

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ АДАПТИВНЫХ СЕТОК ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

ДАРЬИН Н. А., МАЖУКИН В. И.

(Москва)

Рассмотрен метод построения адаптивных сеток, динамически связанных с решением.

### Введение

Задаче построения разностных сеток уделяется в последние годы большое внимание. Существует мнение [1], что окончательного разрешения многих численных задач математической физики следует ожидать не столько от улучшения способов разностной аппроксимации уравнений в частных производных и усовершенствования алгоритмов решения сеточных уравнений, сколько от правильного выбора расчетной сетки. Есть несколько глобальных направлений расчета, генерации и применения расчетных сеток. Одно из них — подвижные сетки, позволяющие при фиксированном общем числе узлов уменьшить погрешность численного решения за счет более оптимального по отношению к особенностям решения расположения узлов сетки. Принцип оптимального распределения узлов положен в основу методов построения так называемых адаптивных сеток. Опыт использования адаптивных сеток для решения задач теплообмена и гидродинамики показал, что применение их наиболее эффективно в случаях, когда они динамически связаны с решением [2]. Отметим, что разработка методов построения адаптивных сеток находится в стадии интенсивного развития и, в силу этого обстоятельства, пока невозможно указать методы, которым следовало бы отдавать явное предпочтение.

Одним из наиболее важных элементов построения адаптивных сеток, динамически связанных с решением, является выбор характеристики численного решения, используемой в качестве параметра, управляющего перемещением узлов сетки. В методах подвижных конечных элементов [3], [4] для этих целей используется система разностных уравнений, получаемых с помощью проекционного метода Галеркина.

При решении многомерных стационарных задач [5], [6] наибольшее распространение, по-видимому, получил вариационный принцип построения адаптивных сеток и его различные модификации. В основе этого подхода лежит задача минимизации одной или нескольких характеристик искомого численного решения. В нестационарных задачах наряду с вариационным принципом [7] существует несколько эвристических подходов к построению адаптивных сеток, в которых в качестве управляющего параметра выбирается либо норма погрешности аппроксимации [8], либо скорость изменения решения [9], [10].

В настоящей работе излагается один из способов построения адаптивных сеток посредством автоматического преобразования координат, осуществляемого с помощью искомого решения. Рассматривается одна из возможных областей приложения данного способа — адаптация расчетной сетки к большим градиентам решения.

### § 1. Дифференциальная модель

Основная идея нашего подхода состоит в предложении описывать поведение узлов адаптивной сетки на дифференциальном уровне с помощью уравнения (или системы уравнений) в частных производных, что является неотъемлемой частью общей математической постановки задачи. Координаты узлов наряду с искомыми значениями сеточных функций должны определяться при этом из решения единой дифференциальной задачи. Дифференциальная модель строится преобразованием исходного физического пространства в некоторое расчетное, в котором математическое описание исследуемых явлений дополняется уравнениями, характеризующими распределение узлов сетки в зависимости от искомого решения. В частности, узлы разностной сетки в физическом пространстве могут автоматически сгущаться в области больших градиентов, положение которых заранее не известно.

Метод рассматривается на примере модельной задачи о распространении теплового фронта в среде. Берется одномерное физическое пространство  $\Omega_{x,t}$ :  $x_0 \leq x \leq x_R, t$  и некоторое расчетное  $\Omega_{q,t}$ :  $q_0 \leq q \leq q_R, t$ . Предполагается, что на каждый момент времени существует невырожденное преобразование

$$(1) \quad x = x(q, t), \quad x(q_0, t) = x_0, \quad x(q_R, t) = x_R,$$

конкретный вид которого указан ниже. Пусть якобианом такого преобразования является некоторая безразмерная дифференцируемая функция  $\psi(q, t)$ , ставящая в соответствие элементу  $dx$  элемент  $dq$ . Отметим, что  $\psi(q, t)dq$  может иметь различный физический смысл, например характеризовать массу элемента течения  $dq$ . Введем функции  $W(q, t)$  и  $Q(q, t)$ , где  $W(q, t)$  — поток тепла в данной точке  $q$  в момент времени  $t$ ,  $Q(q, t)$  — некоторый поток, величина которого отлична от нуля, если соответствующая эйлерова координата  $x(q)$  изменяется со временем.

Функция  $\psi(q, t)$  связана с потоком  $Q(q, t)$  следующим законом сохранения:

$$(2) \quad \int_q^{q+\Delta q} [\psi(q, t+\Delta t) - \psi(q, t)] dq = \int_t^{t+\Delta t} [Q(q, t) - Q(q+\Delta q, t)] dt.$$

Закон сохранения энергии для элемента  $\Delta q$  в интегральной форме имеет вид

$$(3) \quad \begin{aligned} & \int_q^{q+\Delta q} [\varepsilon(q, t+\Delta t) \psi(q, t+\Delta t) - \varepsilon(q, t) \psi(q, t)] dq = \\ & = \int_t^{t+\Delta t} [W(q, t) - W(q+\Delta q, t)] dt + \\ & + \int_t^{t+\Delta t} [\varepsilon(q, t) Q(q, t) - \varepsilon(q+\Delta q, t) Q(q+\Delta q, t)] dt. \end{aligned}$$

Здесь  $\varepsilon$  — внутренняя энергия. Второй интеграл в правой части характеризует изменение энергии за счет потока  $Q$ , определяемого изменением координаты  $x$ . Предполагая дифференцируемость подынтегральных функций и переходя к пределу при  $\Delta q, \Delta t \rightarrow 0$ , записываем законы сохранения (2), (3) в дифференциальной форме:

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\psi \varepsilon) = - \frac{\partial W}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q} (Q \varepsilon), \quad \varepsilon = \varepsilon(T),$$

$$(5) \quad \partial \psi / \partial t = - \partial Q / \partial q,$$

$$(6) \quad \partial x / \partial q = \psi.$$

Дифференциальная модель (4)–(6) позволяет одновременно описывать поведение температуры и изменение линейных размеров элементов физического пространства  $\Omega_{x,t}$ . Так, относительное удлинение элемента  $dx$  характеризуется функцией  $\psi$ . При переходе к сеточному пространству  $\bar{\Omega}_{q,t}$  разностные аналоги уравнений (5), (6) используются для построения подвижных расчетных сеток в пространстве  $\Omega_{x,t}$ .

С учетом преобразования (6) выражение для теплового потока  $W(x, t) = -\lambda(T) dT/dx$  в переменных  $q, t$  запишется в виде  $W(q, t) = -(\lambda(T)/\psi) \partial T / \partial q$ . Вид функции  $Q$  в общем случае произволен, и лишь условия (1) налагают вполне понятные требования  $Q(q_0, t) = Q(q_R, t) = 0$ . Произвольность выражения для  $Q$  можно использовать в различных целях; в частности, специальным заданием  $Q$  в виде

$$(7) \quad Q = -\chi_0 \frac{\partial \psi}{\partial q} - Q_0 \frac{\partial}{\partial q} \left( \psi \left| \frac{\partial T}{\partial q} \right| \right)$$

и последующим решением системы уравнений (4)–(6) можно добиться автоматического сгущения узлов в физическом пространстве  $\Omega_{x,t}$  в области больших градиентов, т. е. построить адаптивную сетку, динамически связанную с искомым решением. В (7) первый член ограничивает чрезмерное сближение узлов, второй — обеспечивает сгущение узлов в эйлеровом пространстве в области больших градиентов температуры  $T$ . Величины  $\chi_0$  и  $Q_0$  в простейшем случае — положительные произвольные константы, подбираемые в ходе расчетов. В более общем случае их можно выразить через теплофизические характеристики среды или другие параметры задачи.

## § 2. Разностная аппроксимация

Область интегрирования  $q_0 \leq q \leq q_R$  в расчетном пространстве разбивается на  $N$  ячеек. Величины  $\epsilon$ ,  $T$ ,  $\psi$  относятся к серединам,  $x$ ,  $W$ ,  $Q$  — к границам ячеек. Разностная аппроксимация дифференциальных уравнений (4)–(6) по полностью неявной схеме имеет вид

$$(8) \quad \frac{(\psi \epsilon)_{i+1/2}^{j+1} - (\psi \epsilon)_{i+1/2}^j}{\tau} = - \frac{W_{i+1}^{j+1} - W_i^{j+1}}{h_{i+1/2}} - \frac{(Q \epsilon)_{i+1}^{j+1} - (Q \epsilon)_i^{j+1}}{h_{i+1/2}},$$

$$(9) \quad \frac{\psi_{i+1/2}^{j+1} - \psi_{i+1/2}^j}{\tau} = - \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{h_{i+1/2}},$$

$$(10) \quad \frac{x_{i+1}^{j+1} - x_i^{j+1}}{h_{i+1/2}} = \psi_{i+1/2}^{j+1},$$

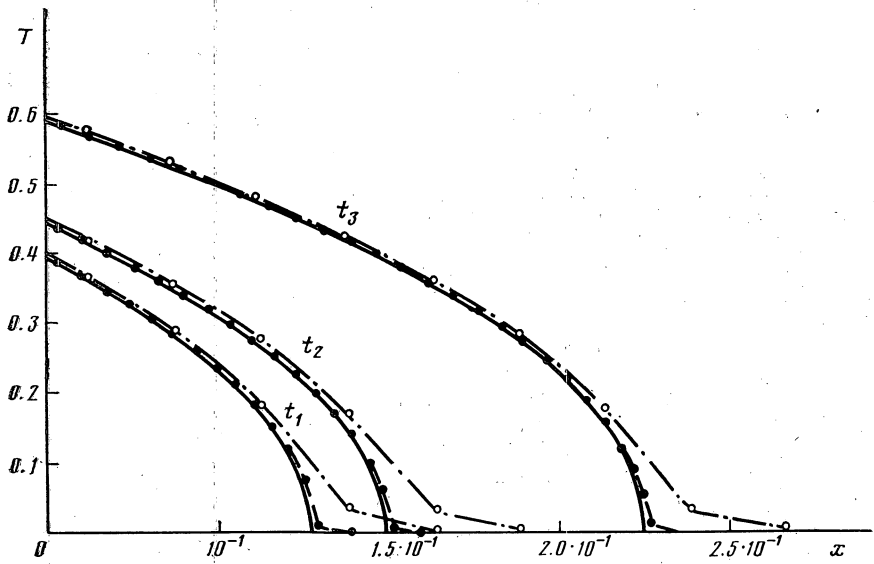
$$(11) \quad W_i^{j+1} = - \frac{\lambda_i^{j+1}}{\psi_i^{j+1}} \frac{T_{i+1/2}^{j+1} - T_{i-1/2}^{j+1}}{0.5(h_{i+1/2} + h_{i-1/2})},$$

$$(12) \quad Q_i^{j+1} = - \chi_0 \frac{\psi_{i+1/2}^{j+1} - \psi_{i-1/2}^{j+1}}{0.5(h_{i+1/2} + h_{i-1/2})} - Q_0 \left( \psi_{i+1/2}^{j+1} \frac{|T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}|}{h_{i+1/2}} - \psi_{i-1/2}^{j+1} \frac{|T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}|}{h_{i-1/2}} \right) [0.5(h_{i+1/2} + h_{i-1/2})]^{-1}, \quad i=1, 2, \dots, N,$$

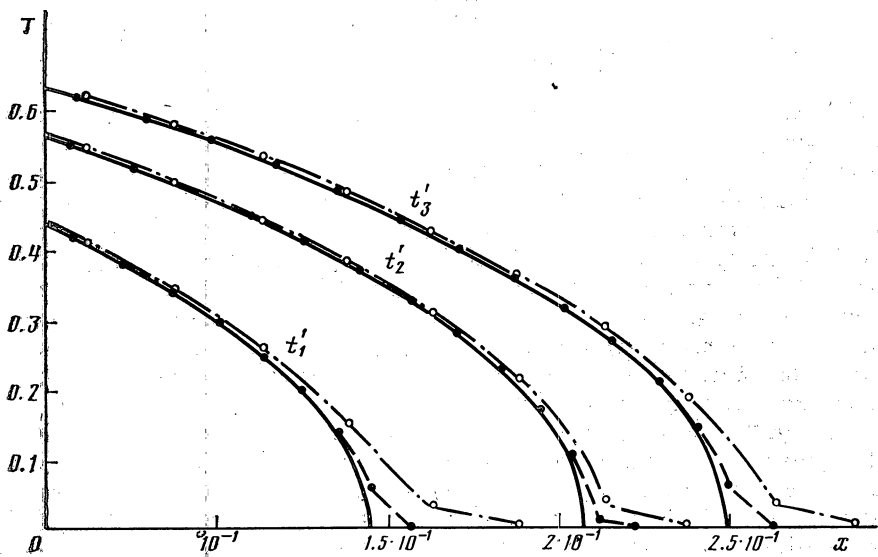
где  $j$  — номер временного слоя,  $\tau$ ,  $h$  — временной и пространственный шаги интегрирования соответственно. Значения функций  $\epsilon$ ,  $T$ ,  $\psi$  в целых точках вычислялись по формуле

$$y_i = \frac{\psi_{i-1/2} y_{i+1/2} + \psi_{i+1/2} y_{i-1/2}}{\psi_{i+1/2} + \psi_{i-1/2}}.$$

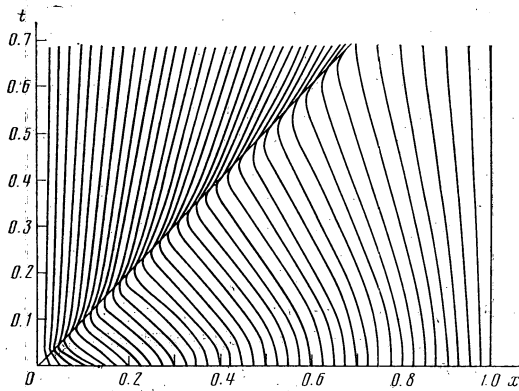
Выписанная система разностных уравнений (2)–(10) нелинейна и должна решаться с помощью итерационных процедур. Разностные уравнения (8), (9) с учетом выражений (11), (12) являются пятиточечными, однако если в выражении (12) использовать значения производной по температуре с предыдущей итерации, то система (8)–(12) сводится к трехточечной и для ее решения можно использовать метод матричной прогонки с итерациями по нелинейности [11].



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

### § 3. Результаты расчетов

Возможности предлагаемого метода адаптации проиллюстрируем на примере одномерной нестационарной задачи распространения теплового фронта. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$(13) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T^n \frac{\partial T}{\partial x} \right),$$

допускающее решение типа бегущей волны [12]

$$T(x, t) = \begin{cases} (Dn)^{1/n} (Dt-x)^{1/n}, & x < Dt, \\ 0, & x \geq Dt, \end{cases}$$

где  $D, n$  – положительные константы.

Нелинейное уравнение (13) численно решалось с помощью разностных схем (8), (9). В расчетах использовались следующие граничные и начальные условия:

$$T(q_0, t) = (Dn)^{1/n} (Dt)^{1/n}, \quad n=2, \quad D=1, \quad T(q_R, t) = 0, \\ T(q, 0) = 0, \quad \psi(q, 0) = 1, \quad q_0 \leq q \leq q_R, \quad Q(q_0, t) = Q(q_R, t) = 0, \quad q_0 = 0, \quad q_R = 1.$$

Аналитическое решение задачи (на фиг. 1, 2 оно показано сплошными линиями) сравнивается с численными, полученными как на фиксированной (штрихпунктирные линии), так и на адаптивной (штриховые линии) сетках. На фиг. 1 представлены результаты для случая, когда обе сетки имели одинаковое общее число узлов  $N=40$ . Точки на графиках – расположения узлов в различные моменты времени. Из сравнения кривых следует, что при использовании фиксированной сетки погрешность численного решения невелика, но вблизи фронта резко возрастает. Применение адаптивной сетки ( $\chi_0=1, Q_0=10$ ) с таким же общим числом узлов  $N=40$  позволило за счет большей концентрации узлов в области ненулевого решения существенно увеличить точность численного решения как в глубине, так и на фронте тепловой волны. Более того, расчет на адаптивной сетке с вдвое меньшим общим числом  $N=20$  показал (см. фиг. 2), что точность решения и в этом случае существенно выше, чем у решения на фиксированной сетке из 40 узлов.

На фиг. 3 показана  $(x, t)$ -диаграмма движения узлов адаптивной сетки ( $\chi_0=Q_0=1$ ). Прямая линия, выходящая из начала координат, соответствует положению фронта тепловой волны, верхняя часть диаграммы характеризует положение узлов под кривой  $T(x, t) \neq 0$ . Согласно  $(x, t)$ -диаграмме, узлы адаптивной сетки группируются в области больших градиентов, что в конечном итоге и приводит к повышению точности численного решения.

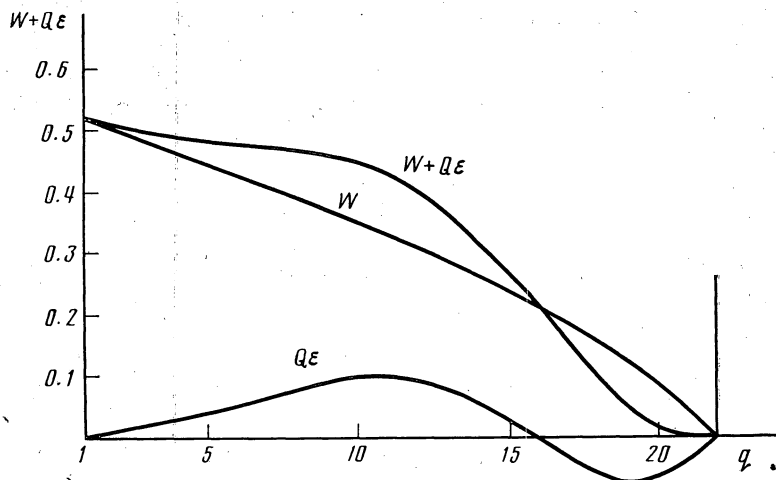
### § 4. Качественный анализ погрешности аппроксимации

Существует широко распространенное мнение, что численные расчеты на сильно неравномерных сетках характеризуются низкой точностью. Однако в случае адаптивных сеток этого не происходит, поскольку изменение положения узлов и динамика искомого решения взаимосвязаны. Выполним небольшой качественный анализ погрешности аппроксимации разностной схемы (8) в переменных  $q, t$ . Воспользуемся для этих целей аппаратом метода дифференциального приближения [13]. Первое дифференциальное приближение для разностной схемы (8) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial q}(W + Q \varepsilon) = -1/2 \tau \frac{\partial^2}{\partial q \partial t}(W + Q \varepsilon) - \\ - \frac{1}{3!} \left[ \frac{h^2}{4} \frac{\partial^3}{\partial q^3}(W + Q \varepsilon) + 2\tau^2 \frac{\partial^3}{\partial q \partial t^2}(W + Q \varepsilon) \right].$$

Из этого выражения следует, что формально порядок погрешности аппроксимации разностной схемы  $O(\tau+h^2)$ , а конкретная величина погрешности определяется произведением шагов  $\tau$  и  $h^2$  на соответствующие производные функции  $W+Q\varepsilon$ . Проанализируем поведение функции  $W+Q\varepsilon$  и оценим величины ее производных в окрестности фронта тепловой волны.

В случае неподвижной эйлеровой сетки  $Q=0$  уже первая производная  $\partial W/\partial x = -2^{1/2}(t-x)^{-1/2}$  вблизи фронта неограниченно возрастает, что приводит, по сути дела,



Фиг. 4

к потере аппроксимации в этой области. Следствием этого является большая погрешность численного решения (штрихпунктирные линии на фиг. 1, 2).

На фиг. 4 показано поведение функций  $W$ ,  $Q\varepsilon$ ,  $W+Q\varepsilon$  при использовании адаптивной сетки. Положение фронта отмечено на графике вертикальной чертой. Обращает на себя внимание факт обращения в нуль величины  $W+Q\varepsilon$  и малость ее производных вблизи фронта. Таким образом, взаимосвязь потока  $Q$ , определяющего положение узлов, и решения  $\varepsilon$  приводит к тому, что погрешность аппроксимации в области наибольших градиентов стремится к нулю, что и вызывает в конечном итоге повышение точности численного решения (штриховые линии на фиг. 1, 2).

В заключение отметим, что предлагаемый метод построения адаптивных сеток легко обобщить и использовать для выделения ряда других особенностей решения, обусловленных, например, подвижными границами, возникновением и распространением особых разрывов и ударных волн внутри расчетной области.

#### Литература

1. Thompson J. F. Grid generation techniques in computational fluid dynamics // AIAA Journal. 1984. V. 22, № 11. P. 1505–1523.
2. Thompson J. F. Numerical grid generation. Amsterdam: North-Holland, 1982.
3. Miller K., Miller R. N. Moving finite elements. I, II // SIAM J. Numer. Anal. 1981. V. 18, № 6. P. 1019–1057.
4. Gelinis R. J., Doss S. K., Miller K. The moving finite elements method: Applications to general partial differential equations with multiple large gradients // J. Comput. Phys. 1981. V. 40, № 1. P. 202–249.
5. Ковеня В. М., Яценко Н. Н. Разностная схема на подвижных сетках для решения уравнений вязкого газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т. 19, № 1. С. 174–188.
6. Дегтярев Л. М., Дроздов В. В. Адаптирующиеся к решению сетки в эллиптических задачах на плоскости // Дифференц. ур-ния. 1984. Т. 20, № 7. С. 1194–1203.
7. Brackbill J. U. Coordinate system control; adaptive meshes // Numer. Grid Generation. Amsterdam: North-Holland, 1982. P. 277–293.
8. Rai M. M., Anderson D. A. Application of adaptive grids to fluid-flow problems with asymptotic solutions // AIAA Journal. 1982. V. 20, № 4. P. 496–502.

9. *Dwyer H. A., Kee R. J., Sanders B. R.* Adaptive grid method for problems in fluid mechanics and heat transfer // AIAA Journal. 1980. V. 10. № 10. P. 1205–1212.
10. *Dwyer H. A.* Grid adaptive for problems in fluid dynamics // AIAA Journal. 1984. V. 22. № 12. P. 1705–1712.
11. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
12. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
13. *Шокин Ю. И.* Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 13.XI.1986  
Переработанный вариант 28.VIII.1987