

Н.А. ДАРЬИН, В.И. МАЖУКИН

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ АДАПТИВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СЕТОК

(Представлено академиком А.А. Самарским 18 IX 1986)

Точность решений уравнений в частных производных, полученных разностными методами, зависит от того, насколько хорошо согласуется распределение узлов разностной сетки с особенностями искомого решения. Очевидно, что два решения одной задачи, полученных на двух различных сетках с одинаковым числом узлов, будут иметь различную погрешность, причем меньшая погрешность будет получена на сетке с более оптимальным по отношению к искомому решению распределением узлов. Принцип оптимального распределения узлов положен в основу методов построения так называемых адаптивных сеток. Опыт использования адаптивных сеток для решения задач теплообмена и гидродинамики показал, что применение их наиболее эффективно в случаях, когда они динамически связаны с решением [1]. Одним из примеров построения адаптивных сеток, динамически связанных с решением, могут служить методы подвижных конечных элементов [2, 3]. В конечно-разностных методах наиболее известны два эвристических подхода к построению адаптивных сеток, в которых в качестве параметра, управляющего движением сетки, выбирается одна из характеристик численного решения: либо норма погрешности аппроксимации [4], либо скорость изменения решения [5, 6].

В настоящей работе на примере одномерной нестационарной задачи распространения теплового фронта рассматривается один из возможных подходов построения адаптивных сеток, динамически связанных с решением, для конечно-разностных методов. Основная идея предлагаемого подхода состоит в описании поведения узлов адаптивной сетки на дифференциальном уровне с помощью уравнения (или системы уравнений) в частных производных, являющегося неотъемлемой частью общей математической постановки задачи. Координаты узлов, наряду с искомыми значениями сеточных функций, должны определяться из решения единой дифференциальной задачи. Построение дифференциальной модели реализуется посредством введения некоторой неподвижной системы координат, эйлеровы образы которой изменяются со временем в зависимости от динамики искомого решения. В частности, узлы разностной сетки в физическом пространстве могут автоматически сгущаться в области больших градиентов, положение которых заранее неизвестно.

Введение в математическую модель дополнительного дифференциального уравнения, характеризующего движение узлов, позволяет производить поиск решения и построения расчетной сетки в самосогласованном режиме, что, в свою очередь, представляет возможность исключения процедуры переинтерполяции значений, обусловленной перестройкой сетки.

Рассмотрим одномерное физическое пространство  $\Omega_{x,t}: x_0 \leq x \leq x_R, t$  и некоторое вспомогательное (расчетное) пространство  $\Omega_{q,t}: q_0 \leq q \leq q_R, t$ . Предполагается, что в каждый момент времени существует невырожденное преобразование

$$(1) \quad x = x(q, t), \quad x_0 = (q_0, t), \quad x_R = x(q_R, t).$$

Пусть якобиан такого преобразования  $\psi(q, t)$  является некоторой дифференцируемой функцией, ставящей в соответствие элементу  $dx$  элемент  $\psi dq$ . Отметим, что  $\psi(q, t)$  может иметь различный физический смысл, например, характеризовать массу или линейные размеры элемента  $dq$ . Запишем систему дифференциальных уравнений, позволяющую одновременно описывать тепловые процессы и перемещать элементы  $dx$  по определенному закону. Введем функции  $W(q, t)$  и  $Q(q, t)$ , где  $W(q, t)$  — поток тепла в данной точке  $q$  в момент времени  $t$ ,  $Q(q, t)$  — некоторый поток, величина которого отлична от нуля, если соответствующая эйлерова координата  $x(q)$  изменяется со временем. Функция  $\psi(q, t)$  связана с потоком  $Q(q, t)$  следующим законом сохранения:

$$(2) \quad \int_q^{q+\Delta q} [\psi(q, t+\Delta t) - \psi(q, t)] dq = \int_t^{t+\Delta t} [Q(q, t) - Q(q+\Delta q, t)] dt.$$

Закон сохранения энергии для элемента  $\Delta q$  имеет вид

$$(3) \quad \int_q^{q+\Delta q} [\epsilon(q, t+\Delta t)\psi(q, t+\Delta t) - \epsilon(q, t)\psi(q, t)] dq = \\ = \int_t^{t+\Delta t} [W(q, t) - W(q+\Delta q, t)] dt + \int_t^{t+\Delta t} [\epsilon(q, t)Q(q, t) - \\ - \epsilon(q+\Delta q, t)Q(q+\Delta q, t)] dt.$$

Здесь  $\epsilon(q, t)$  — удельная внутренняя энергия. Второй интеграл в правой части (3) характеризует изменение энергии за счет потока  $Q$ , определяемого изменением координаты  $x$ . Устремляя  $\Delta q$  и  $\Delta t$  к нулю, запишем законы сохранения (2), (3) в дифференциальной форме:

$$(4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial q},$$

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\psi \epsilon) = - \frac{\partial W}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q} (Q\epsilon), \quad W(q, t) = - \frac{\lambda(T)}{\psi} \frac{\partial T}{\partial q}, \quad \epsilon' = \epsilon(T),$$

$$(6) \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \psi.$$

Уравнение (4) является уравнением непрерывности и выражает собой тот факт, что элементы  $dx$  не появляются и не исчезают, а лишь изменяют свои линейные размеры по закону, определяемому потоком  $Q$ . Поток  $Q$  формально является произвольной функцией и лишь условие (1) приводит к вполне понятным требованиям  $Q(q_0, t) = Q(q_R, t) = 0$ . Уравнение (6) выражает связь между координатами в физическом и расчетном пространствах.

В дальнейшем, переходя к дискретным пространствам  $\bar{\Omega}_{x,t}$  и  $\bar{\Omega}_{q,t}$ , в которых дифференциальные уравнения (4)–(6) аппроксимируются конечно-разностными, используем указанные свойства дифференциальной модели для построения адаптивной сетки. Отметим, что произвольность величины  $Q$  можно при этом использовать в различных целях, в частности, например, специальным выбором выражения  $Q$  в виде

$$(7) \quad Q = -D_0 \frac{\partial \psi}{\partial q} - Q_0 \frac{\partial}{\partial q} \left( \psi \left| \frac{\partial T}{\partial q} \right| \right)$$

можно добиться сгущения узлов сетки в физическом пространстве в области больших градиентов, т.е. построить адаптивную сетку, динамически связанную с искомым

решением. В выражении (7) первый член ограничивает чрезмерное сближение узлов, а второй член обеспечивает сгущение узлов в физическом пространстве в области больших градиентов температуры  $T$ .  $D_0$  и  $Q_0$  — в простейшем случае положительные произвольные константы, в более общем случае их можно выразить через теплофизические характеристики среды или другие параметры задачи.

В качестве примера построение адаптивной сетки, динамически связанной с искомым решением, рассмотрим задачу о движении тепловой волны, описываемой нелинейным уравнением теплопроводности

$$(8) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T^n \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x > 0, \quad t > 0,$$

которое, в частности, имеет решение типа бегущей волны:

$$(9) \quad T(x, t) = \begin{cases} (Dn)^{1/n}(Dt - x)^{1/n}, & x < Dt, \\ 0, & x \geq Dt, \end{cases}$$

так что  $T(0, t) = T_0 t^{1/n}$ ,  $T_0 = (D^2 n)^{1/n}$ ,  $T(x, 0) = 0$ .

Для численного решения задачи (8) система (4)–(6) рассматривалась с граничными условиями:

$$\begin{aligned} T(q, 0) &= 0, \quad \psi(q, 0) = 1, \quad q_0 \leq q \leq q_R, \\ T(q_0, t) &= (Dn)^{1/n}(Dt)^{1/n}, \quad D = 1, \quad n = 2, \quad Q(q_0, t) = Q(q_R, t) = 0. \end{aligned}$$

Уравнения (4)–(6) аппроксимировались конечно-разностными соотношениями по полностью неявной разностной схеме [7] и после несложных преобразований сводились к двум трехточечным разностным уравнениям, для решения которых использовался метод матричной прогонки [8] с итерациями по нелинейности.

На рис. 1–3 представлены результаты численного моделирования для различных значений  $D_0$  и  $Q_0$ . На рис. 1 сравниваются точное и численное решение, построенное на сетке с фиксированными узлами. Неподвижная сетка ( $D_0 = Q_0 = 0$ ), используемая в расчетах, состояла из 40 узлов. Расположение узлов расчетной сетки на рис. 1, 2 отмечено точками. Точное решение представлено сплошными линиями. Нетрудно понять, что при  $n = 2$  пространственное распределение  $T(x, t)$  характеризуется большим градиентом вблизи фронта тепловой волны. Численное решение обозначено штрих-пунктирными линиями. Из сравнения кривых следует, что в области фронта тепловой волны погрешность численного решения достигает наибольшего значения.

На рис. 2 представлены результаты численного решения задачи на адаптивной сетке, полученные на те же моменты времени (штриховые линии) при значениях параметров  $D_0 = 1$ ,  $Q_0 = 10$ . Общее число узлов сетки и их расположение в момент времени  $t = 0$  выбиралось таким же, как и в варианте, представленном на рис. 1. Результаты расчетов показали, что численное решение, полученное на адаптивной сетке, имеет существенно большую точность, обусловленную тем, что в области ненулевого решения концентрируется в несколько раз большее число узлов, количество и местоположение которых указано на графиках точками.

На рис. 3 приведена  $x, t$ -диаграмма движения точек разностной сетки при значениях параметров  $D_0 = Q_0 = 1$ . Прямая линия, выходящая из начала координат, соответствует положению фронта тепловой волны, верхняя часть диаграммы характеризует положение точек под кривой  $T(x, t)$ . Кривые свидетельствуют о том, что включение даже простейшего механизма адаптации приводит к концентрации узлов сетки в области больших градиентов, что приводит к существенному повышению точности численного решения.

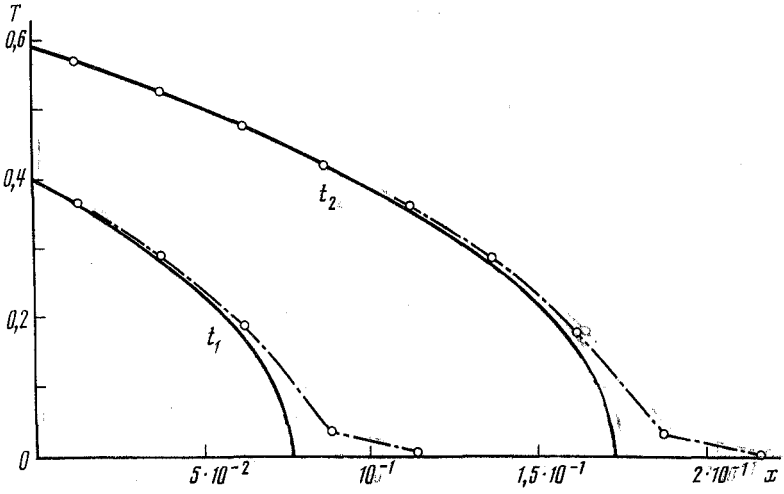


Рис. 1

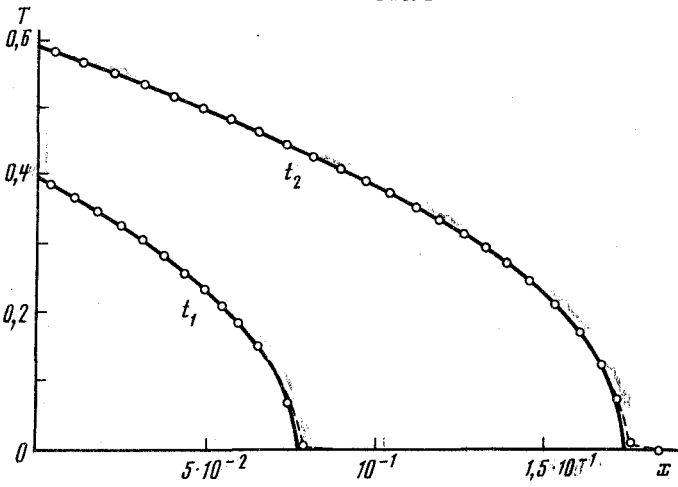


Рис. 2

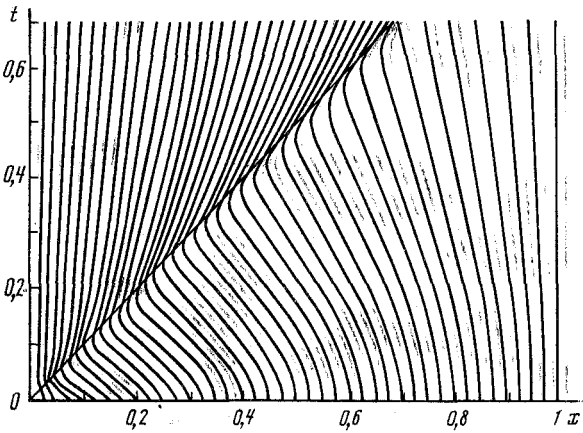


Рис. 3

В заключение отметим, что предлагаемый способ введения адаптации на уровне дифференциальной задачи позволяет построить адаптивные подвижные сетки для задач теплообмена и гидродинамики. Этот способ достаточно удобен, имеет ясный физический смысл, а его применение, как показано авторами, не приводит к возникновению связанных колебаний сетки и решения, отмечавшихся в работах [1, 2].

Авторы выражают искреннюю признательность А.А. Самарскому за полезные дискуссии и ряд ценных замечаний.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
4 X 1986

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Thompson J.F.* — AIAA J., 1984, vol. 22, № 11, p. 1505–1523.
2. *Miller K., Miller R.N.* — SIAM J. Num. Anal., 1981, vol. 18, № 6, p. 1019–1057.
3. *Gelinas R.J., Doss S.K., Miller K.* — J. Comp. Phys., 1981, vol. 40, p. 202–249.
4. *Rai M.M., Anderson D.A.* — Ibid., vol. 43, p. 327–344; AIAA J., 1982, vol. 20, № 4, p. 496–502.
5. *Dwyer H.A., Kee R.J., Sanders B.R.* — AIAA J., 1980, vol. 18, № 10, p. 1205–1212; *Dwyer H.A.* — Ibid., 1984, vol. 22, № 12, p. 1705–1712.
6. *Acharya S., Patankar S.V.* — Int. J. Heat and Mass Trans., 1985, vol. 28, p. 1057–1065.
7. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 654 с.
8. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 590 с.

УДК 517.9:537.8

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Е.В. ЗАХАРОВ, С.И. САФРОНОВ

### МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕЗАМКНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 3 X 1986)

1. В настоящее время достаточно хорошо разработаны методы численного решения задач дифракции электромагнитных волн с гармонической зависимостью от времени на идеально проводящих незамкнутых поверхностях произвольной формы [1, 2]. Однако для целого ряда областей современной радиофизики и радиотехники (например, в импульсной технике, радиолокации) представляют значительный интерес нестационарные задачи дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях. Обычно задачи этого класса применением преобразования Фурье по времени приводят к задачам в частотной области. При этом возникает необходимость в решении множества задач для различных частот, а для восстановления временных зависимостей поля — применения обратного преобразования Фурье по частоте. Такой подход требует значительных затрат машинного времени и далеко не всегда дает возможность получить окончательный результат.

В настоящей работе рассмотрен метод прямого численного решения нестационарной задачи дифракции электромагнитных волн на незамкнутой поверхности  $S$ , основанный на сведении к системе двух интегродифференциальных уравнений по поверхности относительно плотности тока, наведенного первичным полем. Проведена алгоритмизация интегродифференциальных уравнений и дан пример реализации.