

УДК 519.6:533.9

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОВЕРХНОСТНОГО ИСПАРЕНИЯ ВЕЩЕСТВА ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

МАЖУКИН В. И., ПЕСТРЯКОВА Г. А.

(Москва)

Предложен алгоритм численного решения задачи поверхностного испарения для случая, когда число Маха на границе раздела является переменной величиной.

§ 1. Введение

Анализ лазерного испарения вещества в общем случае требует рассмотрения процессов в конденсированной среде и кинетики фазового перехода совместно с газодинамическими процессами в потоке испаренного вещества. Специфика задачи — в корректной постановке граничных условий на границе раздела фаз, которые, собственно, и моделируют процесс поверхностного испарения. Корректную постановку граничных условий с описанием кинетики фазового перехода можно произвести, например, в рамках поверхностного испарения с Кнудсеновским слоем [1], [2].

Существует и другой, упрощенный подход к анализу процессов испарения — так называемая модель испарения с изотермическим скачком [3], [4], в которой фазовый переход в явном виде не учитывается.

В [5], [6] утверждалось, что основное различие решений при использовании этих моделей заключается лишь в описании структуры волны испарения, однако детального сравнения результатов не производилось. Без такого анализа затруднительно ответить, например, на вопрос о пригодности модели с изотермическим скачком к описанию испарения в условиях возникновения вблизи поверхности лазерной плазмы. Хотя, вероятно, подход [2], [3] и различные его модификации [7]—[9] имеют определенную область применимости, но вопрос о границах этой области для ряда практически важных задач остается открытым.

Очевидно, что в зависимости от принятой математической модели по-разному реализуется численное решение задачи. Особенно важен выбор математической модели в многомерных задачах испарения.

Основная цель данной работы состоит в разработке численного алгоритма для решения задачи поверхностного испарения в режимах, где скорость испарения может быть не только дозвуковой, но и принимать отрицательные значения. С помощью предложенного алгоритма исследуется процесс лазерного испарения алюминия в условиях возникновения плазмы в парах.

§ 2. Постановка и анализ задачи

Математическая модель поверхностного испарения без учета гидродинамических процессов в конденсированной среде описывается системой уравнений, состоящей из нелинейного уравнения теплопроводности для конденсированной среды и уравнений радиационной газовой динамики

для испаренного вещества. В эйлеровой системе координат, связанной с движением фронта разрушения, она имеет вид

$$(1a) \quad \rho_l(T) c_p(T) \left[\frac{\partial T}{\partial t} - v \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right],$$

$$-h < z < 0, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0,$$

$$(1b) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(u - v_s) + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$(1в) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[\varepsilon + \frac{(u - v_s)^2}{2} \right] + u \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial z}(\rho u) + \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial G_g}{\partial z} \right],$$

$$(1г) \quad \mu \frac{dI_v}{dz} + \kappa_v I_v = \kappa_v I_{vF}, \quad W = \int_0^{\infty} dv \int_{-1}^1 \mu I_v d\mu,$$

$$(1д) \quad \frac{dG^-}{dz} + \kappa_v G^- = 0, \quad \frac{dG^+}{dz} - \kappa_v G^+ = 0,$$

$$\kappa_v = \kappa_v(v, \rho, T), \quad p = p(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T),$$

$$G^-(z_0) = [1 + R(T_s)] G \exp \left(- \int_z^0 \kappa_v dz \right), \quad G^+(z_L) = G,$$

$$0 < z < L, \quad G_g = G^+ + G^-.$$

Принятые обозначения: индексы s и 0 означают принадлежность величин к конденсированной и газовой среде соответственно; величины с индексами n и v относятся к режимам насыщения и кипения; t, z — временная и пространственная координаты; v, ρ_l — скорость и плотность конденсированной среды; $c_p(T), \lambda(T)$ — коэффициенты теплоемкости и теплопроводности; T — температура; p, ε, u, ρ — давление, энергия, скорость и плотность в газовой среде; I_v, W — спектральная интенсивность и поток собственного излучения; G — интенсивность лазерного излучения; $R(T_s)$ — коэффициент отражения лазерного излучения; L_v — удельная теплота испарения; $\gamma = s/3$ — отношение удельных теплоемкостей; $M = u_0/u_c$ — число Маха; u_c — скорость звука.

Граничные условия. Обратная сторона облучаемой пластины $z = -h$ полагалась теплоизолированной: $\lambda \partial T / \partial z = 0$. Для уравнений газовой динамики и переноса излучения со стороны вакуума $z = L$ задавались условия $p = 0, G_g = G, I_v = 0$.

Для задания условий на границе раздела фаз конденсированная среда — пар в настоящее время используются два подхода. В первом используются понятия неравновесного кнудсеновского слоя, во втором — предположение изотермического скачка.

Развитое поверхностное испарение конденсированной среды предполагает наличие резкой границы раздела, соответствующей области сильного газодинамического разрыва, на поверхности которого выписываются граничные условия. В этом смысле обе математические модели — с кнудсеновским слоем и изотермическим скачком — относятся к моделям поверхностного испарения. В обеих моделях на поверхности разрыва $z = 0$

часть граничных условий для уравнений газовой динамики и уравнения теплопроводности выписывается в виде законов сохранения массы, импульса и энергии:

$$(2) \quad \rho_s u_s = \rho_0 u_0, \quad P_s + \rho_s v_s^2 = p_0 + \rho_0 u_0^2, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = G_s + W_s - L_0 \rho_s v_s.$$

В модели с кнудсеновским слоем на этом разрыве формулируются два дополнительных соотношения, характеризующих кинетику фазового перехода и одновременно являющихся граничными условиями для уравнений газовой динамики [2]:

$$(3a) \quad T_0 = T_s \left\{ \left[1 + f^2 \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^2 M^2 \right]^{1/2} - f \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) M \right\}^2, \quad f = \left(\frac{\pi \gamma}{8} \right)^{1/2},$$

$$(3b) \quad \rho_0 = \frac{1}{2} \rho_n \left\{ \left(\frac{T_s}{T} \right)^{1/2} \left[(\gamma M^2 + 1) \exp(b^2 M^2) \operatorname{erfc}(bM) - \frac{4f}{\pi} M \right] + \frac{T_s}{T} [1 - 2fM \exp(b^2 M^2) \operatorname{erfc}(bM)] \right\}, \quad b = \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{1/2},$$

$$\rho_n = \frac{p_n}{RT_s}, \quad p_0 = \rho_0 RT_0, \quad p_n = p_v \exp \left[\frac{L_v}{RT_s} \left(1 - \frac{T_v}{T_s} \right) \right].$$

При строгом рассмотрении для получения этих выражений необходимо решать кинетическое уравнение. Но обычно явный вид их получают при некоторых предположениях о виде неравновесной функции распределения в области разрыва [1], [2], [10], [11]. В общем случае число Маха M в этих соотношениях является неизвестным параметром.

В модели с изотермическим скачком [3], [4], первоначально предназначавшейся, по-видимому, для оценочных расчетов в условиях, близких к фазовому равновесию, вместо условий (3) записываются равенства

$$(4) \quad T_s = T_0, \quad P_s = p_n(T_s), \quad u_0 \approx u_c, \quad \text{т. е. } M \approx 1.$$

Кратко проанализируем физическую суть выражений (3), (4).

Наличие неравновесного кнудсеновского слоя обусловлено обратным потоком частиц, возвращающихся на поверхность из газовой среды. Величина обратного потока определяется условиями газодинамического разлета за пределами кнудсеновского слоя, которые могут характеризоваться одним из газодинамических параметров, например числом M . В силу этого параметр M играет особую роль в задаче. Его величина определяет влияние газодинамического фактора на степень неравновесности испарительного процесса и в конечном итоге определяет величину двух наиболее важных для практических приложений параметров: количество испаренной массы m и давление отдачи P_s . Обычно предполагается, что величина M ограничена сверху значением $M=1$. Этому значению M соответствует максимум неравновесности фазового перехода, для которого характерны максимальный поток вещества $\rho_0 u_0$ через границу раздела и минимальное значение давления отдачи $P_s \approx (1 + \gamma M^2) p_0$, составляющее примерно половину от давления насыщенного пара $P_s \approx 0.55 p_n$. В состоянии фазового равновесия, т. е. при отсутствии испарения, $M=0$, $\rho_0 u_0=0$, $T_s=T_0$, а величина P_s совпадает с p_n и p_0 : $P_s = p_n = p_0$. Необходимым условием реализации режима с $M=1$ является малость давления окружающего газа по сравнению с p_n , например при испарении в вакуум. В случае возникновения лазерной плазмы в парах давление в газовой среде может значительно превосходить давление p_n . Величина параметра M при этом попадает

в область значений, меньших 1, и конкретное значение его неизвестно.

С математической точки зрения значение величины M определяет степень сложности описания и последующего решения задачи. Для экстремального случая $M=1$ описание испарительного процесса существенно упрощается, так как поведение конденсированной среды можно рассматривать независимо от динамики пара. При $M < 1$ такое разделение невозможно и задачи конденсированной среды и газовой динамики необходимо решать одновременно. При этом возникает непростой вопрос о способе определения конкретного значения M в граничных условиях.

Дополнительные условия (4), используемые в изотермической модели, строго говоря, моделируют только случай $M=0$, т. е. ситуацию, когда испарения нет. Обращает на себя внимание несогласованность первых двух равенств с последним, в котором полагается $M=1$. Несогласованность выражений (4) проявляется при любом отклонении M от 0 и максимальна при $M=1$.

Для численного моделирования поверхностного испарения вещества лазерным излучением использовались обе модели. В работах [12]–[17] численно исследовалось испарение, разогрев и двумерный разлет паров в воздух атмосферного давления. Для моделирования процесса испарения использовались представления о Кнудсеновском слое [1]. При этом указывалось [13], [14], что если давление окружающей среды (т. е. воздуха) сравнимо с давлением насыщенного пара, то параметры на границе раздела рассчитываются с учетом того, что $0 \leq u_0 \leq u_c$. Однако ни в одной из работ не сообщается о способе определения u_0 для случая $u_0 < u_c$. Не приводится также никаких данных о поведении параметра M в конкретных расчетах.

Представление об испарении с изотермическим скачком на границе раздела использовалось для расчетов в работах [5]–[9], [18]–[20]. В [5], [6], [18], [19] значение M в граничных условиях либо полагалось равным 1, либо вопрос о поведении M вообще не обсуждался. В [7], [8] приводится численный алгоритм решения нестационарной, двумерной по пространству задачи испарения, основанный на представлениях о распаде разрыва и позволяющий определять значение M на границе с $M \leq 1$. Этот способ определения граничных условий использовался в расчетах [9], [20]. Но ни в одной из этих работ нет информации о поведении параметра M . Во всех работах при образовании плазмы не отмечалось никаких качественных изменений, кроме эффекта экранировки лазерного излучения.

Таким образом, вопрос о поведении параметра M на границе раздела фаз в задачах с возникновением плазмы в парах фактически оказался неисследованным. В то же время в [11], [21] на качественном уровне отмечалась важность учета влияния плазмы на кинетику испарения. Первоочередной проблемой при исследовании процессов испарения с $M < 1$ является разработка вычислительного алгоритма, позволяющего решать задачи с заранее не известным значением M в граничных условиях.

Рассмотрим один из возможных способов построения такого алгоритма.

§ 3. Аппроксимация уравнений

Для решения задачи (1)–(3) использовался конечно-разностный подход, согласно которому дифференциальная задача аппроксимируется разностной [22].

Учет фазового перехода в задаче теплопроводности (1а) приводит к необходимости решения задачи Стефана, аппроксимация которой производилась разностной схемой сквозного счета без явного выделения фронта фазового перехода [23]:

$$(5) \quad \rho_{i,i+1/2} \bar{c}(T_{i+1/2}) \left(\frac{T_{i+1/2}^{j+1} - T_{i+1/2}^j}{\tau^j} - v_s^j \frac{T_{i-1/2}^{j+1} - T_{i+1/2}^j}{h_i} \right) = \\ = \frac{1}{h_i} (A_i T_{i-1/2}^{j+1} - C_i T_{i+1/2}^{j+1} + B_i T_{i+3/2}^{j+1}), \\ T_i = \frac{T_{i-1/2} h_i + T_{i+1/2} h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}}, \quad C_i = A_i + B_i, \\ A_i = \frac{\bar{\lambda}(T_i)}{h_i}, \quad B_i = \frac{\bar{\lambda}(T_{i+1})}{h_{i+1}}, \\ h_i = 0.5(h_i + h_{i-1}), \quad h_i = z_{i+1} - z_i, \quad h_1 = h_N = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ T_{1/2}^{j+1} = T_0^{j+1}, \quad -\lambda(T_N) \frac{T_{N+1/2} - T_{N-1/2}}{h_N} = G_N + W_N - L_0 \rho_{N+1/2} v_{N+1/2};$$

$\bar{c}(T)$, $\bar{\lambda}(T)$ — сглаженные коэффициенты теплоемкости и теплопроводности. Величины A_i , B_i , C_i , \bar{c} , $\bar{\lambda}$, G пересчитываются на каждой итерации.

Решение уравнений газовой динамики осуществлялось конечно-разностным методом FLIC (см. [24], [25]), реализуемым в два этапа.

Э т а п 1:

$$\tilde{u}_{i+1/2} = u_{i+1/2}^j - \frac{\tau^j}{\rho_{i+1/2}^j} \frac{p_{i+1/2}^j - p_{i-1/2}^j}{2} + \omega_{i+1}^j - \omega_i^j, \quad i = 0, 1, \dots, L-1, \\ \tilde{u}_{-1/2} = \tilde{u}_0 = u_0, \quad \tilde{u}_{L+1/2} = \tilde{u}_L = 0, \\ \tilde{\varepsilon}_{i+1/2} = \varepsilon_{i+1/2}^j - \frac{\tau^j}{2\rho_{i+1/2}^j h_i} [p_{i+1/2}^j (\tilde{u}_{i+1/2} - \bar{u}_{i-1/2}) + \omega_{i+1} (\bar{u}_{i+1/2} - \bar{u}_{i+1/2}) + \\ + \omega_i (\bar{u}_{i+1/2} + \bar{u}_{i-1/2})], \quad \bar{u}_{i+1/2} = (u_{i+1/2}^j + \tilde{u}_{i+1/2})/2, \\ \omega_i = \begin{cases} Bu_c \frac{\rho_{i+1/2}^j + \rho_{i-1/2}^j}{2} \delta u, & \text{если } \frac{K}{4} (\delta u)^2 < u_c^2 \text{ и } \delta u > 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ i = 0, 1, \dots, L, \quad B = 0.5, \quad K = 0.8, \quad \delta u = u_{i-1/2}^j - u_{i+1/2}^j, \\ u_c = \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{i-1/2} + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{i+1/2} \right] \right\}^{1/2}, \\ \bar{E}_{i+1/2} = \varepsilon_{i+1/2}^j + \tilde{u}_{i+1/2}^2/2, \quad i = 0, 1, \dots, L-1, \\ \bar{E}_{-1/2} = E_0 = \varepsilon_0^j + \tilde{u}_0^2/2, \quad \bar{E}_{L+1/2} = E_L = \varepsilon_L^j + \tilde{u}_L^2/2,$$

E — полная энергия, ω — искусственная вязкость.

Э т а п 2:

$$(6a) \quad \Delta M_i = \tau^j \frac{\tilde{u}_{i-1/2} + \tilde{u}_{i+1/2}}{2} \begin{cases} \rho_{i-1/2}^j, & \tilde{u}_{i-1/2} + \tilde{u}_{i+1/2} > 0, \\ \rho_{i+1/2}^j, & \tilde{u}_{i-1/2} + \tilde{u}_{i+1/2} \leq 0, \end{cases}$$

$$(6b) \quad \Delta U_i = \tau^j \frac{\tilde{u}_{i-1/2} + \tilde{u}_{i+1/2}}{2} \begin{cases} \rho_{i-1/2}^j \tilde{u}_{i-1/2}, & \tilde{u}_{i-1/2} + \tilde{u}_{i+1/2} > 0, \\ \rho_{i+1/2}^j \tilde{u}_{i+1/2}, & \tilde{u}_{i-1/2} + \tilde{u}_{i+1/2} \leq 0, \end{cases}$$

$$(6в) \quad \Delta E_i = \tau^j \frac{\tilde{u}_{i-1/2} + \tilde{u}_{i+1/2}}{2} \begin{cases} \rho_{i-1/2}^j E_{i-1/2}, & \tilde{u}_{i-1/2} + \tilde{u}_{i+1/2} > 0, \\ \rho_{i+1/2}^j E_{i+1/2}, & \tilde{u}_{i-1/2} + \tilde{u}_{i+1/2} \leq 0, \end{cases}$$

$$i=0, 1, \dots, L,$$

$$(6г) \quad \rho_{i+1/2}^{j+1} = \rho_{i+1/2}^j - \frac{1}{h_i} (\Delta M_{i+1} - \Delta M_i),$$

$$(6д) \quad u_{i+1/2}^{j+1} = \frac{1}{\rho_{i+1/2}^{j+1}} \left[\rho_{i+1/2}^j \tilde{u}_{i+1/2} - \frac{1}{h_i} (\Delta U_{i+1} - \Delta U_i) \right],$$

$$(6е) \quad E_{i+1/2}^{j+1} = \frac{1}{\rho_{i+1/2}^{j+1}} \left[\rho_{i+1/2}^j E_{i+1/2} - \frac{1}{h_i} (\Delta E_{i+1} - \Delta E_i) \right], \quad i=0, 1, \dots, L-1,$$

$$(6ж) \quad \rho_{-1/2}^{j+1} = \rho_0^{j+1} = \rho_0^j, \quad \rho_{L+1/2}^{j+1} = \rho_L^{j+1} = \rho_L^j,$$

$$(6з) \quad u_{-1/2}^{j+1} = u_0^{j+1} = u_0^j = u_0, \quad u_{L+1/2}^{j+1} = u_L^{j+1} = u_L^j = 0.$$

Работа сил сжатия

$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_{i+1/2} = E_{i+1/2}^{j+1} - \frac{1}{2} (u_{i+1/2}^{j+1})^2 - \varepsilon_{i+1/2}^j, \quad i=0, 1, \dots, L-1.$$

Для определения потока собственного излучения W использовалось многогрупповое квазидиффузионное приближение [26] с разностным осреднением по частоте [27]:

$$(7а) \quad \frac{d}{dz} \kappa_k \frac{d\Phi_k}{dz} + \frac{\kappa_k}{D_k} \Phi_k = 4\kappa_k \sigma_h T^4,$$

$$(7б) \quad -l_k \frac{d\Phi_k}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{C_{k0}}{D_k} \Phi_k, \quad -l_k \frac{d\Phi_k}{dz} \Big|_{z=L} = \frac{C_{kL}}{D_k} \Phi_k,$$

$$\Phi_k = D_k U_k, \quad l_k = 1/\kappa_k,$$

где k — номер группы, κ_k — осредненный по Планку групповой коэффициент поглощения, C_{k0} , C_{kL} , D_k — коэффициенты квазидиффузии, определяемые из соотношений

$$C_{k0} = \left[\int_{-1}^1 I_k(z_0, \mu) d\mu \right]^{-1} \int_{-1}^1 \mu I_k(z_0, \mu) d\mu,$$

$$C_{kL} = \left[\int_{-1}^1 I_k(z_L, \mu) d\mu \right]^{-1} \int_{-1}^1 \mu I_k(z_L, \mu) d\mu,$$

$$D_k = \left(\int_{-1}^1 I_k d\mu \right)^{-1} \int_{-1}^1 \mu^2 I_k d\mu;$$

I_k определялось из решения многогруппового уравнения переноса

$$(8) \quad \mu \frac{dI_k}{dz} + \kappa_k I_k = 2\kappa_k \sigma_h T^4$$

с граничными условиями

$$I_k(z_0, \mu) = 0, \quad \mu \geq 0, \quad I_k(z_L, \mu) = 0, \quad \mu < 0.$$

Для аппроксимации многогруппового уравнения переноса (8) использовалась разностная схема из [28]:

$$(9а) \quad I_{i,p} = I_{i-1,p} \exp \left(-\kappa_{i-1/2} \frac{z_i - z_{i-1}}{\mu_p} \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[1 - \exp \left(-\kappa_{i-1/2} \frac{z_i - z_{i-1}}{\mu_p} \right) \right] 2\sigma T_{i-1/2}^k, \quad i=1, 2, \dots, L, \quad \mu_p \geq 0, \quad I_{0p}=0, \\
 (96) \quad & I_{ip} = I_{i+1,p} \exp \left(-\kappa_{i+1/2} \frac{z_i - z_{i+1}}{\mu_p} \right) + \\
 & + \left[1 - \exp \left(-\kappa_{i+1/2} \frac{z_i - z_{i+1}}{\mu_p} \right) \right] 2\sigma T_{i+1/2}^k, \quad i=L-1, \dots, 1, 0, \quad \mu_p < 0, \quad I_{Lp}=0,
 \end{aligned}$$

где p — угловой индекс, индекс k опущен.

Система уравнений квазидиффузии аппроксимировалась разностной схемой

$$(10a) \quad A_i^k \Phi_{i-1/2}^k - C_i^k \Phi_{i+1/2}^k + B_i^k \Phi_{i+1/2}^k - K_i^k \Phi_{i+1/2}^k + F_i^k = 0,$$

$$(10б) \quad \Phi_{-1/2}^k = \Phi_0^k = \alpha^k \Phi_{1/2}^k, \quad \Phi_{L+1/2}^k = \Phi_L^k = \gamma^k \Phi_{L-1/2}^k, \quad i=0, 1, \dots, L-1,$$

где

$$\begin{aligned}
 A_i^k &= 2 \frac{h_{i-1} l_{i+1/2}^k + h_i l_{i-1/2}^k}{(h_{i-1} + h_i)^2}, \quad B_i^k = 2 \frac{h_i l_{i+1/2}^k + h_{i+1} l_{i+1/2}^k}{(h_i + h_{i+1})^2} \\
 C_i^k &= A_i^k + B_i^k, \quad K_i^k = \frac{h_i}{l_{i+1/2}^k D_{i+1/2}^k}, \quad F_i^k = 4\kappa_{i+1/2}^k \sigma_{i+1/2}^k T_{i+1/2}^k h_i, \\
 \alpha^k &= \left(\frac{1 - 0.5\kappa_{1/2}^k h_1 C_0^k}{D_{1/2}^k} \right)^{-1}, \quad \gamma^k = \left(\frac{1 + 0.5\kappa_{L-1/2}^k h_{L-1} C_L^k}{D_{L-1/2}^k} \right)^{-1}.
 \end{aligned}$$

В рассматриваемой задаче температура определяется из совместного решения уравнения энергии и уравнений квазидиффузии. Для аппроксимации этих уравнений использовалась неявная разностная схема [29], которая с учетом линеаризации ε^{j+1} и F^{j+1} приводилась к виду

$$\begin{aligned}
 (11a) \quad & T_{i+1/2}^{s+1} = T_{i+1/2}^s + \frac{1}{\rho_{i+1/2}^{j+1} h_i (\partial \varepsilon / \partial T)_{i+1/2}^s} \left[\rho_{i+1/2}^{j+1} h_i \left(\frac{dB}{dt} \right)_{i+1/2}^{j+1} + \tau^j (G_{g,i+1} - G_{gi}) + \right. \\
 & \left. + \tau^j (A_i \Phi_{i-1/2}^{s+1} - C_i \Phi_{i+1/2}^{s+1} + B_i \Phi_{i+1/2}^{s+1}) - \rho_{i+1/2}^{j+1} h_i (\varepsilon_{i+1/2}^s - \varepsilon_{i+1/2}^j) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (11б) \quad & (1 + g_{i+1/2}) (A_i \Phi_{i-1/2}^{s+1} - C_i \Phi_{i+1/2}^{s+1} + B_i \Phi_{i+1/2}^{s+1}) - K_i \Phi_{i+1/2}^{s+1} + F_i^s + \\
 & + \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_i \left[\left(\frac{dB}{dt} \right)_{i+1/2}^{j+1} + \varepsilon^j - \varepsilon^s \right] \left[\left(\frac{d\varepsilon}{dT} \right)_{i+1/2}^s \right]^{-1} + \\
 & + g_{i+1/2} (G_{g,i+1} - G_{gi}) = 0,
 \end{aligned}$$

$$(11в) \quad \Phi_0^{s+1} = \alpha \Phi_{1/2}^{s+1}, \quad \Phi_L^{s+1} = \gamma \Phi_{L-1/2}^{s+1},$$

где

$$\begin{aligned}
 A_i &= \left(\sum_k \Phi_{i-1/2}^k \right)^{-1} \sum_k A_i^k \Phi_{i-1/2}^k, \dots, \Phi_{i+1/2} = \sum_k \Phi_{i+1/2}^k, \quad F_i = \sum_k F_i^k, \\
 \alpha &= (\Phi_{1/2}^k)^{-1} \sum_k \alpha^k \Phi_{1/2}^k, \quad \gamma = (\Phi_{L-1/2}^k)^{-1} \sum_k \gamma^k \Phi_{L-1/2}^k.
 \end{aligned}$$

§ 4. Теплофизические характеристики

На фиг. 1 представлены используемые в расчетах теплофизические характеристики алюминия в твердом и жидком состоянии. Сплошные линии — справочные данные, штриховые — результаты интерполяции между

последним известным значением и значением данной характеристики при критической температуре $T_{кр} = 8000 \text{ К}$ (см. [30]).

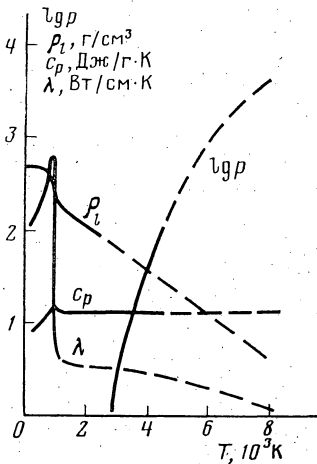
Зависимости $c_p(T)$, $\lambda(T)$, $\rho_l(T)$ для алюминия взяты из [31], [32]. В качестве коэффициента отражения лазерного излучения использовались данные работы [15]:

$$R(T_s) = \begin{cases} 0.769, & T_s < T_{пл}, \\ 1 - 0.64T_s^{0.4}, & T_s \geq T_{пл}. \end{cases}$$

В расчетах для определения давления насыщенных паров $p_n(T_s)$ использовались табличные данные из [32]. Уравнения состояния $p = p(\rho, T)$, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$ рассчитаны по методике [33]. При расчете коэффициентов поглощения $\kappa_v = \kappa_v(\nu, \rho, T)$ использовалась методика из [34]. Расчеты проводились в спектральном диапазоне $h\nu = 10^{-2} \div 80 \text{ эВ}$. Весь диапазон разбивался на 9 интервалов, в каждом из которых производилось планковское осреднение коэффициента κ_v по частоте.

§ 5. Алгоритм решения задачи

Численное решение задачи (1) при использовании в качестве граничных условий на границе раздела фаз $z=0$ соотношений, характерных для изотермического скачка (2), (4), затруднений не вызывает. Задачи для конденсированной и газовой среды разделены и решаются независимо. На каждом шаге по времени сначала решается задача теплопроводности (1а), (2), затем определяются граничные условия (4) для уравнений газовой динамики и решается радиационная газодинамическая задача (1б–д).



Фиг. 1

Алгоритм решения можно не перестраивать и в случае использования в качестве граничных условий на $z=0$ соотношений из модели испарения с кнудсеновским слоем (2), (3), если в этих соотношениях параметр M — фиксированная величина, например на уровне 1 или 0. В этом случае задачи теплопроводности и радиационной газовой динамики формально не взаимосвязаны.

Ситуация радикально изменяется в случае, когда значение M не фиксировано, например $M < 1$. Задачи теплопроводности и радиационной газовой динамики оказываются взаимосвязанными, а значение величины M в граничных условиях (3) неизвестно и должно определяться из решения уравнений газовой динамики. При этом изменение u_0 оказывает влияние на тепловой режим поверхности конденсированной среды, так как посредством закона сохранения потока массы $\rho_s u_s = \rho_0 u_0$ скорость истечения паров u_0 входит в граничное условие для уравнения теплопроводности. Использование для решения изложенного алгоритма оказывается невозможным ввиду неустойчивости счета.

Для численного решения задач испарения в режимах с $M < 1$, т. е. $u_0 < u_c$, был разработан специальный алгоритм, состоящий из нескольких вложенных итерационных циклов и организованный аналогично [35]. Согласно этому алгоритму вычислительный процесс при переходе $t^j \rightarrow t^{j+1}$ разбивается на несколько этапов.

Алгоритм

Шаг 1. Выполняется внутренний цикл, состоящий из соотношений (3), (4) и уравнений газовой динамики (16). Методом простой итерации по известным значениям T_s , ρ_n из (4) и (6) определяется ρ_0^l , T_0^l , u_0^l и тем самым M^l , где l — номер итерации.

Шаг 2. Выполняется внешний итерационный цикл, где задача Стефана (5) решается совместно с соотношениями (2). В этом цикле по известному значению u_0 определяются величины T_s^k , v_s^k , ρ_s^k , где k — номер итерации. На каждую k -ю итерацию приходится l итераций внутреннего цикла. На k итерациях разностное уравнение теплопроводности (5) решается методом прогонки с итерациями [22].

Шаг 3. Определяется величина осредненного потока W . Для этого решается система разностных уравнений (7), (9).

Шаг 4. По известным газодинамическим параметрам с помощью неявной итерационной схемы определяется значение температуры в газовой среде.

Шаг 5. Для повышения точности и устойчивости счета все рассмотренные циклы объединены в общий цикл, включающий уравнения (5) — (11). Число итераций в этом цикле 1–2.

Оптимальное значение шага τ определялось с помощью методических расчетов, на основании которых был предложен следующий способ автоматического выбора шага интегрирования. Шаг оставался неизменным, если число итераций удовлетворяло условиям $[(5 \div 6) \leq k \leq (10 \div 12)] \cup [1 \leq l \leq 10]$. Если $k < (5 \div 6)$, то τ увеличивался в 1.1–1.2 раза. Если одно из чисел $k, l > (10 \div 12)$, то шаг уменьшался в 2 раза. Кроме того, величина τ сверху ограничивалась параметром Куранта $\tau \leq \tau_k$.

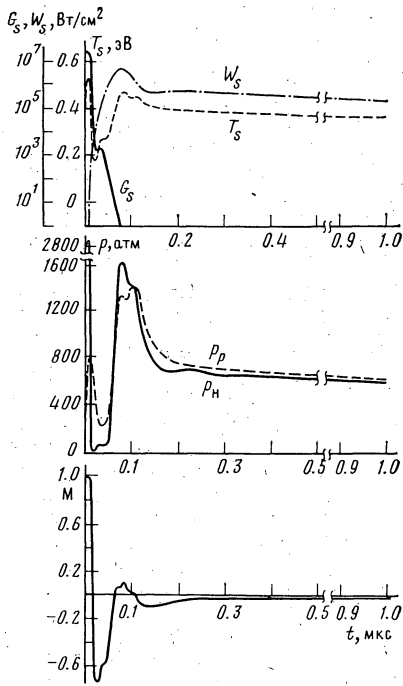
Отметим вычислительные особенности предложенного алгоритма: при $M=1$ итерационные циклы сходятся за одну итерацию $k=l=1$, шаг интегрирования растет и ограничивается только из соображений допустимой погрешности; при отклонении M от единицы ($M < 1$) число итераций l и k растет, шаг уменьшается и $k, l \leq 4$ при оптимальном значении τ .

§ 6. Анализ результатов расчетов

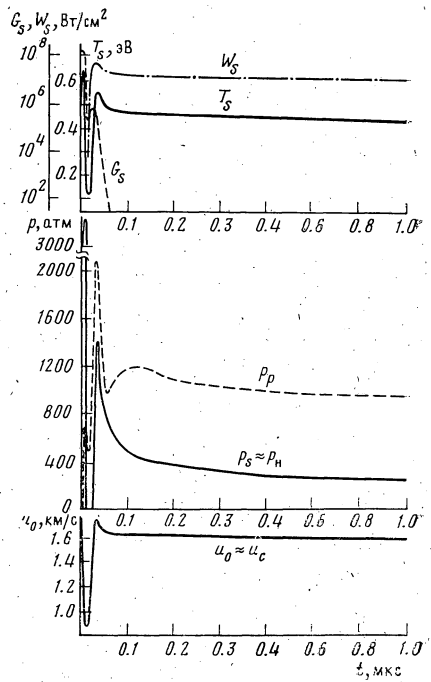
В расчетах использовалась неравномерная по пространственной координате сетка, содержащая 60 узлов: 20 узлов для уравнения теплопроводности и 40 — для уравнений газовой динамики. Первые 5 интервалов в обе стороны от границы раздела $z=0$ задавались с постоянными шагами: $h_1=0.2$ мкм для конденсированной среды и $h_2=25$ мкм — для газовой. Последующие шаги увеличивались в 1.3 раза. Расчеты производились при следующих исходных данных: $G=5 \cdot 10^8$ Вт/см², $\lambda=1,06$ мкм, $h=100$ мкм, $L=20$ см, $\rho_l=2.7$ г/см³, $T=0.03$ эВ, $\rho=10^{-8}$ г/см³, $u=v_s=0$.

Численное моделирование с использованием модели испарения с кнуденовским слоем показало, что при испарении в вакуум в начале процесса противодавление паров незначительно и $M=1$. Образование плазмы вблизи поверхности вызывает резкое уменьшение параметра M , вплоть до появления отрицательных значений (см. фиг. 2). Испарение при этом происходит в двух коротких промежутках времени, где $M > 0$.

Первый период испарения обусловлен лазерным излучением и заканчивается при $t \approx 16$ нс в результате интенсивного поглощения излучения ионизованными парами. Испарение прекращается при $M=0$ несмотря на



Фиг. 2

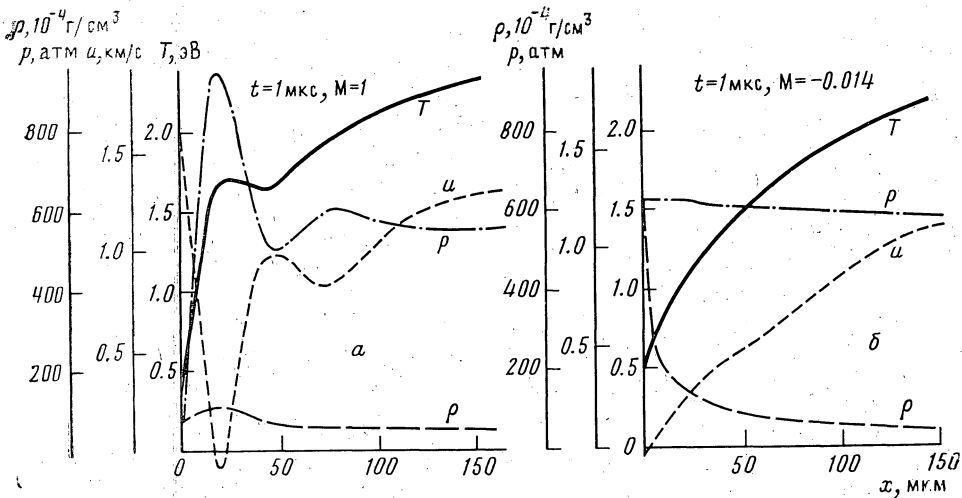


Фиг. 3

то, что температура поверхности $T_s \approx 0.3$ эВ значительно выше температуры кипения алюминия в нормальных условиях $T_n = 0.24$ эВ. Прекращение испарения вызвано тем, что давление в плазме становится сравнимым с давлением насыщенных паров $p_p \approx p_n$, т. е. решающую роль в этой ситуации играет газодинамический фактор. Увеличение давления в плазме приводит к неравенству $p_p \geq p_n$ и к появлению отрицательных значений M . Изменению знака параметра M соответствует изменение первоначального направления газодинамического потока, который при $M < 0$ направляется к поверхности конденсированной среды, где должна протекать конденсация пара.

В математическую модель (1)–(3) процессы конденсации не включены, и поэтому предполагалось, что поток из газовой среды $\rho_p u_0$, достигающий поверхности, полностью осаждается на ней. С этой целью в граничных условиях величина $\rho_p u_0$ заменялась величиной $\rho_p u_0$, где ρ_p – плотность вещества в первом от поверхности счетном интервале. Интенсивный газодинамический разлет горячих паров приводит к их просветлению и увеличению радиационного потока W_s , падающего на поверхность. Рост величины W_s приводит к увеличению T_s и $p_n(T_s)$. При выполнении неравенства $p_n(T_s) > p_p$ число Маха вновь приобретает положительные значения, открывая второй период испарения $60 \leq t \leq 100$ нс. Появление новой доли холодных паров увеличивает оптическую толщину среды и ослабляет поток W_s , что приводит к соотношениям $p_n(T_s) < p_p$ и $M < 0$. В условиях одномерной постановки задачи эта ситуация сохраняется до конца импульса воздействия $t = 1$ мкс (фиг. 2). Прекращение испарения, как и в первом периоде, происходит под воздействием газодинамического фактора. Температура поверхности на этом отрезке времени $T_s = 0.5 \div 0.4$ эВ (фиг. 2).

Выполненные расчеты позволили отметить следующие особенности процесса испарения при наличии лазерной плазмы.



Фиг. 4

1. Испарение может прекращаться под влиянием газодинамического фактора, что позволяет, в частности, объяснить отсутствие испарения при наличии переизлучения.

2. Процесс испарения носит сугубо нестационарный характер.

3. Математическая модель поверхностного испарения с кнудсеновским слоем требует дальнейшего развития. При $M < 0$ граничным условиям (3) придается смысл неких интерполяционных соотношений. Однако с физической точки зрения использование их в расчетах не вполне корректно ввиду несимметричности процессов испарения и конденсации. Появление отрицательных значений $M < 0$ требует включения в математическую модель описания кинетики конденсации.

Расчеты по модели с изотермическим скачком, в которой $M=1$, показали, что испарение происходит на протяжении всего импульса излучения фиг. 3, за исключением короткого промежутка времени, обусловленного экранировкой поверхности. В результате экранировки температура поверхности T_s падает до 0.1 эВ, что значительно ниже температуры кипения металла при нормальных условиях. Возобновление испарения происходит под воздействием потока собственного излучения плазмы W_s . Влияние газовой среды при фиксированном значении M в граничных условиях полностью исключается. В конечном счете это приводит к противоречию, так как после образования лазерной плазмы поток пара, в силу заданных граничных условий (4), движется из области с низким давлением в область, где давление в несколько раз выше (см. фиг. 4, а). Для сравнения на фиг. 4, б представлены пространственные распределения основных параметров газовой среды, полученные по модели с кнудсеновским слоем.

Таким образом, расчеты свидетельствуют, что процесс испарения характеризуется двумя факторами: температурным (температура поверхности T_s) и газодинамическим (параметр M). Каждый из этих факторов в отдельности при определенных условиях может приводить к прекращению процесса развитого испарения. Фиксированное значение M в модели с изотермическим скачком приводит к тому, что испарение полностью контролируется температурным фактором, влияние противодавления газовой среды при этом исключается. Кроме того, в модели с изотермическим

скачком, в силу условия $P_s = p_n(T_s)$, температурный фактор полностью определяет и давление отдачи P_s , что верно только в одном случае: когда $M=0$. В конечном итоге это не позволяет в рамках модели с изотермическим скачком количественно верно определять значения m и P_s . Как показали расчеты, отказ в этой модели от условия $M=1$ полностью не устраняет указанные недостатки.

Более детальный сравнительный анализ такого режима испарения приводится в [36].

В заключение авторы выражают благодарность Н. Н. Калиткину и Г. С. Романову за предоставление данных по расчетам уравнений состояния и коэффициентов поглощения в плазме алюминия.

Литература

1. Анисимов С. И. и др. Действие излучения большой мощности на металлы. М.: Наука, 1970.
2. Knight C. J. Theoretical modeling of rapid surface vaporization with back pressure.— AIAA Journal, 1979, v. 17, № 5, p. 519–523.
3. Афанасьев Ю. В., Крохин Ю. Н. Испарение вещества под действием излучения лазера.— Ж. эксперим. и теор. физ., 1967, т. 52, вып. 4, с. 966–975.
4. Афанасьев Ю. В., Крохин Ю. Н. Газодинамическая теория воздействия излучения лазера на конденсированные вещества.— В кн.: Квантовая радиофиз. Т. 52. М.: ФИАН, 1970, с. 118–170.
5. Голубь А. П. и др. Исследование нестационарного процесса разогрева и испарения металлов и образования поглощающего слоя плазмы под действием лазерного излучения.— Деп. в ВИНТИ, 1979, № 3300-79 ДЕП.
6. Голубь А. П. и др. Испарение металлов импульсом лазерного излучения и образование экранирующего плазменного слоя.— Ж. техн. физ., 1981, т. 51, вып. 2, с. 316–323.
7. Зубов В. И. и др. Расчет взаимодействия лазерного излучения с алюминиевым сосудом и его парами.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т. 20, № 6, с. 1513–1524.
8. Зубов В. И. и др. Расчет движения паров твердого тела под действием лазерного излучения.— В кн.: Динамика излучающего газа. Вып. 3. М.: ВЦ АН СССР, 1980, с. 76–104.
9. Филиппов С. С., Четверушкин Б. Н., Шильников Е. В. Математическое моделирование испарения металла под действием электронного пучка.— Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 4, с. 835–839.
10. Самохин А. А. О газодинамическом разрыве на фронте испарения.— В кн.: Краткие сообщ. по физ. № 6. М.: ФИАН, 1982, с. 3–6.
11. Мойжес Б. Я., Немчинский В. А. Формирование струи при испарении в вакуум.— Ж. техн. физ., 1982, т. 52, № 4, с. 684–689.
12. Романов Г. С., Станкевич Ю. А. Расчет нестационарных осесимметричных плазменных факелов в режиме световой детонации.— Докл. АН БССР, 1977, т. 21, № 6, с. 503–506.
13. Ельяшевич М. А., Романов Г. С., Станкевич Ю. А. Расчет параметров светоэрозионных плазменных факелов с учетом спектральной зависимости их излучательных характеристик.— В кн.: Динамика излучающего газа. Т. 1. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 90–101.
14. Романов Г. С., Станкевич Ю. А. Расчет импульса отдачи, возникающего при действии оптического излучения на поглощающую преграду в воздухе.— Физ. и хим. обработки материалов, 1981, № 4, с. 15–23.
15. Бонч-Бруевич А. М. и др. Теоретическое и экспериментальное изучение светоэрозионной плазмы в режиме развитого поглощения.— Ж. техн. физ., 1981, т. 51, вып. 5, с. 919–924.
16. Романов Г. С., Станкевич Ю. А. Об оптимизации импульса отдачи, возникающего при действии интенсивных световых потоков на поглощающую преграду в воздухе.— Докл. АН БССР, 1981, т. 25, № 5, с. 424–427.

17. Романов Г. С., Станкевич Ю. А. Численное моделирование газодинамических процессов, протекающих при действии лазерного излучения умеренной плотности потока на металлическую преграду в воздухе.— Физ. горения и взрыва, 1981, № 6, с. 77–82.
18. Бергельсон В. И. и др. Образование плазмы в слое паров, возникающих под действием излучения ОКГ на твердое тело.— Квантовая электроника, 1973, № 4 (16), с. 20–27.
19. Бергельсон В. И., Немчинов И. В. Параметры плазмы, образующейся под действием микросекундных импульсов излучения лазеров на алюминиевую преграду в вакууме.— Квантовая электроника, 1978, т. 5, № 10, с. 2123–2131.
20. Лохныгин В. Д., Самохин А. А. О роли плазмы в процессе развитого испарения металлов под действием интенсивного оптического излучения.— Теплофиз. высоких т-р, 1977, т. 15, с. 1152–1157.
21. Зубов В. И. и др. Расчет действия лазера на плоскую преграду и ее пары.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, т. 23, № 6, с. 1520–1522.
22. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
23. Самарский А. А., Моисеенко Б. Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 5, с. 816–827.
24. Jentry R. A., Martin R. E., Daly B. I. An Eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems.— J. Comput. Phys., 1966, v. 1, № 1, p. 87–118.
25. Герасимов Б. П., Семушин С. А. Расчет на неподвижной эйлеровой сетке обтеканий тел изменяющейся формы.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 7, с. 1214–1221.
26. Гольдин В. Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 6, с. 1078–1084.
27. Филиппычев Д. С., Четверушкин Б. Н. Об одном способе осреднения уравнений диффузионного типа по энергиям фотонов.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 6, с. 1601–1603.
28. Четверушкин Б. Н. Решение одномерных задач радиационной газовой динамики.— Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1978, № 4.
29. Куликов Ю. Н., Четверушкин Б. Н. Неявный разностный метод определения температуры в задачах радиационной газовой динамики.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т. 13, № 1, с. 136–146.
30. Фортов В. Е., Дремин А. Н., Леонтьев А. А. Оценка параметров критической точки.— Теплофиз. высоких т-р, 1975, т. 13, № 5, с. 1072–1080.
31. Иванов Б. Н. Теплофизические свойства жидких и твердых вольфрама, меди, алюминия, олова и свинца.— Теплофиз. высоких т-р, 1969, т. 7, № 5, с. 898–905.
32. Термодинамические свойства индивидуальных веществ./Справочник. Ред. Глушко В. П. Сер. III. № 1. М.: Наука, 1981.
33. Калиткин Н. Н., Ригус И. В., Миронов А. М. Ионизационное равновесие с учетом вырождения электронов.— Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1983, № 6.
34. Романов Г. С., Степанов К. Л., Сыркин М. И. Оптические свойства высокотемпературной плазмы алюминия.— Оптика и спектроскопия, 1982, т. 53, № 4, с. 642–648.
35. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы газовой динамики. М.: Наука, 1975.
36. Мажукин В. И., Пестрякова Г. А. Численное моделирование процессов поверхностного испарения металла лазерным излучением.— Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1984, № 48.

Поступила в редакцию 25.IV.1984
 Переработанный вариант 25.II.1985