



Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Академии наук СССР

Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ АДАПТИВНЫХ СЕТОК  
ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Препринт № 33 за 1987г.

Москва

ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ им. М.В.Келдыша АКАДЕМИИ НАУК СССР

Н.А.Дарьин, В.И.Мажукин

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ АДАПТИВНЫХ СЕТОК ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ  
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Москва 1987 г.

### АННОТАЦИЯ

Рассмотрен один из возможных методов построения адаптивных разностных сеток, динамически связанных с решением. Основная идея метода заключается в введении механизма адаптации на уровне дифференциальной задачи, т.е. движение узлов сетки описывается дифференциальным уравнением в частных производных. Возможности метода продемонстрированы на примере одномерной нестационарной задачи о распространении тепловой волны и стационарной задачи о погранслое.

## Введение

Проблеме построения расчетных сеток при решении задач математической физики в последнее десятилетие уделяется большое внимание. Существует мнение [1], что окончательное разрешение многих проблем численного решения задач математической физики следует ожидать не столько от улучшения способов разностной аппроксимации уравнений в частных производных и усовершенствования алгоритмов решения сеточных уравнений, сколько от правильного выбора расчетной сетки. Точность решений уравнений в частных производных, получаемых разностными методами, зависит от того, насколько хорошо согласуется распределение узлов разностной сетки с особенностями искомого решения. Очевидно, что два решения одной задачи, полученных на двух различных сетках с одинаковым числом узлов, будут иметь различную погрешность, причем меньшая погрешность будет получена на сетке с более оптимальным по отношению к искомому решению распределением узлов.

К настоящему времени сформировалось несколько направлений построения, генерации и адаптации расчетных сеток, см., например, обзоры [1,2]. Опыт решения задач тепломассообмена и гидродинамики разностными методами с фиксированным числом узлов показал, что точность численного решения можно существенно повысить с помощью простого приема: построения неравномерных сеток. Однако само построение неравномерных сеток в многомерных задачах (даже для двумерного случая) со сложной геометрией области решения представляет собой непростую задачу. В стационарных задачах, где сетку можно построить до начала интегрирования, распределение узлов производится с помощью решения системы уравнений Лапласа [3]. Как правило, при решении подобных задач физическое пространство с помощью преобразований общего вида

$$\xi = \xi(x, y, t), \quad \eta = \eta(x, y, t), \quad t = t_p$$

предварительно трансформируется в некоторое расчетное пространство, в котором криволинейные границы физической области отображаются в стороны прямоугольника (в двумерном случае). Затем распределение узлов в физическом пространстве определяется из решения уравнений Лапласа [3,4] или Пуассона [2,5]. Примеры использования указанной методики можно найти в работах [1,2,6].

В нестационарных задачах аналогичное уменьшение погрешности достигается посредством периодически производимого пересчета

сетки, см. например [7]. Однако большее распространение в нестационарных задачах получили методы подвижных сеток, позволяющие при фиксированном общем числе узлов уменьшить погрешность численного решения за счет более оптимального расположения узлов. Различные аспекты построения, генерации и использования подвижных сеток в задачах газовой динамики и тепломассообмена освещаются в работах [4,8-10].

Принцип оптимального, по отношению к особенностям решения, распределения узлов положен в основу методов построения так называемых адаптивных сеток. Опыт использования адаптивных сеток для решения различных задач математической физики показал, что применение их наиболее эффективно в случаях, когда они динамически связаны с решением [1,10]. Отметим, что разработка методов построения адаптивных сеток находится в стадии интенсивного развития и в силу этого обстоятельства пока невозможно указать методы, которым следовало бы отдавать явное предпочтение.

Ключевой проблемой всех методов построения адаптивных сеток, динамически связанных с решением, является выбор характеристики численного решения, используемой в качестве параметра, управляющего перемещением узлов сетки. В методах подвижных конечных элементов [11,12] для этих целей используется система разностных уравнений, получаемых с помощью проекционного метода Галеркина. При решении многомерных стационарных задач [13,14] наибольшее распространение, по-видимому, получил вариационный принцип построения адаптивных сеток и его различные модификации. В основе этого подхода лежит требование минимального во всей области изменения некоторых характеристик численного решения. В частности, это может быть требование эквидистантного распределения зависимой переменной [14]. Отметим, что наличие больших градиентов решения в подобных задачах приводит к построению сильно неравномерных сеток. В нестационарных задачах, наряду с вариационным принципом [15], можно указать два эвристических подхода к построению адаптивных сеток, в которых в качестве параметра, управляющего движением узлов сетки, выбирается либо норма погрешности аппроксимации [16], либо скорость изменения решения [17].

Условно, по признаку имеющих особенностей решения, наиболее важные задачи, требующие применения адаптивных сеток, можно разбить на следующие классы:

- 1) Задачи с наличием больших градиентов внутри области решения. Это одна из наиболее часто встречающихся особен-

ностей решения, и с нею, как правило, связаны важные физические явления.

- 2) Задачи с наличием больших градиентов вблизи границы области: задачи типа пограничного слоя, задачи горения.
- 3) Задачи с наличием подвижных границ. К ним относятся задачи со свободной поверхностью, задачи плавления, испарения и т.п.
- 4) Задачи с наличием линий, поверхностей разрывов и контактных границ внутри области: задачи газовой динамики с наличием ударных волн и движением областей вещества с сильно различающимися свойствами.

В данной работе на примере модельных задач, относящихся к первым двум классам, излагается новый подход к построению адаптивных сеток, динамически связанных с решением. В задаче о распространении тепловой волны, описываемой нестационарным нелинейным уравнением теплопроводности, рассматривается проблема повышения точности расчета с помощью адаптивной сетки в области фронта волны, характеризующегося большими градиентами. Возможности предлагаемого метода адаптации применительно к стационарным задачам, решаемым методом установления, демонстрируются на примере решения модельной задачи о пограничном слое.

## § I. Метод адаптации и дифференциальная постановка задачи.

Идеальную сетку можно построить лишь в случае заранее известного решения. Обычно в процессе построения сетки с управляемым размещением узлов в распоряжении имеется только некоторая ограниченная априорная информация о поведении решения. Поэтому точность расчета существенно зависит от того, как взаимосвязаны разностная схема, используемая для аппроксимации дифференциальной задачи, и способ построения расчетной сетки.

В настоящей работе рассматривается новый подход к построению адаптивных сеток для нестационарных задач, в котором предлагается информацию о поведении узлов сетки и взаимосвязи между разностной схемой и размещением узлов вводить на уровне дифференциальной модели. С этой целью дифференциальная модель строится таким образом, что в ее состав входят одно или несколько дифференциальных уравнений в частных производных, являющихся неотъемлемой частью общей математической постановки задачи, и которые затем при переходе к сеточному пространству используются для по-

строения расчетной сетки с управляемым распределением узлов. Координаты узлов при этом, наряду с искомыми значениями сеточных функций, определяются из решения единой дифференциальной задачи. Построение дифференциальной модели реализуется посредством введения некоторой неподвижной системы координат, эйлеровы образы которой изменяются со временем в зависимости от динамики искомого решения. В частности, узлы разностной сетки могут автоматически сгущаться в области больших градиентов, положение которых заранее неизвестно.

Построение дифференциальной модели рассмотрим на примере тепловой задачи, описываемой уравнением теплопроводности, которое в подвижной системе координат имеет вид:

$$(I) \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - v \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = - \frac{\partial W}{\partial x}; \quad \mathcal{E} = cT, \quad W = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x},$$

где  $\mathcal{E}$  - внутренняя энергия,  $c, \lambda$  - теплоемкость и коэффициент теплопроводности,  $v(x, t)$  - неизвестная скорость движения эйлеровых образов.

Рассмотрим одномерное физическое пространство  $\Omega_{x,t}$ :  $x_0 \leq x \leq x_R, t > 0$  и некоторое расчетное пространство  $\Omega_{q,t}$ :  $q_0 \leq q \leq q_R$ . Предполагается, что на каждый момент времени существует невырожденное преобразование

$$(2) \quad x = x(q, t), \quad x(q_0, t) = x_0, \quad x(q_R, t) = x_R.$$

Конкретный вид преобразования (2) будет указан ниже. Пусть якобианом такого преобразования является некоторая безразмерная дифференцируемая функция  $\Psi(q, t)$ , ставящая в соответствие элементу  $dx$  элемент  $dq$ . Отметим, что  $\Psi(q, t) dq$  может иметь различный физический смысл, например, характеризовать массу элемента  $dq$  или его относительное удлинение. Запишем в переменных  $q, t$  математическую постановку тепловой задачи, позволяющую одновременно описывать тепловые процессы и перемещать элементы  $dx$  по определенному закону. Введем функции  $W(q, t)$  и  $Q(q, t)$ , где  $W(q, t)$  - поток тепла в точке с координатами  $q, t$ ;  $Q(q, t)$  - поток некоторой безразмерной величины в той же точке. Величина потока  $Q(q, t)$  отлична от нуля, если соответствующая эйлерова координата  $x(q)$  изменяется со временем.

Функция  $\Psi(q, t)$  связана с потоком  $Q(q, t)$  следующим законом сохранения:

$$(3) \int_q^{q+\Delta q} [\Psi(q, t+\Delta t) - \Psi(q, t)] dq = \int_t^{t+\Delta t} [Q(q, t) - Q(q+\Delta q, t)] dt.$$

Закон сохранения энергии для элемента  $\Delta q$  в интегральной форме имеет вид:

$$(4) \int_q^{q+\Delta q} [\varepsilon(q, t+\Delta t)\Psi(q, t+\Delta t) - \varepsilon(q, t)\Psi(q, t)] dq = \int_t^{t+\Delta t} [W(q, t) - W(q+\Delta q, t)] dt + \int_t^{t+\Delta t} [\varepsilon(q, t)Q(q, t) - \varepsilon(q+\Delta q, t)Q(q+\Delta q, t)] dt.$$

Второй интеграл в правой части (4) характеризует изменение энергии за счет потока  $Q$ , определяемого изменением координаты  $x$ . Переходя к пределу в (3), (4) при  $\Delta q, \Delta t \rightarrow 0$ , запишем законы сохранения (3), (4) в дифференциальной форме

$$(5) \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial q},$$

$$(6) \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\Psi) = -\frac{\partial W}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q}(Q\varepsilon), \quad W = -\frac{\lambda(T)}{\Psi} \frac{\partial T}{\partial q},$$

$$(7) \frac{\partial x}{\partial q} = \Psi, \quad \varepsilon = \varepsilon(T).$$

Из полученной системы уравнений (5)-(7) следует, что координаты расчетного и физического пространств связаны между собой следующими соотношениями:

$$dx = \Psi dq, \quad dt = dt_p.$$

Эти равенства позволяют совершить переход от переменных  $x(t), t$  к переменным  $q, t_p$ . Замена в уравнении (I) производится в соответствии с формулами

$$(8) \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_p}.$$

В случае, если исходная дифференциальная задача записана в неподвижной системе координат  $x, t$  в виде



$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = - \frac{\partial W}{\partial x},$$

последнее равенство в (8) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_p} - Q \frac{\partial}{\partial x}, \quad Q = v.$$

С помощью несложных преобразований, используя соотношения (8), можно совершить обратный переход от переменных  $q, t$  к  $x, t$  и получить исходное уравнение (I). При этом уравнение (6) переходит в (I), а уравнения (5), (7) обращаются в тождество.

Полученная дифференциальная модель (5)-(7) позволяет одновременно описывать поведение температуры среды и изменение линейных размеров элементов физического пространства  $\Omega_{x,t}$ . При переходе к сеточному пространству  $\bar{\Omega}_{q,t}$  разностные аналоги уравнений (5)-(7) используются для построения подвижных сеток в пространстве  $\bar{\Omega}_{x,t}$ .

Вид функции  $Q$  в общем случае произволен и лишь условия (2) налагают вполне понятные требования  $Q(q_0, t) = Q(q_R, t) = 0$ . Произвольность выражения  $Q(q, t)$ ,  $q_0 < q < q_R$  можно использовать в различных целях, в частности, специальным заданием  $Q$  в виде

$$(9) \quad Q(q, t) = -D_0 \frac{\partial \psi}{\partial q} - Q_0 \frac{\partial}{\partial q} \left( \psi \left| \frac{\partial T}{\partial q} \right| \right)$$

и последующим решением системы уравнений (5)-(7) можно добиться автоматического сгущения узлов в физическом пространстве  $\Omega_{x,t}$  в области больших градиентов, т.е. построить адаптивную сетку, динамически связанную с искомым решением. В выражении (9) первый член ограничивает чрезмерное сближение узлов, второй член обеспечивает сгущение узлов в области больших градиентов температуры.

$Q_0$  и  $D_0$  в простейшем случае положительные произвольные константы, подбираемые в ходе расчетов. В более общем случае их можно выразить через теплофизические характеристики среды или другие параметры задачи.

## § 2. Разностная аппроксимация.

В расчетном пространстве  $\bar{\Omega}_{q,t}$  введем исходную расчетную сетку с постоянным шагом  $h$  по переменной  $q$  и шагом  $\tau$  по переменной  $t$ :

$$\omega = \{(q_i, t^j), (q_{i+1/2}, t^j), q_{i+1} = q_i + h, q_{i+1/2} = q_i + 0.5h, t^{j+1} = t^j + \tau, i = 0, 1, \dots, N-1\}.$$

К целым узлам сетки  $(q_i, t^j)$  будем относить переменную  $x_i^j$  и функции  $W_i^j, Q_i^j$ , к полужелым точкам  $(q_{i+1/2}, t^j)$  - сеточные функции  $\varepsilon_{i+1/2}^j, \psi_{i+1/2}^j, T_{i+1/2}^j$ . Для аппроксимации системы уравнений (5)-(7) использовалось семейство разностных схем [18]:

$$(I0) \frac{(\psi \varepsilon)_{i+1/2}^{j+1} - (\psi \varepsilon)_{i+1/2}^j}{\tau} = - \frac{W_{i+1}^{(s)} - W_i^{(s)}}{h} - \frac{(\varepsilon Q)_{i+1}^{(s)} - (\varepsilon Q)_i^{(s)}}{h},$$

$$(II) \frac{\psi_{i+1/2}^{j+1} - \psi_{i+1/2}^j}{\tau} = - \frac{Q_{i+1}^{(s)} - Q_i^{(s)}}{h},$$

$$(I2) \frac{x_{i+1}^{j+1} - x_i^{j+1}}{h} = \psi_{i+1/2}^{j+1},$$

$$(I3) W_i^j = - \frac{\lambda_i^j}{\psi_i^j} \frac{T_{i+1/2}^j - T_{i-1/2}^j}{h}, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$(I3') Q_i^j = -D_0 \frac{\psi_{i+1/2}^j - \psi_{i-1/2}^j}{h} - Q_0 \frac{\psi_{i+1/2}^j |T_{i+1}^j - T_i^j| - \psi_i^j |T_i^j - T_{i-1}^j|}{h^2}.$$

Значения функций  $\varepsilon_i, T_i, \psi_i$  вычислялись по формуле

$$y_i = (\psi_{i-1/2} y_{i+1/2} + \psi_{i+1/2} y_{i-1/2}) / (\psi_{i-1/2} + \psi_{i+1/2}).$$

Полученная система уравнений (I0), (II) нелинейна и решалась с помощью матричной прогонки [19] с итерациями по нелинейности. Уравнения (I0), (II) с учетом выражения (I3) оказываются пятиточечными, поэтому с целью сведения их к трехточечным значение производной  $\left| \frac{\partial T}{\partial q} \right|$  использовалось с предыдущей итерации.

### § 3. Результаты расчетов.

Возможности предлагаемого метода адаптации применительно к нестационарным краевым задачам продемонстрируем на примере одномерной задачи о распространении теплового фронта:

$$(I4) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T^n \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x > 0, t > 0, n > 1.$$

Уравнение (I4) допускает решение типа бегущей волны

$$T(x, t) = \begin{cases} (Dn)^{1/n} (Dt - x)^{1/n}, & x < Dt, \\ 0 & x \geq Dt. \end{cases}$$

При этом

$$(I5) \quad T(0, t) = T_0 t^{1/n}, \quad T_0 = (D^2 n)^{1/n}, \quad T(x, 0) = 0.$$

Для численного решения задачи (I4), (I5) использовалась система (I0)-(I3) с  $G=1$  и следующими граничными условиями:

$$T(q, 0) = 0, \quad \psi(q, 0) = 1, \quad q_0 \leq q \leq q_R,$$

$$T(q_0, t) = (Dn)^{1/n} (Dt)^{1/n}, \quad D=1, \quad n=2, \quad Q(q_0, t) = 0,$$

$$T(q_R, t) = 0, \quad Q(q_R, t) = 0.$$

На рис. I, 2 представлены результаты сравнения численного и аналитического решений. Аналитическое решение представлено сплошными линиями, численное решение, полученное на сетке с фиксированными узлами, показано штрих-пунктирными линиями, численное решение на адаптивной сетке изображено пунктирными линиями. Результаты представлены на одни и те же моменты времени  $t_1, t_2, t_3$ . Положение узлов расчетных сеток показано точками на кривых. Из сравнения кривых рис. I следует, что при использовании фиксированной сетки с  $N=40$  погрешность численного решения невелика в глубине волны, но резко возрастает вблизи фронта. Использование адаптивной сетки ( $D_0=1, Q_0=10$ ) с таким же общим числом узлов  $N=40$  позволило за счет большей концентрации узлов в области ненулевого решения существенно увеличить точность решения как в глубине, так и на фронте тепловой волны. Более того, расчет на адаптивной сетке с вдвое меньшим общим числом узлов  $N=20$  показал (см. рис. 2), что точность решения и в этом случае остается существенно более высокой, чем у решения с  $N=40$  на сетке с фиксированными узлами.

На рис. 3 показана  $x, t$  - диаграмма движения узлов адаптивной сетки ( $D_0=Q_0=1$ ). Прямая линия, выходящая из начала координат, соответствует положению фронта тепловой волны, верхняя часть диаграммы характеризует положение узлов под кривой  $T(x, t)$ . Согласно  $x, t$  - диаграмме узлы адаптивной сетки

группируются в области больших градиентов, что в конечном итоге и приводит к повышению точности численного решения.

#### § 4. Погрешность аппроксимации.

Существует широко распространенное мнение, что численные расчеты на сильно неравномерных сетках характеризуются низкой точностью. Однако в случае адаптивных сеток этого не происходит, поскольку изменение положения узлов и динамика искомого решения взаимосвязаны. Выполним краткий качественный анализ погрешности аппроксимации разностной схемы для уравнения энергии в переменных  $q, t$ . Воспользуемся для этих целей аппаратом метода дифференциального приближения [20]. Первое дифференциальное приближение для разностного уравнения энергии имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi \varepsilon) + \frac{\partial W}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}(Q \varepsilon) = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial q \partial t} (W + Q \varepsilon) - \frac{1}{3!} \left[ \frac{h^2}{4} \frac{\partial^3}{\partial q^3} (W + Q \varepsilon) + 2\tau^2 \frac{\partial^3}{\partial q \partial t^2} (W + Q \varepsilon) \right].$$

Из этого выражения следует, что формально порядок погрешности аппроксимации разностной схемы  $O(\tau + h^2)$ , а конкретная величина погрешности определяется произведением шагов  $\tau$  и  $h^2$  на соответствующие производные функции  $W + Q \varepsilon$ . Проанализируем поведение этой функции и оценим величины ее производных в окрестности фронта тепловой волны.

В случае неподвижной эйлеровой сетки  $Q = 0$ , первая производная  $\frac{\partial W}{\partial x} = -\sqrt{2}(t-x)^{-1/2}$  вблизи фронта неограниченно возрастает, что приводит по сути дела к потере аппроксимации в этой области. Следствием этого является большая погрешность численного решения - штрих-пунктирные линии на рис.1,2.

На рис.4 показано поведение функций  $W$ ,  $Q \varepsilon$ ,  $W + Q \varepsilon$ . Положение фронта помечено на графике вертикальной чертой. Обращает на себя внимание факт стремления к нулю величины  $\frac{\partial}{\partial q}(W + Q \varepsilon)$  вблизи фронта. Таким образом, взаимосвязь потока  $Q$ , определяющего положение узлов, и решения  $\varepsilon$  приводит к тому, что погрешность аппроксимации в области наибольших градиентов мала, что вызывает в конечном итоге повышение точности численного решения - пунктирные линии на рис.1,2.

§ 5. Адаптация расчетной сетки в одномерных стационарных задачах.

Возможности изложенного метода адаптации сеток для стационарных задач с большими градиентами вблизи границы продемонстрируем на примере решения модельной задачи о пограничном слое:

$$(I6) \quad \varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} - u = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0,$$

где  $\varepsilon$  - малая положительная постоянная, которая в приводимых ниже примерах принимала значения от  $10^{-2}$  до  $10^{-8}$ . Аналитическое решение этой задачи имеет вид:

$$(I7) \quad u(x) = \left(1 - e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}\right)^{-1} \cdot \left(e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} - e^{-\frac{x-2}{\sqrt{\varepsilon}}}\right)$$

Численно задачу (I6) можно решить методом установления. Используя методику, изложенную в предыдущих параграфах, запишем задачу (I6) в переменных  $q, t$ :

$$(I8) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Psi u) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\Psi} \frac{\partial u}{\partial q} \right) - \frac{\partial}{\partial q} (u Q) - \Psi u, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial q}, \end{cases}$$

$$u(0, t) = 1, \quad u(1, t) = 0,$$

$$u(q, 0) = 0, \quad 0 < q < 1.$$

Функция  $Q(q, t)$  задавалась в виде (9), где  $D_0 = C_1 \varepsilon$ ,  $Q_0 = C_2 \varepsilon$ ,  $C_1, C_2$  - константы, численное значение которых изменяется в диапазоне  $C_1 = 1 \div 10$ ,  $C_2 = 10 \div 10^2$  и подбирается в ходе расчетов.

Ниже приводятся результаты и краткий анализ математического моделирования задачи (I6) при использовании фиксированной и адаптивной сеток. Для различных значений  $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}$  из системы (I8) находилось сеточное решение  $\tilde{u}_i$ , которое затем сравнивалось с точным  $u_i$ . Погрешность решения определялась в виде  $\Delta u_i = u_i - \tilde{u}_i$ . Для всех вариантов расчетная сетка в начальный момент времени задавалась равномерной.

В таблице I приведены результаты численного решения и ве-

личины погрешности, полученные на равномерной фиксированной сетке с числом узлов  $N=20$  для значения параметра  $\varepsilon=10^{-2}$ . В Таблице 2 для того же значения  $\varepsilon$  приведены результаты расчетов на адаптивной сетке с общим числом узлов  $N=20$ . На рис. 5, 6 для этого варианта изображены профиль решения  $\tilde{u}(x)$  и  $x, t$  - диаграмма движения узлов сетки. Кружками на профиле решения показано распределение узлов в момент окончания расчета. Сравнение результатов показывает, что на отрезке  $0 \leq x \leq 0.5$  число узлов адаптивной сетки увеличилось вдвое, а точность решения возросла примерно на порядок.

В Таблицах 3, 4 показаны результаты расчетов для  $\varepsilon=10^{-4}$  на адаптивной сетке с  $N=20$  и  $N=40$  соответственно. Сравнение показывает, что увеличение исходного числа узлов сетки в 2 раза приводит к уменьшению погрешности примерно в 4 раза.

В Таблице 5 и на рис. 7 представлены результаты расчетов на адаптивной сетке с  $N=20$  для  $\varepsilon=10^{-8}$ . Окончательное распределение узлов на рис. 7 отмечено кружками.

Сравнение полученных результатов показало фактическую независимость погрешности  $\Delta u$  от величины  $\varepsilon$ .

В недавней работе [21] рассмотренная задача (16) решалась на адаптивной сетке, построение которой производилось посредством решения дифференциального уравнения

$$(v(x, u) \cdot x_a)_a = 0, \quad 0 < a < 1.$$

Конкретный вид функции  $v(x, u)$  задавался из анализа погрешности аппроксимации. Было определено, что специальным выбором функции  $v(x, u)$  удается получить погрешность порядка  $O(h^4)$ , не зависящую от  $\varepsilon$ . В итоге это позволило авторам [21] получать разностное решение с высокой точностью ( $\Delta u_i \approx 10^{-6}$ ).

Предлагаемый нами метод имеет погрешность аппроксимации  $O(h^2)$ , что по-видимому является одной из причин, обуславливающих более низкую точность решения, чем у [21], но вполне приемлемую для практических расчетов.

В заключение отметим, что приведенные примеры указывают на достаточную для практического использования эффективность предлагаемого метода построения адаптивных сеток, динамически связанных с решением, для одномерных стационарных и нестационарных задач.

Другие возможные приложения предлагаемого метода могут быть связаны как с задачами, подобными рассмотренным, но у которых

существенную роль играют эффекты многомерности, так и с задачами двух следующих классов, т.е. с задачами, у которых имеются подвижные границы или ударные волны.

Авторы выражают искреннюю признательность А.А.Самарскому за плодотворные дискуссии и поддержку работы.

Литература

1. Thompson J.F. Grid Generation Techniques in Computational Fluid Dynamics. AIAA J., 1984, v.22, no.11, pp.1505-1523.
2. Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W. Boundary Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations - A Review. J. of Computational Physics, 1982, v.47, pp.1-108.
3. Thompson J.F., Thames F.C., Mastin C.W. Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate System for Field Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies. J. of Computational Physics, 1974, v.15, pp.229-319.
4. Годунов С.К., Прокопов Г.П. Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах. - ЖВММФ, 1972, т. 12, № 2, с. 429-440.
5. Aubert X., Deville M. Steady Viscous Flows by Compact Differences in Boundary-Fitted Coordinates. J. of Computational Physics, 1983, v.49, p.490.
6. Стегер Дж.Л. Неявный конечно-разностный метод расчета двумерного обтекания тел с произвольной геометрией. РТ и К, 1978, т. 16, № 7, с. 51-60.
7. Кириченко П.И., Соколов В.В., Тарасов Ю.И., Тишкин В.Ф. и др. Численное моделирование распространения пересжатой детонационной волны в сходящемся коническом канале. Препринт Института прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, 1984, № 82, с. 18.
8. Rieger H., Projahn U., Beer H. Analysis of the heat transport mechanisms during melting around a horizontal circular cylinder. Int.J. Heat Mass Transfer, 1982, v.25, no.1, pp.137-147.
9. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. - М.: Наука, 1976, - 400 с.
10. Numerical Grid Generation. Editor J.F.Thompson, North-Holland, New-York, Amsterdam, Oxford. 1982, 909 p.
11. Gelinas R.J., Doss S.K., Miller K. The Moving Finite Element Method: Applications to General Partial Differential Equations with Multiple Large Gradients. J. of Computational Physics, 1981, v.40, pp.202-249.
12. Miller K., Miller R. Moving Finite Elements. I, II. SIAM J. Numer. Anal., 1981, v.18, no.6, pp.1019-1057.



13. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Разностная схема на подвижных сетках для решения уравнений вязкого газа. *ЖВМиМФ*, 1979, т. 19, № 1, с. 174-188.
14. Дегтярев Л.М., Дроздов В.В. Адаптирующиеся к решению сетки в эллиптических задачах на плоскости. *Дифференциальные уравнения*, 1984, т. 20, № 7, с. 1194-1203.
15. Brackbill J.U. *Coordinate System Control: Adaptive Meshes. Numerical Grid Generation*, editor by J.F.Thompson, North-Holland, 1982, pp.277-316.
16. Rai M.M., Anderson D.A. Application of Adaptive Grid to Fluid-Flow Problems with Asymptotic Solutions, *AIAA J.*, 1982, v.20, no.4, pp.496-502.
17. Dwyer H.A., Kee R.J., Sanders B.R. Adaptive Grid Method for Problems in Fluid Mechanics and Heat Transfer. *AIAA J.*, 1980, v.18, no.10, pp.1205-1212.
18. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977, - 656 с.
19. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 590 с.
20. Шокин Ю.И. Метод дифференциального приближения. - Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1979. - 224 с.
21. Дегтярев Л.М., Дроздов В.В., Иванова Т.С. Метод адаптивных к решению сеток в одномерных краевых задачах с пограничным слоем. Препринт Института прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, 1986, № 164, 26 с.

Таблица I

	Т числ.	$x$	$\Delta T$
1	1.0000	0.000	0.0000
2	$7.5735 \cdot 10^{-1}$	$2.50 \cdot 10^{-2}$	$2.1452 \cdot 10^{-2}$
3	$4.6141 \cdot 10^{-1}$	$7.50 \cdot 10^{-2}$	$1.0956 \cdot 10^{-2}$
4	$2.8090 \cdot 10^{-1}$	$1.25 \cdot 10^{-1}$	$5.6001 \cdot 10^{-3}$
5	$1.7075 \cdot 10^{-1}$	$1.75 \cdot 10^{-1}$	$3.0277 \cdot 10^{-3}$
6	$1.0342 \cdot 10^{-1}$	$2.25 \cdot 10^{-1}$	$1.9745 \cdot 10^{-3}$
7	$6.2122 \cdot 10^{-2}$	$2.75 \cdot 10^{-1}$	$1.8059 \cdot 10^{-3}$
8	$3.6506 \cdot 10^{-2}$	$3.25 \cdot 10^{-1}$	$2.2677 \cdot 10^{-3}$
9	$2.0152 \cdot 10^{-2}$	$3.75 \cdot 10^{-1}$	$3.3654 \cdot 10^{-3}$
10	$8.9343 \cdot 10^{-3}$	$4.25 \cdot 10^{-1}$	$5.3298 \cdot 10^{-3}$

Таблица 2

	$T_{\text{числ.}}$	$x$	$\Delta T$
I	1.000	0.000	0.000
2	$9.4364 \cdot 10^{-1}$	$5.6520 \cdot 10^{-3}$	$1.4011 \cdot 10^{-3}$
3	$8.3954 \cdot 10^{-1}$	$1.7344 \cdot 10^{-2}$	$7.2234 \cdot 10^{-3}$
4	$7.4134 \cdot 10^{-1}$	$2.9791 \cdot 10^{-2}$	$1.0266 \cdot 10^{-3}$
5	$6.4944 \cdot 10^{-1}$	$4.3034 \cdot 10^{-2}$	$8.4780 \cdot 10^{-4}$
6	$5.6376 \cdot 10^{-1}$	$5.7191 \cdot 10^{-2}$	$6.8113 \cdot 10^{-4}$
7	$4.8431 \cdot 10^{-1}$	$7.2393 \cdot 10^{-2}$	$5.2756 \cdot 10^{-4}$
8	$4.1107 \cdot 10^{-1}$	$8.8805 \cdot 10^{-2}$	$3.8703 \cdot 10^{-4}$
9	$3.4402 \cdot 10^{-1}$	$1.0063 \cdot 10^{-1}$	$2.5976 \cdot 10^{-4}$
10	$2.8313 \cdot 10^{-1}$	$1.2613 \cdot 10^{-1}$	$1.4617 \cdot 10^{-4}$
11	$2.2839 \cdot 10^{-1}$	$1.4765 \cdot 10^{-1}$	$4.6397 \cdot 10^{-5}$
12	$1.7977 \cdot 10^{-1}$	$1.7163 \cdot 10^{-1}$	$-3.7024 \cdot 10^{-5}$
13	$1.3722 \cdot 10^{-1}$	$1.9869 \cdot 10^{-1}$	$-1.0401 \cdot 10^{-4}$
14	$1.0069 \cdot 10^{-1}$	$2.2972 \cdot 10^{-1}$	$-1.5295 \cdot 10^{-4}$
15	$7.0127 \cdot 10^{-2}$	$2.6595 \cdot 10^{-1}$	$-1.8222 \cdot 10^{-4}$
16	$4.5437 \cdot 10^{-2}$	$3.0956 \cdot 10^{-1}$	$-1.8977 \cdot 10^{-4}$
17	$2.6492 \cdot 10^{-2}$	$3.6375 \cdot 10^{-1}$	$-1.7353 \cdot 10^{-4}$
18	$1.3092 \cdot 10^{-2}$	$4.3460 \cdot 10^{-1}$	$-1.3319 \cdot 10^{-4}$

Таблица 3

	$T_{\text{числ.}}$	$x$	$\Delta T$
1	1.000	0.000	0.000
2	$8.9101 \cdot 10^{-1}$	$1.1018 \cdot 10^{-3}$	$4.6583 \cdot 10^{-3}$
3	$7.0375 \cdot 10^{-1}$	$3.4638 \cdot 10^{-3}$	$3.4888 \cdot 10^{-3}$
4	$5.3793 \cdot 10^{-1}$	$6.2583 \cdot 10^{-3}$	$2.2656 \cdot 10^{-3}$
5	$3.9476 \cdot 10^{-1}$	$9.2630 \cdot 10^{-3}$	$1.2527 \cdot 10^{-3}$
6	$2.7402 \cdot 10^{-1}$	$1.2930 \cdot 10^{-2}$	$4.1419 \cdot 10^{-4}$
7	$1.7564 \cdot 10^{-1}$	$1.7406 \cdot 10^{-2}$	$-2.3496 \cdot 10^{-4}$
8	$9.9466 \cdot 10^{-2}$	$2.3147 \cdot 10^{-2}$	$-6.6970 \cdot 10^{-4}$
9	$4.5350 \cdot 10^{-2}$	$3.1126 \cdot 10^{-2}$	$-8.6600 \cdot 10^{-4}$
10	$1.2492 \cdot 10^{-2}$	$4.4255 \cdot 10^{-2}$	$-5.2439 \cdot 10^{-4}$

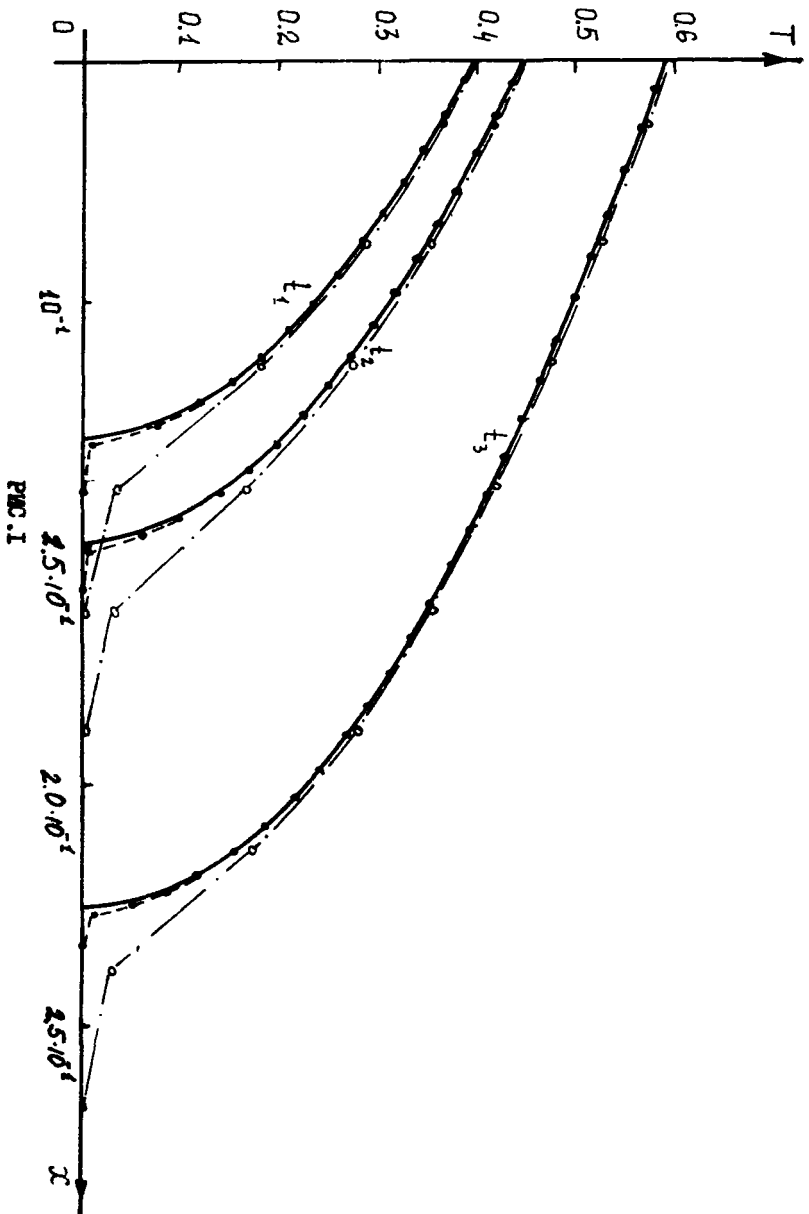
Таблица 4

	$T_{\text{числ.}}$	$x$	$\Delta T$
I	1.000	0.000	0.000
2	$9.4652 \cdot 10^{-1}$	$5.0351 \cdot 10^{-4}$	$1.2680 \cdot 10^{-3}$
3	$8.4730 \cdot 10^{-1}$	$1.6435 \cdot 10^{-3}$	$1.1171 \cdot 10^{-3}$
4	$7.5334 \cdot 10^{-1}$	$2.8192 \cdot 10^{-3}$	$9.5116 \cdot 10^{-4}$
5	$6.6501 \cdot 10^{-1}$	$4.0667 \cdot 10^{-3}$	$8.0286 \cdot 10^{-4}$
6	$5.8225 \cdot 10^{-1}$	$5.3961 \cdot 10^{-3}$	$6.6683 \cdot 10^{-4}$
7	$5.0507 \cdot 10^{-1}$	$6.8186 \cdot 10^{-3}$	$5.4376 \cdot 10^{-4}$
8	$4.3346 \cdot 10^{-1}$	$8.3984 \cdot 10^{-3}$	$4.3276 \cdot 10^{-4}$
9	$3.6740 \cdot 10^{-1}$	$1.0002 \cdot 10^{-2}$	$3.3247 \cdot 10^{-4}$
10	$3.0690 \cdot 10^{-1}$	$1.1805 \cdot 10^{-2}$	$2.4119 \cdot 10^{-4}$
11	$2.5194 \cdot 10^{-1}$	$1.3778 \cdot 10^{-2}$	$1.5724 \cdot 10^{-4}$
12	$2.0251 \cdot 10^{-1}$	$1.5964 \cdot 10^{-2}$	$7.9183 \cdot 10^{-5}$
13	$1.5860 \cdot 10^{-1}$	$1.8412 \cdot 10^{-2}$	$6.1096 \cdot 10^{-6}$
14	$1.2018 \cdot 10^{-1}$	$2.1192 \cdot 10^{-2}$	$-6.2092 \cdot 10^{-5}$
15	$8.7242 \cdot 10^{-2}$	$2.4405 \cdot 10^{-2}$	$-1.2440 \cdot 10^{-4}$
16	$5.9740 \cdot 10^{-2}$	$2.8208 \cdot 10^{-2}$	$-1.7812 \cdot 10^{-4}$
17	$3.7629 \cdot 10^{-2}$	$3.2860 \cdot 10^{-2}$	$-2.1798 \cdot 10^{-4}$
18	$2.0833 \cdot 10^{-2}$	$3.8825 \cdot 10^{-2}$	$-2.3389 \cdot 10^{-4}$

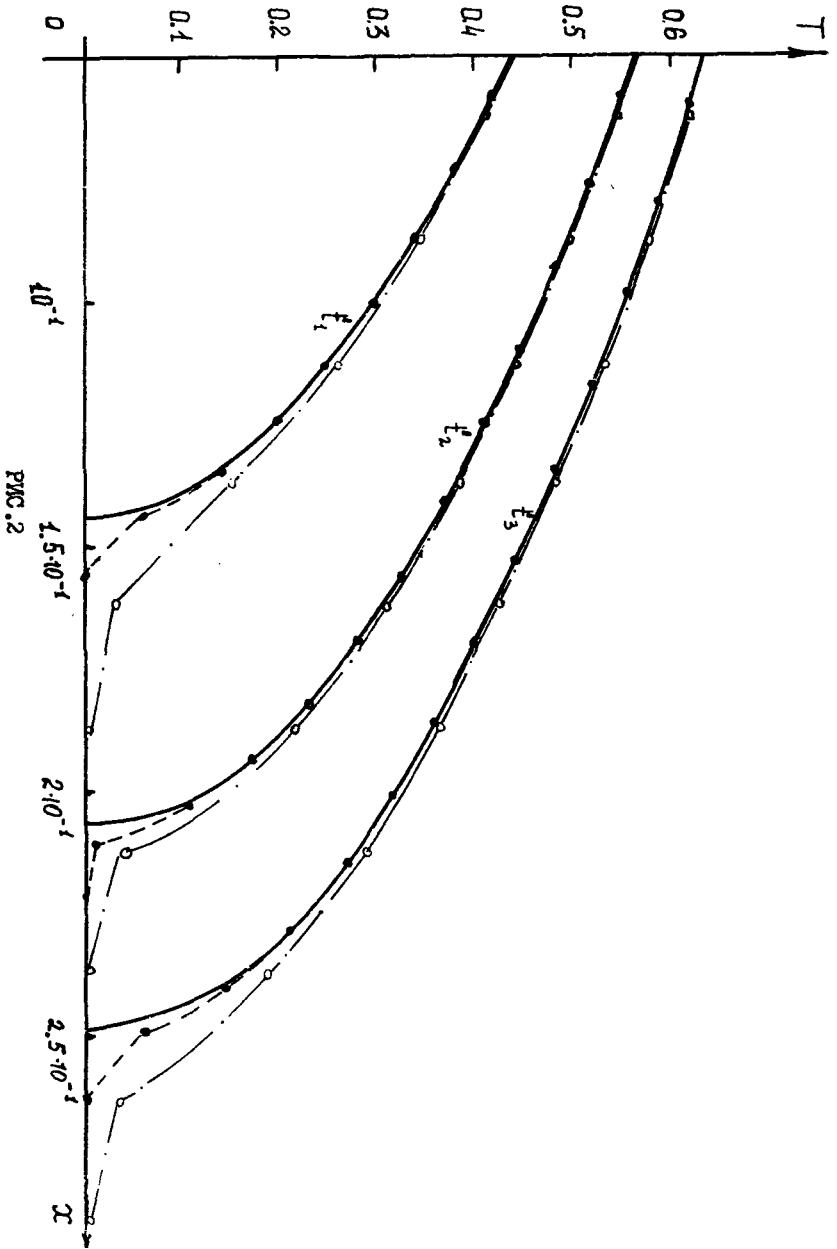
Таблица 5

	$T_{\text{числ.}}$	$x$	$\Delta T$
1	1.000	0.000	0.000
2	$8.9875 \cdot 10^{-1}$	$1.0223 \cdot 10^{-5}$	$4.0706 \cdot 10^{-3}$
3	$7.2273 \cdot 10^{-1}$	$3.2044 \cdot 10^{-5}$	$3.0928 \cdot 10^{-3}$
4	$5.6505 \cdot 10^{-1}$	$5.6721 \cdot 10^{-5}$	$2.0525 \cdot 10^{-3}$
5	$4.2686 \cdot 10^{-1}$	$8.4856 \cdot 10^{-5}$	$1.1695 \cdot 10^{-3}$
6	$3.0800 \cdot 10^{-1}$	$1.2763 \cdot 10^{-4}$	$4.1010 \cdot 10^{-4}$
7	$2.0849 \cdot 10^{-1}$	$1.5689 \cdot 10^{-4}$	$-2.1684 \cdot 10^{-4}$
8	$1.2832 \cdot 10^{-1}$	$2.0587 \cdot 10^{-4}$	$-5.0566 \cdot 10^{-4}$
9	$6.7478 \cdot 10^{-2}$	$2.7113 \cdot 10^{-4}$	$-7.0297 \cdot 10^{-4}$
10	$2.5996 \cdot 10^{-2}$	$3.6944 \cdot 10^{-4}$	$-8.1352 \cdot 10^{-4}$

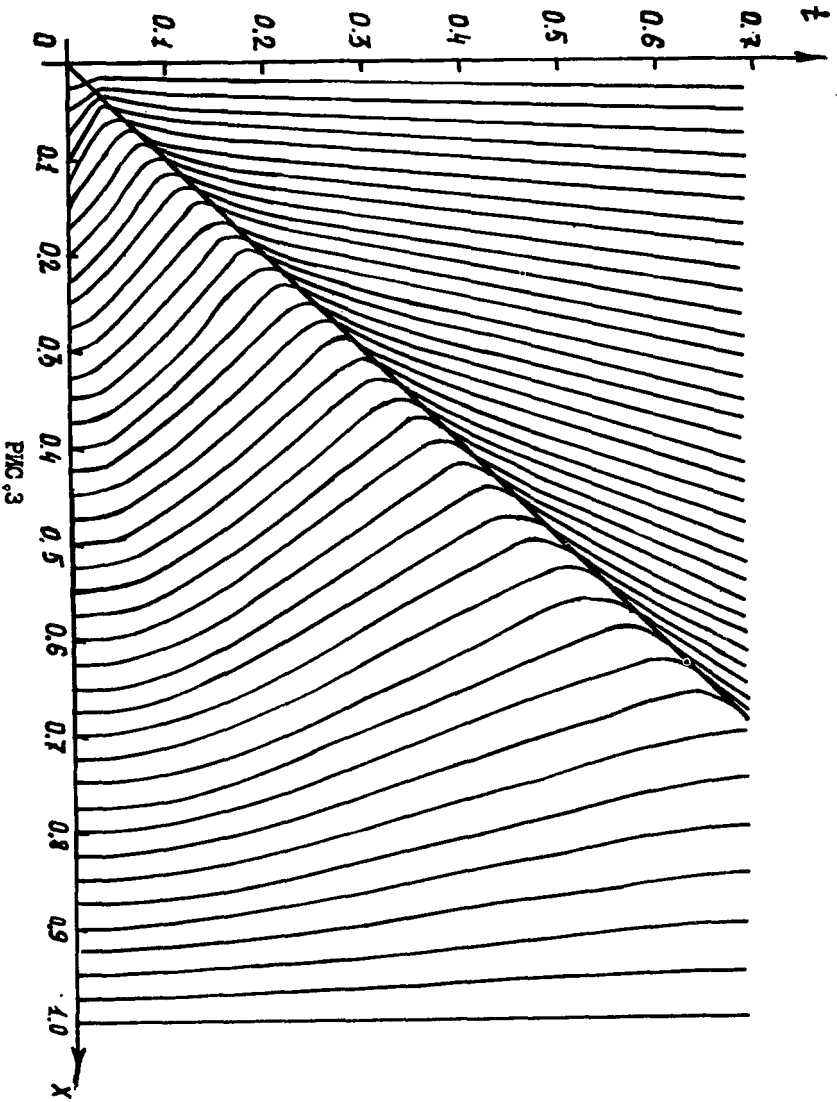








PVC.2



PINC.3

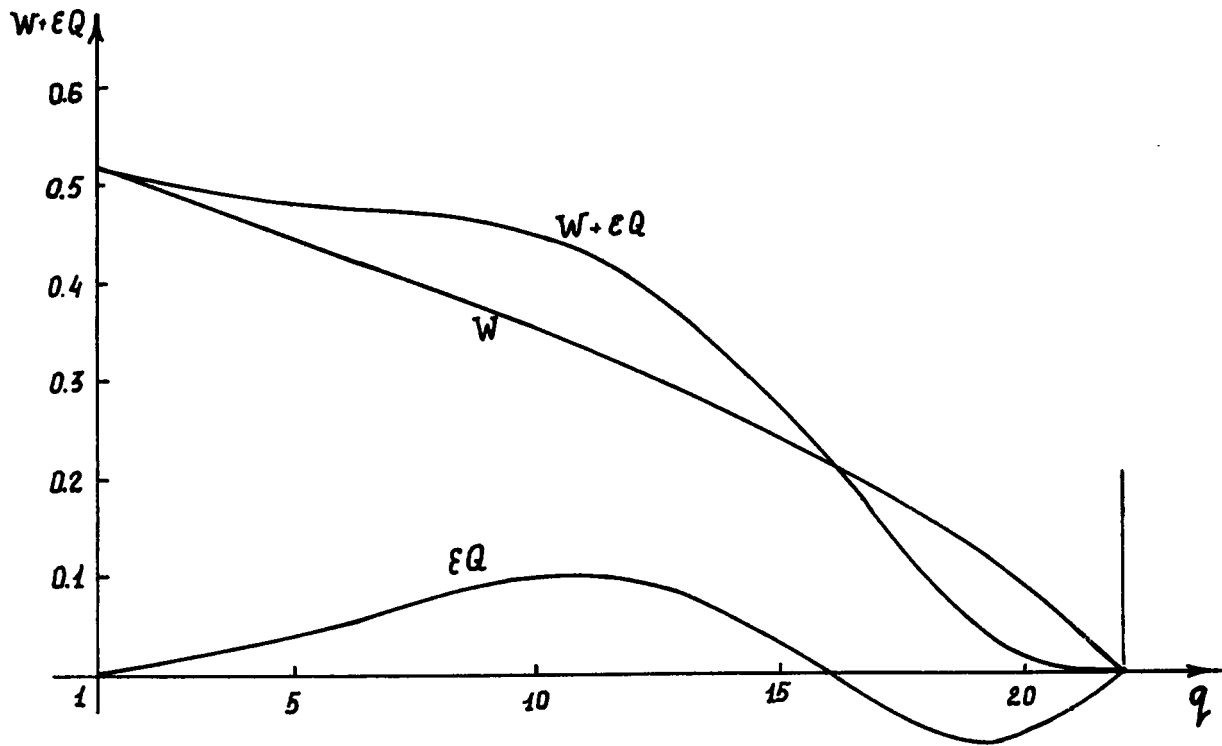
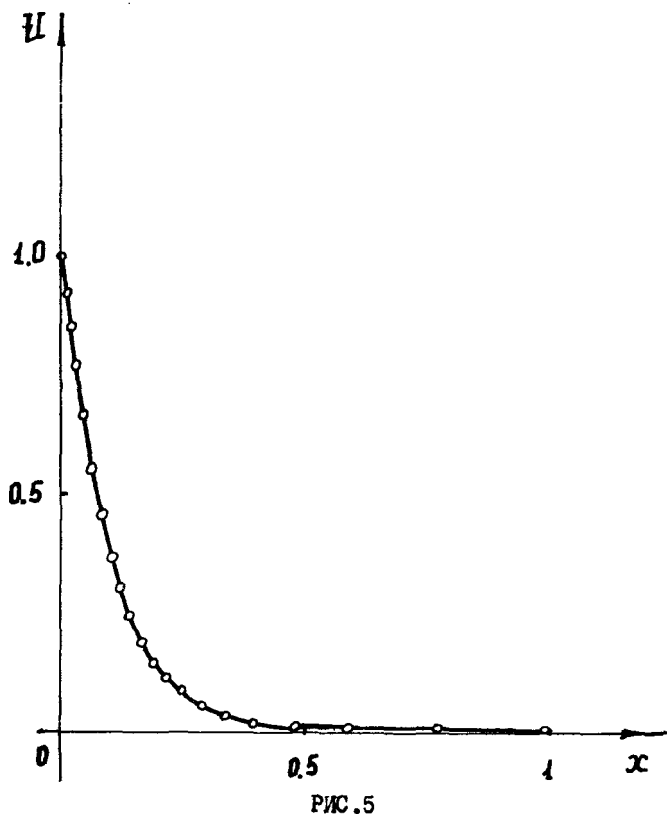


Рис. 4



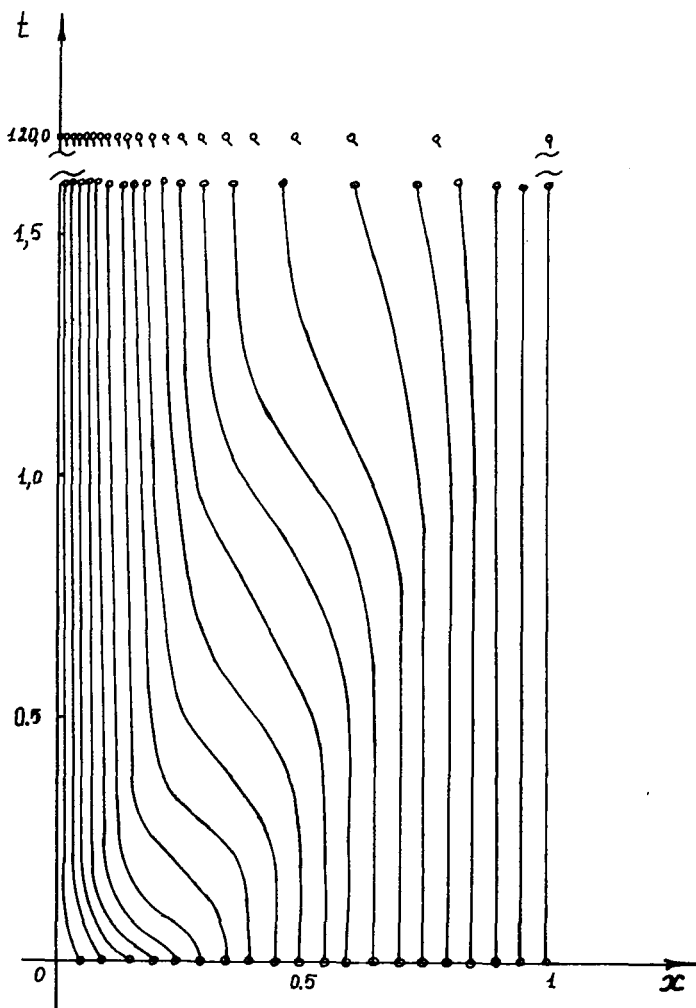
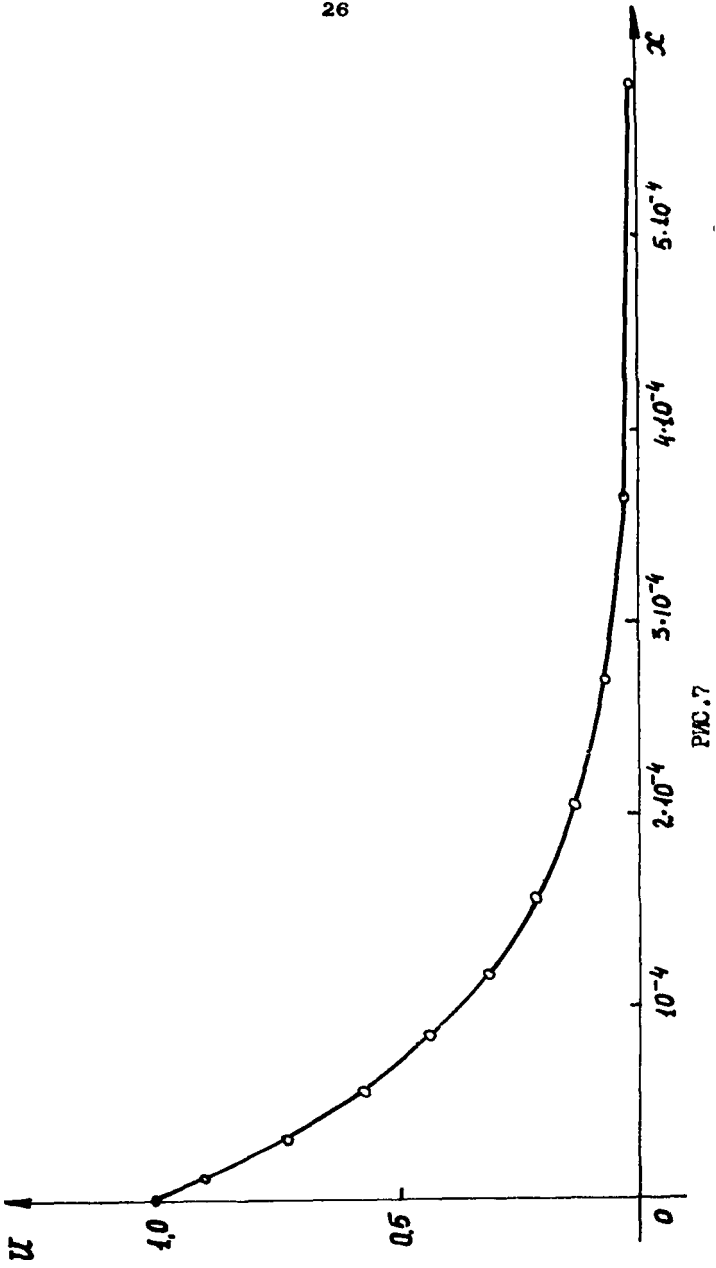


Рис. 6



PNC.7