАН, 1983, т. 269, № 3, с. 581. 8. *Левченко Е.Б., Черняков А.Л.* – ЖПМиТФ, 1982, № 6, с. 144. 9. *Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М.* – Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 10. *Knight C.J.* – AIAA J., 1982, vol. 20, № 7, p. 950. 11. *Мажукин В.И., Пестрякова Г.А.* Препринт ИПМ АН СССР, 1984, № 48.