



Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Академии наук СССР

Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ С Т Е Ф А Н А
НА АДАПТИВНОЙ СЕТКЕ

Препринт № 52 за 1987 г.

Москва

ОРДЕНА ЛЕНИНА

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ им.М.В.КЕЛДЫША АКАДЕМИИ НАУК СССР

Н.А.Дарьин, В.И.Мажукин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ
ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА НА АДАПТИВНОЙ СЕТКЕ

Москва, 1987 г.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается новый подход к численному решению нестационарной двумерной задачи Стефана. В основу метода положена идея построения и использования адаптивной сетки, динамически связанной с решением. Построение сетки осуществляется посредством автоматического преобразования координат. Конкретный вид преобразования определяется некоторыми функциями Q_1 , Q_2 , которые вычисляются по искомому решению.

Возможности метода демонстрируются на примере решения двух модельных задач.

Введение

При математическом моделировании задачи Стефана наибольшее распространение получили два подхода к решению проблемы:

- определение классического решения с явным выделением границы раздела фаз;
- нахождение обобщенного решения с помощью процедуры сглаживания по схеме сквозного счета [1].

Несмотря на то, что в ряде случаев алгоритмы сквозного счета весьма чувствительны к выбору параметра сглаживания [2], они нашли широкое распространение и оказались особенно эффективными в многомерных постановках [2-4]. Однако введение процедуры сглаживания, полностью исключающее из рассмотрения кинетику фазового превращения, накладывает естественные ограничения на область применимости данного подхода.

В ряде проблем, таких как получение аморфных материалов [5], воздействие концентрированных потоков энергии на металлы [6] и полупроводники [7], задачи термодиффузии [8], где неравновесность фазового перехода может играть определяющую роль, а также в задачах, требующих корректного учета гидродинамических явлений при фазовых превращениях, проявляется необходимость точного выделения фазового фронта и учета процессов, связанных с ним. Численные алгоритмы, основанные на явном выделении фронта [9-14], связаны с непростой, особенно в многомерных задачах, проблемой перестройки расчетной сетки, и, как правило, громоздки и требуют больших затрат машинного времени. В этой связи представляется весьма актуальной разработка экономичных и более совершенных алгоритмов решения многомерных задач с явным выделением фазовой границы. Одним из подходов к решению этой проблемы может служить метод адаптивных сеток.

В настоящей работе излагается один из возможных методов решения двумерной нестационарной задачи Стефана в классической постановке на адаптивной сетке, динамически связанной с решением.

§ 1. Обоснование метода.

Решение задачи Стефана состоит в определении температурных полей и скорости движения фазового фронта U_{sc} . Основные трудности математического исследования подобных задач связаны с тем, что граница раздела фаз $\Gamma(t)$, а тем самым и подобласти определе-

ния решения $G(x, y, t)$ заранее неизвестны и должны определяться в ходе решения задачи. Кроме того, часто возникают ситуации, когда первоначально заданные области зарождающейся или исходной фаз изменяются во много раз. В этих случаях при численном решении оказывается, что расчетные сетки, используемые в начале процесса, становятся непригодными через определенное время, и для продолжения расчета необходима их перестройка, например, с помощью интерполяционных процедур.

Основное требование, предъявляемое к расчетным сеткам при решении подобных задач, заключается в том, что должен существовать механизм автоматической перестройки сетки с фиксированным общим числом ячеек, размеры которых могли бы изменяться в зависимости от потока вещества через межфазную границу, т.е. в зависимости от поведения решения. Желательно также исключить из рассмотрения подвижную границу.

Одним из способов достижения этих целей является распространение на многомерные задачи метода адаптивных сеток, изложенного в работе [12] для случая одномерных двухфазных задач Стефана.

Принцип построения адаптивных сеток, динамически связанных с решением, определим как способ построения, при котором определение сеточных функций и координат узлов неразрывно взаимосвязано. Тесная взаимосвязь между искомым решением и определением самой сетки вводится на уровне дифференциальной модели, представляющей собой в общем случае нелинейную систему уравнений в частных производных. В этой системе часть уравнений описывает непосредственно исследуемое явление, а вторая часть - динамику расчетной сетки, определяемую поведением искомого решения. В предельных случаях из этих уравнений получаются сетки либо в эйлеровых, либо в лагранжевых переменных. Решение задачи и построение расчетной сетки производится в криволинейной системе координат.

В качестве исходной используется декартова система координат x, y, t , в которой производится математическая формулировка исследуемого явления. Затем с помощью преобразования общего вида

$$\xi = \xi(x, y, t), \quad \eta = \eta(x, y, t), \quad \tau = t$$

физическая плоскость отображается на прямоугольник в плоскости криволинейных координат ξ, η . В криволинейных координатах

математическая постановка задачи приобретает более сложный вид, поскольку в уравнениях появляются дополнительные члены с множителями в виде метрических коэффициентов $x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta$. Тем не менее, несмотря на то, что преобразованные уравнения несколько сложнее исходных, процесс их решения обладает рядом существенных преимуществ:

1). Возможность отображения физической плоскости с криволинейной границей в прямоугольную область позволяет строить и использовать в расчетах ортогональные сетки, равномерные или неравномерные по одному или обоим направлениям с неизменяющимися по времени шагами h_ξ, h_η . Применительно к задаче Стефана использование криволинейных координат вносит дополнительное удобство. В расчетной области фазовую границу можно зафиксировать и определять через нее переток вещества. Тем самым удается избавиться от основной неприятности, возникающей при решении задачи Стефана. В физическом пространстве при этом в обеих подобластях сетки перестраиваются в зависимости от величины и знака потока массы. Число узлов в каждой из подобластей остается неизменным, а расстояния между ними изменяются.

2). Вычисление метрических коэффициентов $x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta$ и якобиана преобразования ψ требует определения значений координат x и y на каждый момент времени. С этой целью преобразованная система уравнений дополняется уравнениями, описывающими траектории движения узлов сетки $[x_i(t), y_j(t)]$. Тем самым появляется возможность перераспределения узлов в эйлеровом пространстве в зависимости от особенностей решения, таких как градиенты или подвижные границы.

3). Основное отличие и преимущество рассматриваемого метода адаптации от ранее предлагавшихся [14, 13] состоит в использовании более общего и универсального способа задания уравнений, описывающих движение узлов сетки. Для двумерных нестационарных задач вводятся два уравнения в частных производных, позволяющих производить преобразование координат с помощью некоторых функций Q_1 и Q_2 , конструкция которых в общем случае произвольна. Конкретный вид данных функций определяется особенностями решения и предоставляет пользователю большую свободу выбора. Тем самым появляется возможность единым образом строить адаптивные сетки для широкого класса задач с разнообразными особенностями решения.

Все три пункта являются общими для различных нестационарных задач. Конкретный вид функций Q_1, Q_2 будет указан ниже.

§ 2. Постановка задачи.

Математическая формулировка классического варианта задачи Стефана сводится к нелинейному уравнению теплопроводности в двух подобластях $G_1(t)$ и $G_2(t)$ области $G(x, y)$, разделенных заранее неизвестной фазовой границей $\Gamma(t)$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \operatorname{div}[\lambda(T) \operatorname{grad} T] + q = -\frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\partial W_2}{\partial y} + q,$$

$$(1) \quad W_1 = -\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad W_2 = -\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \varepsilon = c \rho \int T$$

На межфазной границе $\Gamma(t)$ выполняется дифференциальное условие Стефана

$$(2) \quad W_s^n - W_\ell^n = L_m Q^n = L_m \int v_{s\ell}^n, \quad W_s^{\bar{t}} = W_\ell^{\bar{t}}$$

Кроме условия (2) на границе $\Gamma(t)$ в классическом варианте задачи предполагается также постоянство температуры перехода

$$(3) \quad T_s = T_\ell = T_m.$$

Вид граничных условий на внешней границе может быть любым. Принятые обозначения: индексы n и \bar{t} означают нормальную и касательную компоненты, индексы s, ℓ означают принадлежность вещества к твердой и жидкой фазам, ρ - плотность вещества, c_p , λ - коэффициенты теплоемкости и теплопроводности, T_m, L_m - температура и теплота плавления (кристаллизации), $v_{s\ell}^n$ - скорость движения границы раздела фаз, q - объемный источник.

В криволинейных координатах ξ, η, t задача (1)-(3) запишется в виде следующей системы уравнений:

- уравнения теплопроводности

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\psi \varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[(W_1 + \varepsilon Q_1) \frac{\partial y}{\partial \eta} - (W_2 + \varepsilon Q_2) \frac{\partial x}{\partial \eta} \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-(W_1 + \varepsilon Q_1) \frac{\partial y}{\partial \xi} + (W_2 + \varepsilon Q_2) \frac{\partial x}{\partial \xi} \right] + \psi q,$$

где

$$\psi = \rho \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right),$$

$$W_1 = -\frac{\lambda \rho}{\psi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right),$$

$$W_2 = -\frac{\lambda \rho}{\psi} \left(-\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right),$$

и двух уравнений, связывающих скорость изменения переменных x ,

y :

$$(5) \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{Q_1}{\rho},$$

$$(6) \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{Q_2}{\rho},$$

$$(7) \quad Q_1 = -D\rho \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right), \quad Q_2 = -D\rho \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right),$$

с соответствующими граничными условиями на линии фазового перехода

$$(8) \quad T_S = T_L = T_m, \quad Q^n = L_m^{-1} (W_S^n - W_L^n), \quad W_S^{\bar{c}} = W_L^{\bar{c}}.$$

На внешних границах задаются соответствующие граничные условия (в зависимости от конкретной постановки). Здесь D - положительная постоянная, а Q_1 , Q_2 - составляющие потока массы через координатные линии в расчетном пространстве. Конкретный вид функций Q_1 , Q_2 в виде (7) выбирался с целью более равномерного распределения узлов в физическом пространстве.

§ 3. Разностная схема.

При конечно-разностной аппроксимации уравнений (4)-(7) в пространстве ξ , η , t вводится прямоугольная сетка ω с шагами h_1 , h_2 , τ соответственно:

$$\omega = \{(\xi_i, \eta_j, t^n), \xi_{i+1} = \xi_i + h_1, \eta_{j+1} = \eta_j + h_2, t^{n+1} = t^n + \tau, \\ i = 1, \dots, N-1, j = 1, \dots, M-1\}.$$

В общем случае шаги сетки h_1 , h_2 , τ могут быть переменными. В узлах сетки будем определять функции $x_{i,j}^n$, $y_{i,j}^n$, $Q_{1,i,j}^n$, $Q_{2,i,j}^n$. В серединах ячеек определяются функции $T_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n$, $\Psi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n$, $\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n$. К серединам ребер ячеек относятся функции $W_{1,i+\frac{1}{2},j}^n$, $W_{1,i,j+\frac{1}{2}}^n$, $W_{2,i+\frac{1}{2},j}^n$, $W_{2,i,j+\frac{1}{2}}^n$.

Используя интегро-интерполяционный метод [15], выпишем следующую явную разностную схему для дифференциальных уравнений

(4)-(7):

$$\begin{aligned}
& (\Psi_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} \varepsilon_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - \Psi_{i+1/2, j+1/2}^n \varepsilon_{i+1/2, j+1/2}^n) \frac{h_1 h_2}{\tau} = \\
& = - \left\{ (W_1 + \varepsilon Q_1)_{i+1, j+1/2}^n (y_{i+1, j+1}^n - y_{i+1, j}^n) - (W_1 + \varepsilon Q_1)_{i, j+1/2}^n (y_{i, j+1}^n - y_{i, j}^n) - \right. \\
& - (W_1 + \varepsilon Q_1)_{i+1/2, j+1}^n (y_{i+1, j+1}^n - y_{i, j+1}^n) + (W_1 + \varepsilon Q_1)_{i+1/2, j}^n (y_{i+1, j}^n - y_{i, j}^n) - \\
& - (W_2 + \varepsilon Q_2)_{i+1, j+1/2}^n (x_{i+1, j+1}^n - x_{i+1, j}^n) + (W_2 + \varepsilon Q_2)_{i, j+1/2}^n (x_{i, j+1}^n - x_{i, j}^n) + \\
& \left. + (W_2 + \varepsilon Q_2)_{i+1/2, j+1}^n (x_{i+1, j+1}^n - x_{i+1, j}^n) - (W_2 + \varepsilon Q_2)_{i+1/2, j}^n (x_{i+1, j}^n - x_{i, j}^n) \right\},
\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}
\Psi_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} &= \frac{\rho}{2h_1 h_2} \left\{ (x_{i+1, j}^{n+1} - x_{i, j+1}^{n+1})(y_{i+1, j+1}^{n+1} - y_{i, j}^{n+1}) - \right. \\
& \left. - (x_{i+1, j+1}^{n+1} - x_{i, j}^{n+1})(y_{i+1, j}^{n+1} - y_{i, j+1}^{n+1}) \right\}, \\
W_{1, i+1/2, j}^n &= - \frac{\lambda \rho}{\Psi_{i+1/2, j}^n h_1 h_2} \left\{ (y_{i+1/2, j+1/2}^n - y_{i+1/2, j-1/2}^n)(T_{i+1, j}^n - T_{i, j}^n) - \right. \\
& \left. - (y_{i+1, j}^n - y_{i, j}^n)(T_{i+1/2, j+1/2}^n - T_{i+1/2, j-1/2}^n) \right\}, \\
W_{1, i, j+1/2}^n &= - \frac{\lambda \rho}{\Psi_{i, j+1/2}^n h_1 h_2} \left\{ (y_{i, j+1}^n - y_{i, j}^n)(T_{i+1/2, j+1/2}^n - T_{i-1/2, j+1/2}^n) - \right.
\end{aligned}$$

$$- (y_{i-1/2, j+1/2}^n - y_{i-1/2, j-1/2}^n) (T_{i, j+1}^n - T_{i, j}^n) \},$$

$$W_{2, i+1/2, j}^n = - \frac{\lambda \rho}{\psi_{i+1/2, j}^n h_1 h_2} \left\{ - (x_{i+1/2, j+1/2}^n - x_{i+1/2, j-1/2}^n) (T_{i+1, j}^n - T_{i, j}^n) + \right. \\ \left. + (x_{i+1, j}^n - x_{i, j}^n) (T_{i+1/2, j+1/2}^n - T_{i+1/2, j-1/2}^n) \right\},$$

$$\frac{x_{i, j}^{n+1} - x_{i, j}^n}{\tau} = - \frac{Q_{1, i, j}^n}{\rho},$$

$$\frac{y_{i, j}^{n+1} - y_{i, j}^n}{\tau} = - \frac{Q_{2, i, j}^n}{\rho},$$

$$Q_{1, i, j}^n = -D\rho \left\{ \frac{1}{h_1^2} (x_{i+1, j}^n - 2x_{i, j}^n + x_{i-1, j}^n) + \right. \\ \left. + \frac{1}{h_2^2} (x_{i, j+1}^n - 2x_{i, j}^n + x_{i, j-1}^n) \right\},$$

$$Q_{2, i, j}^n = -D\rho \left\{ \frac{1}{h_1^2} (y_{i+1, j}^n - 2y_{i, j}^n + y_{i-1, j}^n) + \right. \\ \left. + \frac{1}{h_2^2} (y_{i, j+1}^n - 2y_{i, j}^n + y_{i, j-1}^n) \right\}.$$

Необходимое интерполирование в (9) выполняется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,j+1/2}^n &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{i+1/2,j+1/2}^n + \varepsilon_{i-1/2,j+1/2}^n), \\ \varepsilon_{i+1/2,j}^n &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{i+1/2,j+1/2}^n + \varepsilon_{i+1/2,j-1/2}^n), \\ (10) \quad Q_{i,j+1/2}^n &= \frac{1}{2} (Q_{i,j+1}^n + Q_{i,j}^n), \\ Q_{i+1/2,j}^n &= \frac{1}{2} (Q_{i+1/2,j}^n + Q_{i,j}^n), \\ x_{i+1/2,j+1/2}^n &= \frac{1}{4} (x_{i,j}^n + x_{i+1,j}^n + x_{i,j+1}^n + x_{i+1,j+1}^n), \\ y_{i+1/2,j+1/2}^n &= \frac{1}{4} (y_{i,j}^n + y_{i+1,j}^n + y_{i,j+1}^n + y_{i+1,j+1}^n). \end{aligned}$$

§ 5. Результаты моделирования.

Предлагаемый метод проверялся на задаче, допускающей автомодельное решение в случае одной пространственной переменной [12]. Аналогичное тестирование в случае двух измерений производилось на задаче, приведенной в [1].

В прямоугольной области $G: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0.5\}$ рассматривалась задача Стефана о промерзании с плоской границей раздела $\Gamma(t)$ (прямой линией) областей G_s , G_e . Оси координат выбираются так, чтобы граница раздела фаз $\Gamma(t)$, перемещаясь параллельно самой себе, не была параллельной ни одной из осей, рис.1. Задача описывается уравнением теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

В численных расчетах выбирались следующие значения теплофизических параметров: $\lambda = c = \rho = 1$, $L_m = 1$, $T_m = 0$. При повороте системы координат на угол φ задача сводится к одномерной задаче с пространственной координатой $Z = x \cos \varphi + y \sin \varphi$. Для этой задачи существует автомодельное решение:

$$T(z, t) = \begin{cases} -1 + \frac{\varphi\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}\right)}{\varphi(\beta)}, & 0 \leq z \leq z_r \\ 0 & z_r < z \leq 1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 \leq z \leq z_r \\ z_r < z \leq 1 \end{matrix}$$

где

$$\varphi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy, \quad z_r = 2\beta\sqrt{t}, \quad \beta = 0.6202.$$

Введем в области G расчетную сетку с общим числом узлов 15×6 . Плоскую границу $\Gamma(x, y, t_0)$ проведем под углом $\varphi = 30^\circ$. В качестве исходного выберем состояние, соответствующее автомодельному решению в момент $t_0 = 0.162$, рис. 2. При переходе к криволинейной системе координат ξ, η, t область G трансформируется в некоторую прямоугольную область Ω , в которой исходная расчетная сетка становится равномерной по обоим измерениям с тем же самым общим числом узлов и шагами $h_1 = h_2 = 5 \cdot 10^{-2}$. Плоская граница $\Gamma(\xi, \eta, t)$ совпадает с координатной линией $\xi = \xi_{N_0}$, $N_0 = 11$ и положение ее остается неизменным с течением времени, как и величины шагов h_1 и h_2 , рис. 3.

В расчетах использовалась явная консервативная конечно-разностная схема (9). Шаг интегрирования по времени ограничивался требованием устойчивости явной схемы. На рис. 4, 5 представлены положение фазового фронта и вид расчетной сетки в физическом пространстве на различные моменты времени. На рис. 6 приведены результаты сравнения автомодельного решения (сплошные линии) с численными значениями функции T (отмечены звездочками). Решение сравнивалось вдоль оси x в сечении с $j = 3$, где j - номер строки, для трех моментов времени. Сравнение показало, что абсолютная погрешность ΔT не превышает величины 10^{-3} , что является вполне приемлемым для практического использования. В таблице I приведены значения величины $\Delta \ell$, характеризующие отклонение границы раздела фаз от плоской, где $\Delta \ell = \ell_p - \ell_r$, ℓ_r - точное значение координаты z_r , соответствующей границе раздела фаз, ℓ_p - расчетное значение этой координаты. Приведенные результаты свидетельствуют также о высокой точности определения положения границы раздела фаз.

Нам представлялось интересным проверить экспериментально возможности метода в следующих ситуациях:

- области заданных фазовых состояний с течением времени изменяются в несколько раз;

б) исходные расчетные сетки в физическом пространстве существенно отличаются от ортогональных.

С этой целью решалась следующая модельная задача. В прямоугольной области $G: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0.5\}$ в начальный момент времени $t=0$ задавалась подобласть G_s с $T=-1$ в виде уголка вдоль линий $x=0$ и $y=0.5$ с толщиной $1.25 \cdot 10^{-2}$, одинаковой по обоим направлениям. Остальную часть плоскости занимала область G_e с $T=0$, рис.7. С течением времени фазовый фронт ($T_m=0$) распространялся к точке $x=1, y=0$ из подобласти G_e в подобласть G_s .

Как и при решении первой задачи для экспериментирования выбиралась довольно грубая сетка с общим числом узлов для области G 10×10 . Для подобластей G_s и G_e предназначалось 10×6 и 10×5 узлов соответственно, рис.7. Пространственные шаги в подобластях G_s и G_e в начальный момент времени отличались более чем в 20 раз. Сетка в физическом пространстве определялась пересечением радиальных лучей, выходящих из правого нижнего угла, представляемого в виде дуги АЕ, длина которой $\ell \ll h_1, h_2$, и линий, параллельных координатным осям, рис.7. В криволинейных координатах с помощью преобразования

$$\xi = \xi(x, y, t), \quad \eta = \eta(x, y, t), \quad \tau = t$$

расчетная сетка отображалась в прямоугольную, а положение фазовой границы Γ совпадало при этом с координатной линией $\eta = \eta_{M_0}$, $M_0 = 5$, рис.8.

Опишем подробнее выбор значений величин Q_1 и Q_2 на внешних границах и на линии фазового фронта. На линиях ВС и ДЕ ($x=0$, $x=1$) полагалось $Q_2=0$; соответственно, на линиях СД и ВА ($y=0$, $y=0.5$) полагалось $Q_1=0$. Значения нормальной компоненты потока массы на линии фазового фронта ($\eta = \eta_{M_0}$) в серединах ребер ячеек, как уже указывалось выше, определяется из условия Стефана:

$$(\vec{Q}_{i+1/2, M_0})_n = L_m^{-1} [(\vec{W}_{s_{i+1/2, M_0}})_n - (\vec{W}_{e_{i+1/2, M_0}})_n], \quad i=1, \dots, 9,$$

где через $()_n$ обозначена нормальная компонента соответствующего вектора по отношению к линии фазового фронта. Обозначим через $\vec{n} = (n^1, n^2)$ единичный вектор нормали, а через $\vec{n}_\tau = (n^1_\tau, n^2_\tau)$ единичный вектор в тангенциальном направлении к ли-

нии фазового фронта, $\vec{n} \perp \vec{n}_\tau$. Тогда

$$(I2) \quad \vec{n}_\tau = \frac{(dx, dy)}{|(dx, dy)|}, \quad \vec{n} = (n_\tau^2, -n_\tau^1),$$

где

$$dx = x_{i+1, M_0}^n - x_{i, M_0}^n, \quad dy = y_{i+1, M_0}^n - y_{i, M_0}^n.$$

Для нормальных компонент потоков тепла в (II) имеем выражения:

$$(I3) \quad (\vec{W}_{S, \ell_{i+1/2, M_0}}^n)_n = (\vec{W}_{S, \ell_{i+1/2, M_0}}^n, \vec{n}).$$

Значения нормальной компоненты потока массы (II) интерполировались в целые узлы на линии фазового фронта по формуле

$$(I4) \quad (\vec{Q}_{i, M_0}^n)_n = \frac{1}{2} [(\vec{Q}_{i-1/2, M_0}^n)_n + (\vec{Q}_{i+1/2, M_0}^n)_n], \quad i=2, \dots, 9.$$

Для более равномерного распределения узлов на линии фазового фронта определялся и тангенциальный поток массы $(\vec{Q}_{i, M_0}^n)_\tau$. Пусть S - расстояние вдоль $\Gamma(t)$. Тогда для потока массы вдоль направления \vec{n}_τ можно записать следующее выражение:

$$(I5) \quad Q_\tau = -D \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2},$$

и тогда

$$\vec{Q}_\tau = Q_\tau \cdot \vec{n}_\tau.$$

Окончательно получаем следующее выражение для $\vec{Q} = (Q_1, Q_2)$ в узлах на линии фазового фронта

$$(I6) \quad \vec{Q}_{i, M_0}^n = (\vec{Q}_{i, M_0}^n)_n \cdot \vec{n} + (\vec{Q}_{i, M_0}^n)_\tau \cdot \vec{n}_\tau, \quad i=2, \dots, 9.$$

Особого рассмотрения требуют граничные точки линии фазового фронта при $i=1$ и $i=N$, $N=10$. Как показали численные эксперименты, экстраполяция в данном случае неудовлетворительна. Поэтому для нахождения значений Q_{1, M_0} и Q_{2, M_0} использовался закон сохранения массы. Например, для определения Q_{1, M_0} он имеет вид:

$$(I7) \quad \Delta t [Q_{1, 3/2, M_0}^n (y_{3/2, M_0}^n - y_{1, M_0}^n) - Q_{2, 3/2, M_0}^n (x_{3/2, M_0}^n - x_{1, M_0}^n)] =$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ (x_{1, M_0}^{n+1} - x_{3/2, M_0}^n) (y_{3/2, M_0}^n - y_{1, M_0}^n) - \right. \\ \left. - (x_{3/2, M_0}^{n+1} - x_{1, M_0}^n) (y_{1, M_0}^{n+1} - y_{3/2, M_0}^n) \right\}.$$

Отсюда получаем

$$(18) \quad Q_{1, M_0}^n = \frac{Q_{13/2, M_0}^n (y_{3/2, M_0}^n - y_{1, M_0}^n) - Q_{23/2, M_0}^n (x_{3/2, M_0}^n - x_{1, M_0}^n)}{y_{3/2, M_0}^n - y_{1, M_0}^n - \Delta t Q_{23/2, M_0}^n}.$$

Напомним, что $Q_{21, M_0}^n = 0$. Здесь $x_{3/2, M_0}^n = \frac{1}{2}(x_{2, M_0}^n + x_{1, M_0}^n)$, $y_{3/2, M_0}^n = \frac{1}{2}(y_{2, M_0}^n + y_{1, M_0}^n)$. Аналогично получаем

$$(19) \quad Q_{1N, M_0}^n = \frac{Q_{1N-1/2, M_0}^n (y_{N, M_0}^n - y_{N-1/2, M_0}^n) - Q_{2N-1/2, M_0}^n (x_{N, M_0}^n - x_{N-1/2, M_0}^n)}{x_{N-1/2, M_0}^n - \Delta t Q_{1N-1/2, M_0}^n - x_{N, M_0}^n},$$

$$Q_{1N, M_0}^n = 0.$$

Кроме того, особого рассмотрения требует и точка $i = N_0$, $N_0 = 6$, т.е. в начальный момент времени в ней терпит излом линия фазового фронта. Записывая два закона сохранения типа (17), получаем два линейных алгебраических уравнения для определения величин

Q_{1N_0, M_0}^n и Q_{2N_0, M_0}^n :

$$(20) \quad Q_{1N_0, M_0}^n (y_{N_0, M_0}^n - y_{N_0-1/2, M_0}^n + \Delta t Q_{2N_0-1/2, M_0}^n) - \\ - Q_{2N_0, M_0}^n (x_{N_0, M_0}^n - x_{N_0-1/2, M_0}^n + \Delta t Q_{1N_0-1/2, M_0}^n) = \\ = Q_{1N_0, M_0-1/2}^n (y_{N_0, M_0}^n - y_{N_0-1/2, M_0}^n) - Q_{2N_0, M_0-1/2}^n (x_{N_0, M_0}^n - x_{N_0-1/2, M_0}^n), \\ Q_{1N_0, M_0}^n (y_{N_0+1/2, M_0}^n - y_{N_0, M_0}^n - \Delta t Q_{2N_0+1/2, M_0}^n) - \\ - Q_{2N_0, M_0, M_0}^n (x_{N_0+1/2, M_0}^n - x_{N_0, M_0}^n - \Delta t Q_{1N_0+1/2, M_0}^n) = \\ = Q_{1N_0+1/2, M_0}^n (y_{N_0+1/2, M_0}^n - y_{N_0, M_0}^n) - Q_{2N_0+1/2, M_0}^n (x_{N_0+1/2, M_0}^n - x_{N_0, M_0}^n).$$

И, наконец, отметим, что узлы при $i=N_0$, $j=2,3,4$ и $j=6,7,8,9$ движутся таким образом, чтобы оставаться на линиях GF и CG в физическом пространстве.

На рис.9-14 представлены вид расчетных сеток, положение фазового фронта и ~~расположение изоэнт~~ в различные моменты времени. Расчеты показали, что к моменту времени $t=0.122$ почти вся область G_S перешла в G_e , рис.14. Использование при этом столь "экзотической" сетки с малым числом узлов и сильно изменяющимися пространственными шагами в каждой из подобластей никаких затруднений при расчетах не вызывает.

Заключение

Выполненная работа позволила установить, что предлагаемый метод решения двумерных нестационарных задач Стефана с явным выделением фронта обладает следующими достоинствами:

1. Посредством перехода от декартовой системы координат к более универсальной криволинейной удается избавиться от основной трудности математического исследования задач Стефана - подвижной границы.
2. Предложенный механизм адаптации позволяет автоматически перестраивать расчетную сетку в физическом пространстве, в том числе и при многократных увеличениях или уменьшениях размеров фазовых областей.
3. Необходимая точность решения достигается в первую очередь распределением узлов сетки, а не увеличением их количества.
4. Процесс конструирования расчетных сеток отличается большой свободой выбора.
5. Метод обладает достаточными для практического использования точностью и эффективностью.

Вместе с тем, отметим, что за рамками рассмотрения остались важные вопросы, связанные с применением неявных конечно-разностных схем, неизбежно приводящих к необходимости решения системы нелинейных эллиптических уравнений. Использование явной разностной схемы для расчетов в данной работе определялось исключительно ее простотой.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность А.А.Самарскому за постоянное внимание к работе и плодотворные дискуссии.

Литература

1. Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана. *ЖВМиМФ*, 1965, т.5, № 5, с.816-827.
2. Мажукин В.И., Повещенко Ю.А., Попов С.Е., Попов Ю.П. Об однородных алгоритмах численного решения задачи Стефана. *Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР*, 1985, № 122, 23 с.
3. Meyer G.H. Multidimensional Stefan Problems.- *SIAM J.Numer. Anal.*, 1973, v.10, No.3, pp.522-538.
4. Димов И., Рашев Ц., Манолов Б., Черногорова Т., Димова Ст. Численное решение задачи о кристаллизации трехмерных слитков. Численные методы и приложения. Труды Международной конференции по численным методам и приложениям. 1985, София, с.250-257.
5. Современная кристаллография. Том 3. Образование кристаллов. Под редакцией Б.К.Вайнштейна. - М.: Наука, 1980, 408 с.
6. Williamson S., Mourou G., Li J.C.M. Time-Resolved, Laser-Induced Phase Transformation in Aluminium. *Phys.Rev.Lett.*, 1984, v.52, No.26, pp.2364-2367.
7. Карпов С.Ю., Ковальчук Ю.В., Погорельский Ю.В. Плавление полупроводников под действием импульсного лазерного излучения. Обзор. *Физика и техника полупроводников*. 1986, т.20, в.II, с.1345-1369.
8. Авдонин Н.А. Математическое описание процессов кристаллизации. - Рига, Зинатне, 1980, 178 с.
9. Успенский А.Б. О методе выпрямления фронтов для многофронтной задачи Стефана. *ДАН СССР*, 1967, т.172, № 1, с.61-64.
10. Бакирова О.И. О некоторых методах решения задачи Стефана. *Дифференциальные уравнения*, 1983, т.19, № 3, с.491-500.
11. Davis M., Kapadia P., Dowden J. Solution of a Stefan Problem in the Theory of Laser Welding by the Method of Lines. *J.Comput.Physics*, 1985, v.60, pp.534-548.
12. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Математическое моделирование задачи Стефана на адаптивной сетке. *Дифференциальные уравнения*, 1987, т.23, № 7.
13. Thompson J.F. Grid Generation Techniques in Computational Fluid Dynamics. *AIAA J.*, 1984, v.22, No.11, pp.1505-1523.
14. Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin G.W. Boundary Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differ-

ential Equations - A Review. J.Comput.Physics, 1982, v.47,
pp.1-108.

15. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977,
с.656.

Таблица I

номер строки	расчетные значения l_p					
	$t = 0.2623$		$t = 0.3375$		$t = 0.4123$	
	$l_r = 0.6357, \Delta l$		$l_r = 0.7209, \Delta l$		$l_r = 0.7970, \Delta l$	
1	0.6370	$1.3 \cdot 10^{-3}$	0.7224	$1.6 \cdot 10^{-3}$	0.7986	$1.6 \cdot 10^{-3}$
2	0.6365	$8 \cdot 10^{-4}$	0.7220	$1.1 \cdot 10^{-3}$	0.7983	$1.3 \cdot 10^{-3}$
3	0.6353	$-4 \cdot 10^{-4}$	0.7213	$4 \cdot 10^{-4}$	0.7978	$8 \cdot 10^{-4}$
4	0.6345	$-1.2 \cdot 10^{-4}$	0.7205	$-4 \cdot 10^{-4}$	0.7972	$2 \cdot 10^{-4}$
5	0.6349	$-8 \cdot 10^{-4}$	0.7207	$-2 \cdot 10^{-4}$	0.7981	$1.1 \cdot 10^{-3}$
6	0.6360	$3 \cdot 10^{-4}$	0.7217	$8 \cdot 10^{-4}$	0.7980	$1 \cdot 10^{-3}$

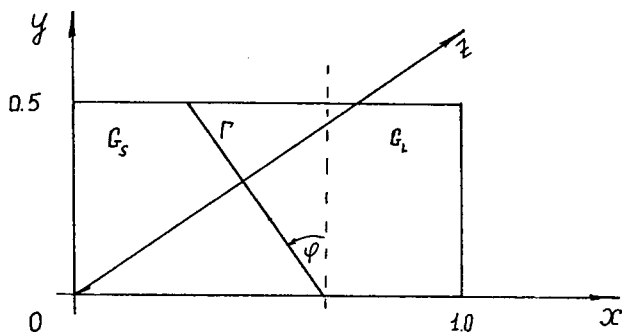


Рис. I

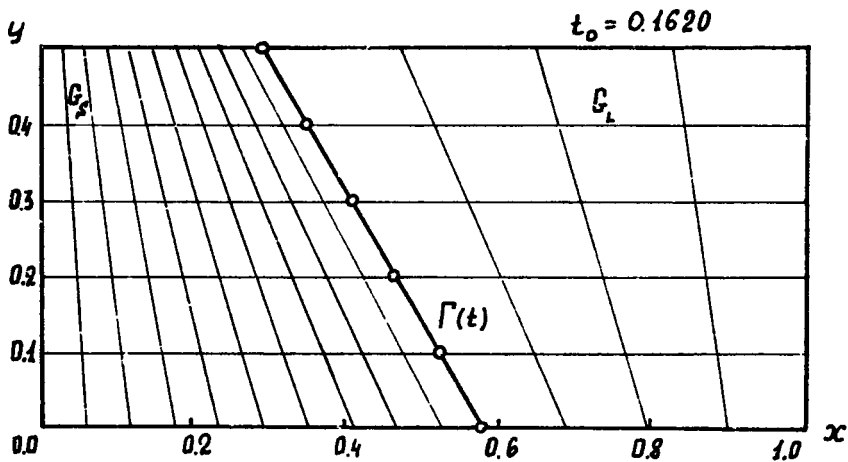


Рис. 2.

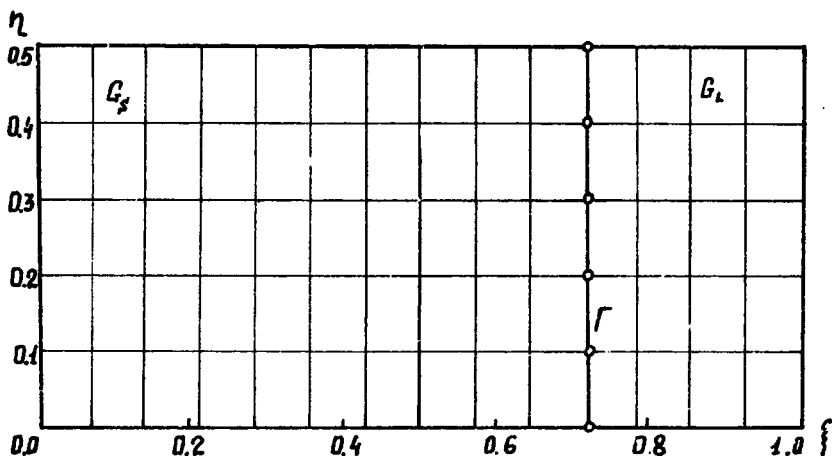


Рис. 3.

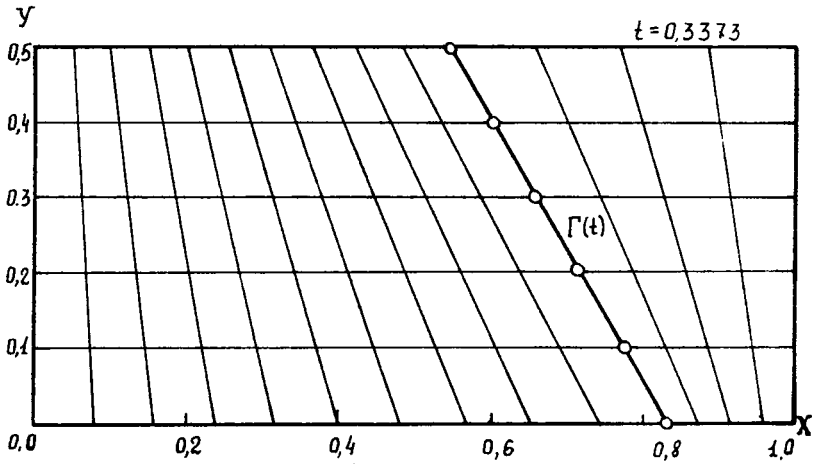


Рис. 4.

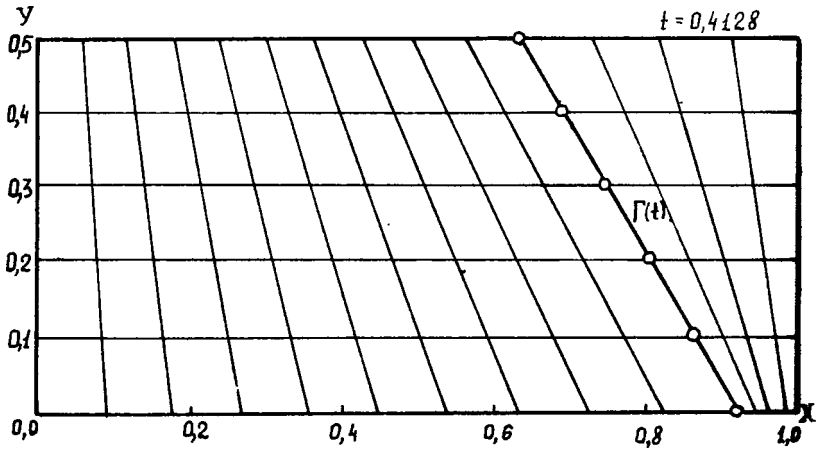


Рис. 5.

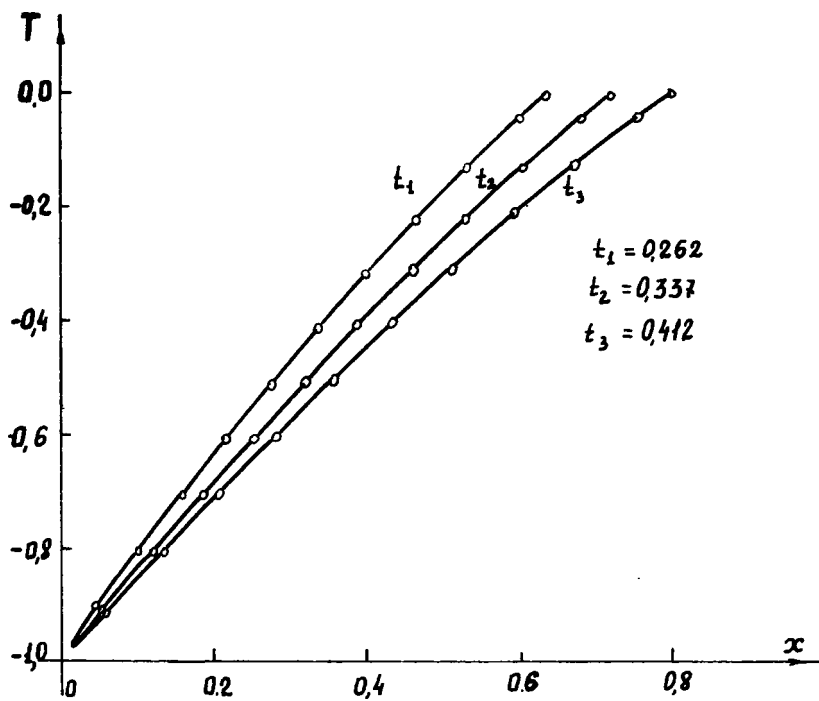


Рис. 6

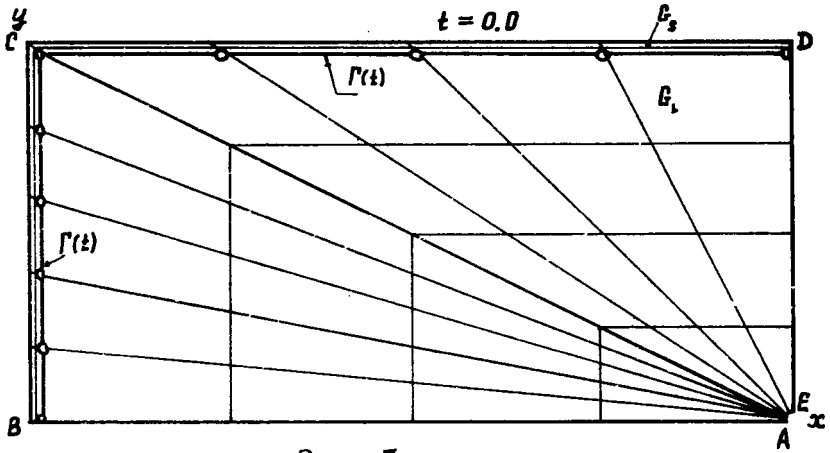


Рис. 7.

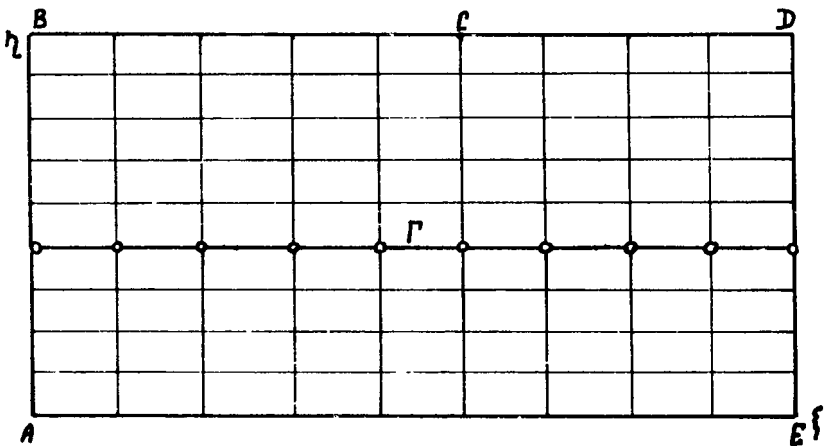
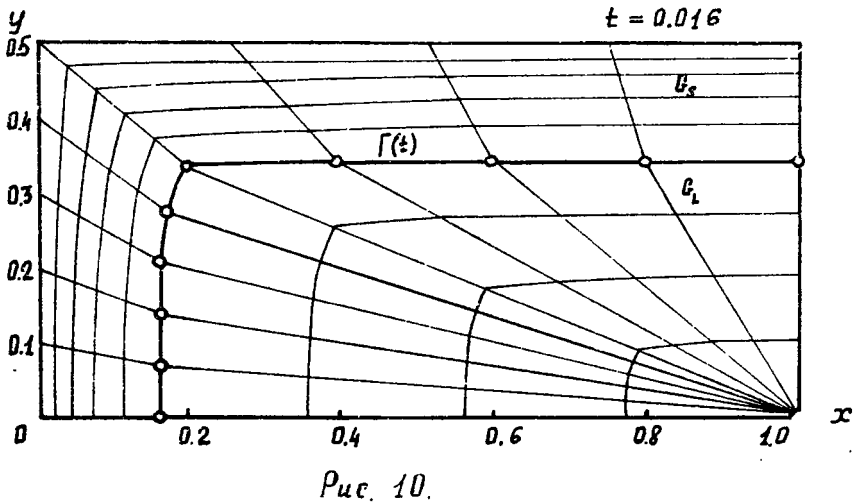
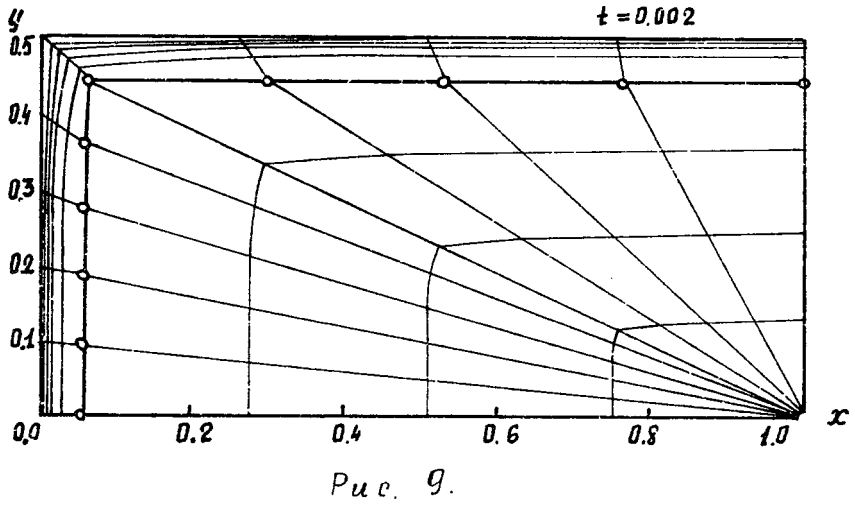
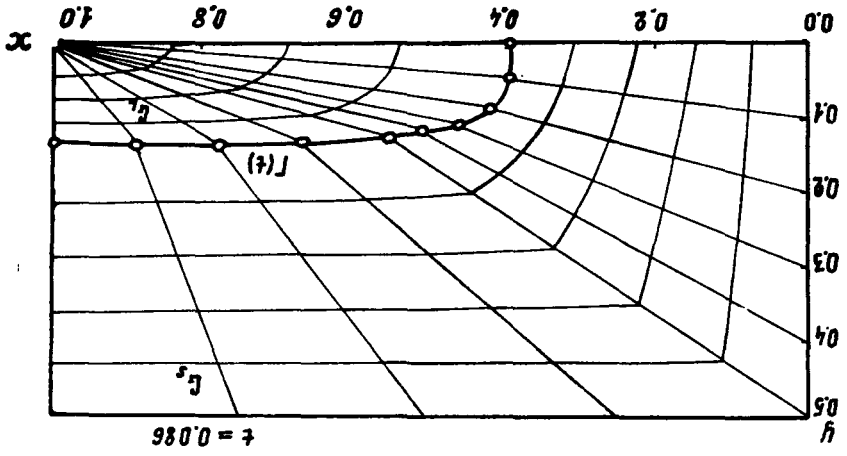


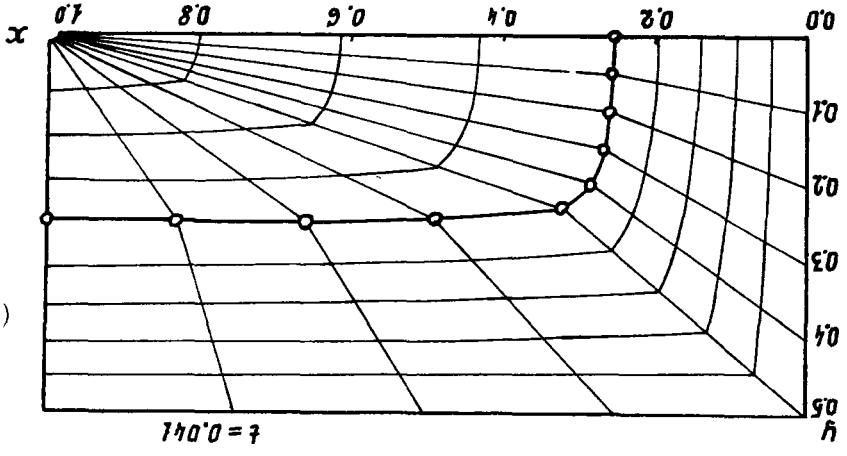
Рис. 8.



Puc. 12.



Puc. 11.



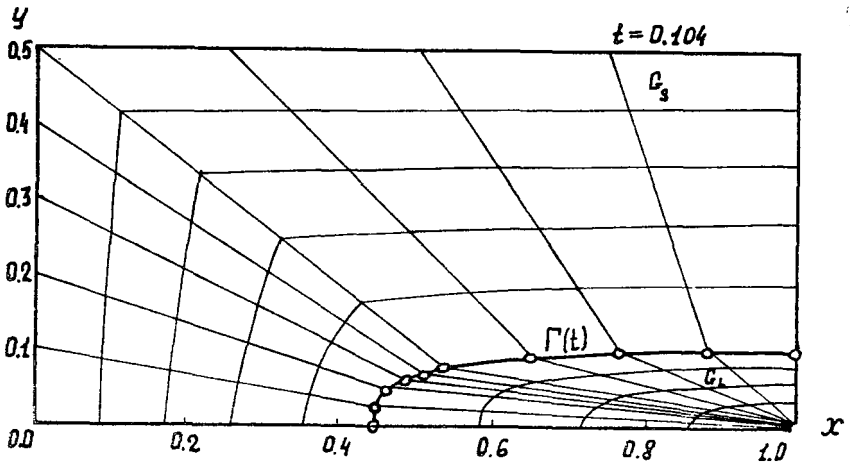


Рис. 13

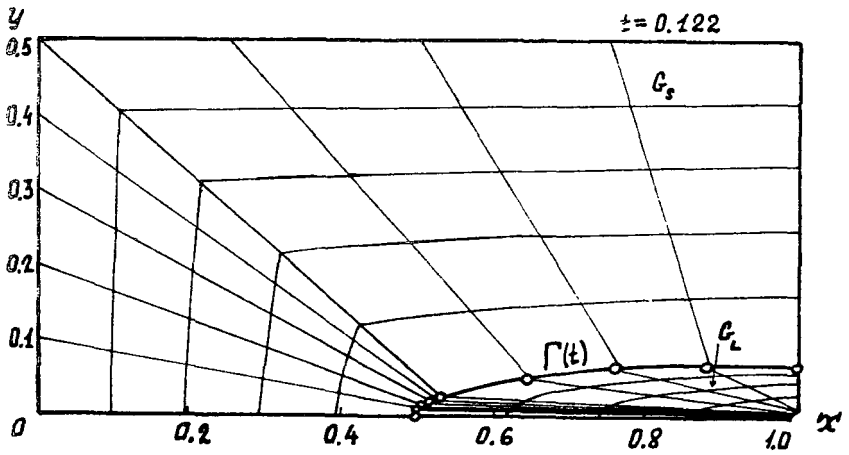


Рис. 14.