



Ордена Лени(а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Академии наук СССР

Н.А. Дарьин , В.И. Мажукин

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ С Т Е Ф А Н А
НА АДАПТИВНОЙ СЕТКЕ

Препринт № 51 за 1987 г.

Москва

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ.М.В.КЕЛДЫША АКАДЕМИИ НАУК СССР

Н.А.Дарьин, В.И.Мажукин

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ СТЕФАНА НА
АДАПТИВНОЙ СЕТКЕ

Москва, 1987 г.

АННОТАЦИЯ

Предлагается новый подход к численному решению двухфазной задачи Стефана. В основу метода положена идея построения и использования адаптивной сетки. В предлагаемом подходе осуществляется автоматическое выделение фронта и перестройка расчетной сетки. Возможности метода демонстрируются на примере задачи импульсного нагрева и плавления металла.

Введение.

Исследование динамики фазовых переходов I рода в ряде случаев представляет собой весьма сложную задачу. Переход из одного фазового состояния в другое в общем случае является неравновесным процессом, требующим для своего описания явного учета кинетики фазового превращения. Наиболее заметно эта специфика фазовых превращений проявляется при импульсном воздействии концентрированных потоков энергии на конденсированную фазу. Исследование процессов термического воздействия лазерных импульсов нано- и пикосекундной длительности на металлы [1] и полупроводники [2], связанные в частности с проблемой получения аморфных материалов, показало, что динамика фазового перехода обязательно сопровождается появлением метастабильной фазы, т.е. явлениями перегрева твердой фазы и переохлаждением жидкой. В подобных процессах, как отмечалось в [3], фактор неравновесности играет определяющую роль.

Впервые задача о изменении фазового состояния была сформулирована еще в прошлом веке [4]. С тех пор появилось целое семейство математических моделей в тех или иных приближениях, описывающих проблему фазовых превращений [4-7]. Наиболее распространенным приближением является так называемый классический вариант задачи Стефана, в котором процессы описываются уравнением теплопроводности вместо полной системы уравнений гидродинамики.

Другим существенным упрощением в задачах Стефана является предположение постоянства температуры фазового перехода. Тем самым из рассмотрения исключается кинетика фазового перехода и связанные с ней возможности перегрева или переохлаждения исходного состояния вещества.

Помимо проблем лазерного воздействия существует еще ряд задач, в которых кинетика перехода играет существенную роль [8, 9]. В этих случаях в математической модели на границе раздела фаз вместо постоянства температуры должно выписываться кинетическое условие [10], в явном виде учитывающее неравновесность фазового перехода.

Выбор математической модели и алгоритма численного решения задач Стефана определяется типом задачи, целью исследования, стоимостью вычислений и требуемой степенью точности решения. Решение классического варианта задачи Стефана состоит в определении тепловых полей и границы фазового перехода. В переменных Эйлера

положение границы раздела фаз $\Gamma(t)$, а тем самым и область определения решения $\Omega_x(t)$ неизвестны и подлежат определению в ходе решения задачи. С этим обстоятельством связаны основные трудности математического моделирования задачи Стефана.

Существующие в настоящее время методы численного решения задач типа Стефана можно условно разбить на два класса: с явным выделением фронта и сквозного счета. Численные алгоритмы, основанные на явном выделении фронта, см. напр. [11-13], обладают высокой точностью определения межфазной границы, но, как правило, весьма громоздки и для получения решения требуют больших затрат машинного времени. По этим причинам они зачастую неприменимы для многомерных и многофазных задач.

Для математического моделирования определенного класса задач с фазовыми превращениями, в которых точное положение границы раздела фаз и кинетика перехода не играют существенной роли, эффективными оказались методы, основанные на принципиально ином подходе [14]. Идея метода состоит в отказе от непосредственного поиска неизвестной фазовой границы и замене его процедурой сглаживания функции теплосодержания. Введение процедуры сглаживания позволяет получать обобщенное решение задачи Стефана с помощью экономичного алгоритма сквозного счета [15, 16], эффективность которого особенно заметна в многомерных постановках. Однако эти методы весьма чувствительны к выбору параметра сглаживания [17], определить значение которого априори в ряде случаев затруднительно. К тому же методы сквозного счета обладают сравнительно низкой точностью определения положения фазового фронта, что бывает важным в ряде приложений. Кроме того, введение процедуры сглаживания полностью исключает кинетику фазовых превращений в неклассических постановках проблемы Стефана. Реализация принципа однородной записи в этих случаях может быть вообще неосуществима. В связи с этим весьма актуальной представляется проблема разработки экономичных и более совершенных алгоритмов численного решения задачи с явным выделением фазовой границы. Несомненный интерес могут представлять методы решения задачи Стефана на адаптивных сетках, динамически связанных с решением.

Целью настоящей работы является изложение одного из возможных подходов к математическому моделированию двухфазной классической задачи Стефана на адаптивной сетке. В основу метода положена идея описания движения узлов сетки на дифференциальном уровне с помощью уравнения в частных производных. Координаты узлов

при этом являются дополнительными неизвестными и должны определяться, наряду с искомыми значениями сеточных функций, из численного решения единой дифференциальной задачи. Построение дифференциальной задачи осуществляется посредством выбора некоторой неподвижной системы координат, эйлеровы образы которой могут изменяться во времени под влиянием одной (или обеих) особенностей решения: больших градиентов или перемещения границ расчетной области.

Предполагается, что предлагаемый метод решения в дальнейшем будет обобщен на случаи неклассических постановок задачи Стефана

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим предлагаемый метод решения на примере нестационарной одномерной задачи Стефана в классической постановке. Математическая формулировка задачи сводится к нелинейному уравнению теплопроводности в двух подобластях $\Omega_s(t)$ и $\Omega_l(t)$ области Ω_x , разделенных заранее неизвестной межфазной границей $\Gamma(t)$

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} = -\frac{\partial W_i}{\partial x} + q, \quad \varepsilon_i = (c_p T)_i, \quad W_i = -\lambda(T_i) \frac{\partial T_i}{\partial x}, \quad i = s, l, \quad (1)$$

$$x_c < x < x_R.$$

На межфазной границе $\Gamma(t)$ выполняется дифференциальное условие Стефана

$$W_l - W_s = L_m \int_s v \quad (2)$$

В классическом варианте задачи Стефана, кроме условия (2) на границе $\Gamma(t)$ предполагается также постоянство температуры перехода

$$T_l = T_s = T_m. \quad (3)$$

Вид граничных условий на концах отрезка $[x_c, x_R]$ может быть любым.

Принятые обозначения: s, l - индексы, означающие принадлежность величин к твердой и жидкой фазам соответственно, ρ - плотность вещества, c_p, λ - коэффициенты теплоемкости и теплопроводности, T_m, L_m - температура и удельная теплота фазового перехода, v - скорость движения границы раздела, q - объемный источник.

В предлагаемом подходе проблема Стефана рассматривается как

движение сплошной среды с сильным разрывом (разрыв I рода), на котором скачком меняются внутренняя энергия, плотность и теплофизические характеристики вещества. Для нахождения численного решения предлагается перейти к таким переменным, в которых положение фазового перехода было бы заранее известно и неизменно во времени и тем самым область решения также оказалась бы известной. Условие Стефана на фазовой границе используется для определения потока массы через границу раздела. Относительное изменение количества массы в каждой из подобластей описывается дифференциальным уравнением в частных производных. После конечно-разностной аппроксимации исходной задачи это уравнение используется для построения адаптивной сетки, динамически связанной с границей раздела фаз $\Gamma(t)$.

Введем некоторое расчетное пространство $\Omega_{q,t}$:

$q_0 \leq q \leq q_R, t > 0$ и предположим, что на каждый момент времени существует невырожденное преобразование

$$x = x(q, t), x_0 = x(q_0, t), x_R = x(q_R, t), x_\Gamma = x(q_\Gamma, t).$$

Пусть якобианом такого преобразования является некоторая функция $\Psi(q, t)/\rho$, ставящая в соответствие элементу dx элемент dq . Пространственная переменная $q_0 < q < q_R$ выбирается такой, что каждому элементу течения dq соответствует масса $\Psi(q, t)dq$, зависящая от времени вследствие обмена массой между соседними элементами. Введем функцию $Q(q, t)$, характеризующую плотность потока массы между элементами течения и запишем задачу Стефана в переменных q, t . Для этого выпишем в интегральной форме законы сохранения энергии и массы для элементарного объема Δq :

$$\int_{q}^{q+\Delta q} [\varepsilon(q, t+\Delta t)\Psi(q, t+\Delta t) - \varepsilon(q, t)\Psi(q, t)] dq = \int_t^{t+\Delta t} \{ [W(q, t) - W(q+\Delta q, t)] + [\varepsilon(q, t)Q(q, t) - \varepsilon(q+\Delta q, t)Q(q+\Delta q, t)] \} dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_q^{q+\Delta q} \frac{\Psi}{\rho} g \Delta q \Delta t,$$

$$\int_q^{q+\Delta q} [\Psi(q, t+\Delta t) - \Psi(q, t)] dq = \int_t^{t+\Delta t} [Q(q, t) - Q(q+\Delta q, t)] dt.$$

Предполагая дифференцируемость подынтегральных функций и переходя к пределу при $\Delta t, \Delta q \rightarrow 0$, получим эти законы в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}(\chi \varepsilon) = -\frac{\partial W}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q}(\varepsilon Q) + \frac{\chi}{\rho} \rho, \quad W = -\lambda(T) \frac{\rho}{\chi} \frac{\partial T}{\partial q}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial q} \quad (5)$$

Полученная система уравнений (4.5) дополняется уравнением связи между переменными x и q

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\chi}{\rho}. \quad (6)$$

Условия на границе раздела фаз в переменных q, t записывается достаточно просто. В силу предположения о том, что положение межфазной границы $\Gamma(t)$ в этих переменных соответствует постоянному значению $q = q_r$, для уравнения теплопроводности (4) достаточно одного условия (3)

$$T(q_r, t) = T_m.$$

Для уравнения (5) задается поток массы, определяемый из условия Стефана (7)

$$Q(q_r, t) = L_m^{-1} (W_s - W_l). \quad (7)$$

Значение и знак потока $Q(q_r, t)$ однозначно определяют в переменных x, t скорость и направление движения фазовой границы

$$v = \frac{dx_r}{dt} = -\frac{Q(q_r, t)}{\rho_s}.$$

Функция $Q(q, t)$, $q_0 < q < q_r$ в общем случае может быть произвольной. Произвольность ее конструкции можно использовать в различных целях, определяемых особенностями рассматриваемых задач. В сложных системах вид функции $Q(q, t)$, по-видимому, должен определяться доминирующим процессом. В задаче Стефана в простейшем, например для более равномерного распределения узлов, случае ее можно задавать в виде диффузионного потока $Q = -D \frac{\partial \chi}{\partial q}$, где D — произвольная константа, подбираемая в процессе расчетов. В более общем случае величину D можно представить в виде функции, выражаемой через теплофизические характеристики среды.

Если через внешние границы области потоки вещества отсутствуют, то точки x_0, x_R неподвижны и граничные условия имеют вид:

$$Q(q_0, t) = Q(q_R, t) = 0.$$

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Система уравнений (4)-(6) с соответствующими граничными условиями решается в области $\Omega_{q,t} : q_0 \leq q \leq q_R, t > 0$. Для каждой из подобластей Ω_S, Ω_L вводится расчетная сетка

$$\omega_p = \{(q_i, t^j), (q_{i+1/2}, t^j), q_{i+1} = q_i + h_i, q_{i+1/2} = q_i + 0.5 h_i, i = 0, 1, \dots, N_p - 1, t^{j+1} = t^j + \tau, j = 0, 1, \dots\}, p = S, L.$$

К узлам сетки (q_i, t^j) будем относить сеточные функции эйлеровой переменной x_i^j и потоков W_i^j, Q_i^j , к полуузлам $(q_{i+1/2}, t^j)$; $\varepsilon_{i+1/2}^j$, $T_{i+1/2}^j$, $\psi_{i+1/2}^j$, $\beta_{i+1/2}^j$, $g_{i+1/2}^j$. Для аппроксимации уравнений (4-6), согласно [18], можно использовать семейство разностных схем:

$$\frac{(\Psi\varepsilon)_{i+1/2}^{j+1} - (\Psi\varepsilon)_{i+1/2}^j}{\tau} = - \frac{W_{i+1}^{(\sigma)} - W_i^{(\sigma)}}{h_i} - \frac{(\varepsilon Q)_{i+1}^{(\sigma)} - (\varepsilon Q)_i^{(\sigma)}}{h_i} + \left(\frac{\psi g}{\beta}\right)_{i+1/2}^{(\sigma)} \quad (8)$$

$$\frac{\psi_{i+1/2}^{j+1} - \psi_{i+1/2}^j}{\tau} = - \frac{Q_{i+1}^{(\sigma)} - Q_i^{(\sigma)}}{h_i}, \quad (9)$$

$$\frac{x_{i+1}^{j+1} - x_i^{j+1}}{h_i} = \left(\frac{\psi}{\beta}\right)_{i+1/2}^{j+1}, \quad \sigma = 0; 0.5; 1, \quad (10)$$

$$Q_i = -D \frac{\psi_{i+1/2}^j - \psi_{i-1/2}^j}{0.5(h_i + h_{i-1})}, \quad W_i = - \frac{\lambda_i \beta_i}{\psi_i} \frac{T_{i+1/2}^j - T_{i-1/2}^j}{0.5(h_i + h_{i-1})}$$

$$\lambda_i = \lambda(T_i), \quad \beta_i = \beta(T_i),$$

$$g_i = \frac{g_{i+1/2} h_{i-1} + g_{i-1/2} h_{i+1}}{h_i + h_{i-1}}.$$

На межфазной границе записываются следующие разностные соотно-

шения

$$T_r^{j+1} = T_m, \quad W_{r_s}^{j+1} - W_{r_e}^{j+1} = L_m Q_{se}^{j+1} \quad (\text{II})$$

В расчетах использовались схемы с $\zeta = 0,5$ и I, приводящие к необходимости решения двух трехточечных нелинейных уравнений в каждой из подобластей Ω_s, Ω_e . Для решения этой системы использовалась встречная матричная прогонка [19] с итерациями по нелинейности. Сшивка встречных прогонок осуществлялась в точке q_r с использованием условий (I0). В начальный момент времени $t = 0$ сетки в расчетном и физическом пространствах практически совпадают, так как начальное значение $\psi = 1, \beta = \text{const}$. В дальнейшем сетка в расчетном пространстве остается неизменной, а в физическом она перестраивается с помощью уравнений (9)–(I0), под влиянием (II). Величина $\psi_{it+1/2}^d$ при этом показывает, во сколько раз изменилась масса каждого элемента или, что тоже самое (для выбранных переменных), во сколько раз изменился шаг пространственной сетки по сравнению с начальным.

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ.

В качестве теста для рассматриваемой методики была использована модельная задача о промерзании [20], допускающая, в частности, автомоделное решение

$$T(x, t) = \begin{cases} -1 + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) / \Phi(\beta), & 0 \leq x \leq x_r \\ 0, & x_r < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy, \quad x_r = 2\beta\sqrt{t}, \quad \beta = 0.6202.$$

Решение получено для постоянных теплофизических величин $C_p = 1, \lambda = 1, \beta = 1$, и следующих краевых условий $T(x, 0) = 0, T(0, t) = -1, T(1, t) = 0$.

При численной реализации рассматриваемой задачи для системы (8)–(I0) объем твердой фазы задавался равным $2,3 \cdot 10^{-3}$. Начальные сетки в обеих подобластях задавались равномерными и состояли из 20 интервалов каждая. Таким образом первоначальный шаг по пространственной переменной в области, занимаемой одной фазой, отличался на несколько порядков от шага в другой. Постоян-

ная D задавалась равной 10 . На рис. I представлены профили температуры на различные моменты времени. Крестиками отмечены значения численного решения. Видно, что они практически не отличаются от точного. Максимальная относительная ошибка в определении температуры не превышала $0,5\%$. Относительная ошибка в определении скорости оказалась не более $0,05\%$. В качестве другого примера рассматривалась задача об импульсном нагреве металлической пластины толщиной 100 мкм. Поверхность металла подвергалась тепловому воздействию источника с гауссовским распределением интенсивности

$$G = G_0 \exp\left(-\left(\frac{x}{\tau}\right)^2\right), \quad \text{где } G_0 = 2 \cdot 10^7 \text{ вт/см}^2,$$

$\tau = 2,5 \cdot 10^{-8}$ с. Задача Стефана (1)-(3) дополнялась граничными условиями

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_R} = -G, \quad T(x_0, t) = T_0.$$

В расчетах использовались теплофизические характеристики алюминия [21].

Результаты моделирования представлены на рис. 2-4. В рассматриваемом примере численно исследовалось влияние величины теплоты перехода L_m на процесс плавления. На рис. 2 кривая 1 характеризует распределение интенсивности G источника, кривые 2-5 - временные зависимости температуры поверхности при различных значениях L_m . Сплошная линия 2 соответствует $L_m = L_m^0 = 0,369 \frac{\text{кДж}}{\text{г}}$, пунктирные - 3-5 соответствуют $L_m = 2L_m^0$ (3),

$L_m = 0,5L_m^0$ (4), $L_m = 0$ (5). На рис. 3 приведено для тех же значений L_m пространственное распределение температуры в один и тот же момент времени. Момент плавления на всех кривых, для которых $L_m \neq 0$, характеризуется изломом профиля температуры, рис. 2, 3, величина которого тем больше, чем больше величина L_m . При $L_m = 0$ излом отсутствует, что означает, что процесс плавления не учитывается. Увеличение L_m свыше L_m^0 соответствует увеличению затрат энергии на процесс плавления. В расчетах это приводит к уменьшению значений температуры на поверхности и в глубине, уменьшению толщины расплава H и скорости V . Уменьшение теплоты плавления приводит к росту температурных зависимостей $T(t)$ и $T(x)$. Предельными значениями для этих температурных зависимостей являются кривые при $L_m = 0$. На рис. 4 представлены зависимости скорости движения фронта V при $L_m = L_m^0$ и толщины жидкой фазы H при различных

значениях L_m .

В расчетах для каждой фазы использовались равномерные сетки содержащие по 30 узлов. Шаги первоначальных сеток h_s и h_e существенно отличались по величине: $h_s \gg h_e$. Первоначальную сетку для отсутствующей фазы можно вводить двумя способами. В первом при $T < T_m$ считается одно уравнение теплопроводности. При достижении $T = T_m$ с помощью простой процедуры подсчитывается количество перетекшей массы за один временной шаг, которое затем распределяется на все интервалы и тем самым определяется первоначальная сетка для новой фазы. Второй способ заключается в том, что при $T = T_m$ вводится расчетная сетка со сколь угодно малым шагом. Введение сетки вторым способом приводит к лишь к увеличению числа итераций на первых шагах.

Включение механизма адаптации приводит к автоматическому отслеживанию положения границы раздела фаз и изменению координат в эйлеровом пространстве. Размеры области и величина шагов сетки вновь зарождающейся фазы увеличиваются, а старой уменьшаются. Динамику поведения сетки в каждой из подобластей Ω_s и Ω_e удобно характеризовать величиной ψ , значения которой в исходной фазе могут уменьшаться от единицы до нуля, а в зарождающейся увеличиваться от единицы до сколь угодно большого числа. При выборе достаточно большого значения D , величины ψ_s, ψ_e могут практически не зависеть от пространственной переменной. Временные зависимости $\psi_e(t)$ в жидкой фазе для различных значений L_m показаны на рис.4. Эти зависимости показывают во сколько раз изменилась масса жидкости по сравнению с массой в начальный момент плавления или, что тоже самое, во сколько раз изменяется пространственный шаг сетки $h_e(t)$ по отношению к первоначально заданному значению.

В заключение отметим следующее:

1. Предлагаемый метод, как показали расчеты в широком диапазоне изменения интенсивности источника и теплофизических характеристик вещества, отличается высокой скоростью сходимости. Используемое число итераций при погрешности $10^{-3} - 10^{-4}$ обычно равнялось 2-3.
2. Начальная сетка может выбираться равномерной или неравномерной с сильно отличающимися шагами (несколько порядков) для различных фаз. Это делает метод весьма удобным для исследования задач с зарождением новой фазы.
3. Предлагаемый метод пригоден к решению задач с подвижными гра-

ницами, закон движения которых может быть задан или определен из решения самой задачи.

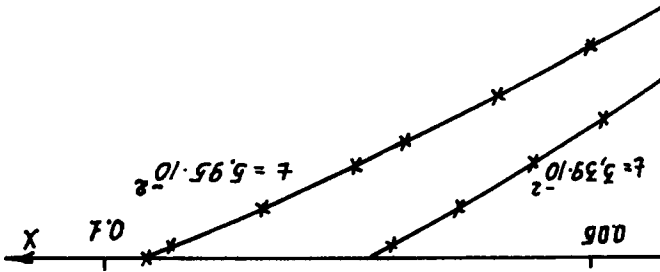
4. Выделение фронта и перестройка сетки в переменных x, t производится автоматически и не связана с итерационными процедурами. В то же время использование метода встречной прогонки позволяет организовать вычисление по схеме сквозного счета.

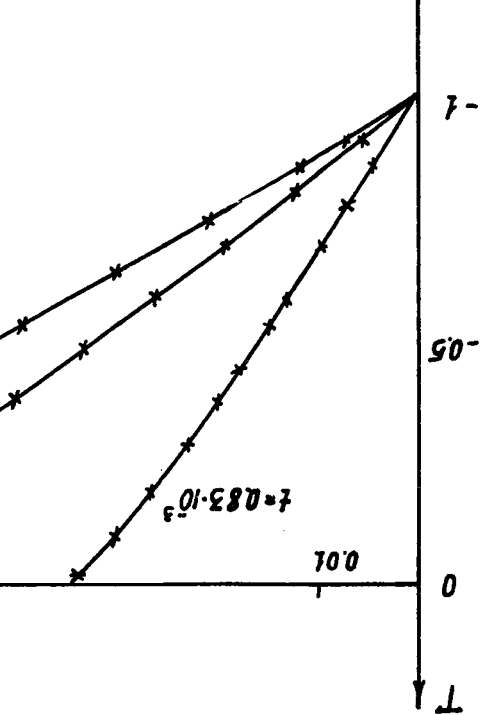
ЛИТЕРАТУРА

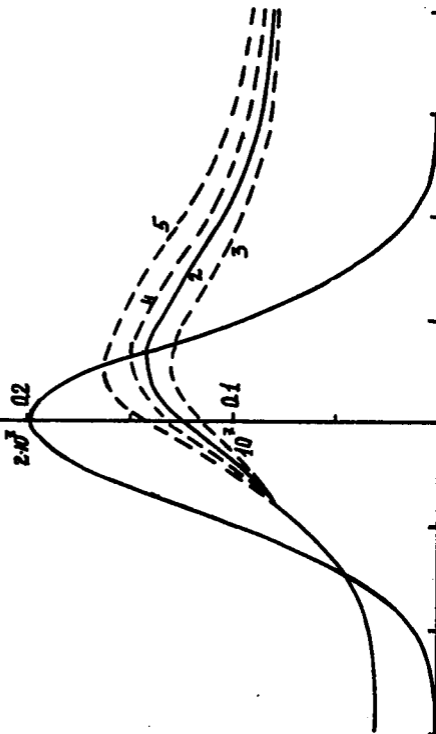
- I. Williamson S., Mourou G., Li J.C.M. Time-Resolved, Laser-Induced Phase Transformation in Aluminium. Phys. Rev. Lett. 1984, v.52, No. 26, pp. 2364-2367.
2. Алферов Ж.И., Ковальчук Ю.В., Погорельский Ю.В., Смольский О.В. Воздействие пикосекундных лазерных импульсов на S_i и полупроводниковые соединения A^3B^5 . Изв. АН СССР, Серия физическая, 1985, т.49, № 6, с.1069-1075.
3. Карпов С.Ю., Ковальчук Ю.В., Погорельский Ю.В. Плавление полупроводников под действием импульсного лазерного излучения. Обзор. Физика и техника полупроводников. 1986, т.20, в. II, с.1945-1969.
4. Данилюк И.И. О задаче Стефана. Успехи математических наук. 1985, т.40, вып.5(245), с.133-185.
5. Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана. - Рига, Звайзгме, 1967, 457 с.
6. Мейрманов А.М. Задача Стефана. - Новосибирск, Наука, 1986, 239 с.
7. Авдонин Н.А. Математическое описание процессов кристаллизации. - Рига, Зинатне, 1980, 178 с.
8. Любов Б.Я. Теория кристаллизации в больших объемах. - М., Наука, 1975, 256 с.
9. Самойлович Ю.А. Системный анализ кристаллизации слитка. - Киев. Наукова думка, 1983, 245 с.
10. Современная кристаллография. Том 3. Образование кристаллов. Под ред. Б.К. Вайнштейна. - М.: Наука, 1980, 408 с.
11. Успенский А.Б. О методе выпрямления фронтов для многофронтной задачи Стефана. ДАН СССР, 1967, т.172, № 1, с.61-64.
12. Бакирова О.И. О некоторых методах решения задачи Стефана. Дифференциальные уравнения. 1983, т.19, № 3, с.491-500.
13. Вабищевич П.Н., Вабищевич Т.Н. Об одном методе численного решения задачи Стефана. Вестник МГУ, Серия 16, Вычислительная математика и кибернетика. 1983, № 4, с.17-22.
14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: ГИТТД, 1953, с.

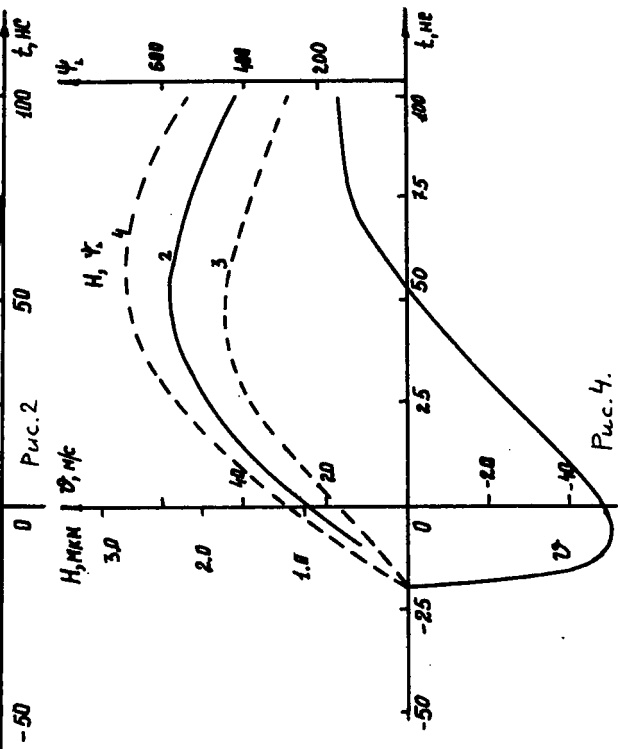
15. Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана. ЖВМ и МФ, 1965, т.5, № 5, с.816-827.
16. Будаk Б.М., Соловьёва Е.Н., Успенский А.Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана. ЖВМ и МФ, 1965, т.5, № 5, с.828-840.
17. Мажукин В.И., Повещенко Ю.А., Попов С.Б., Попов Ю.П. Об однородных алгоритмах численного решения задачи Стефана. Препринт Института прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, 1985, № 122, 23 с.
18. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.:Наука, 1977, 656 с.
19. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978, 591 с.
20. Карлсоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. - М.:Наука, 1964, 487 с.
21. Мажукин В.И., Пестрякова Г.А. Алгоритм численного решения задачи поверхностного испарения вещества лазерным излучением. ЖВМ и МФ, 1985, т.25, № II, с.1697-1709.

Puc. 7





$G, \frac{\text{cm}}{\text{cm}^2} \quad T, \text{эб}$ 



Puc. 4.

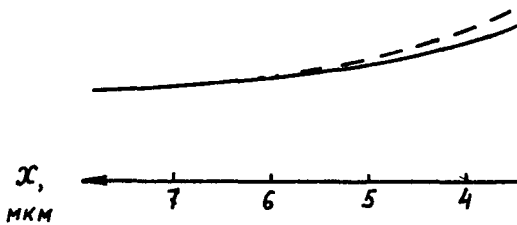
$t=0$ 

Рис. 3

