

Академия наук БССР

Институт тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова

ТЕПЛОМАССООБМЕН -
ММФ
HEAT/MASS TRANSFER -
MIF

Проблемные доклады

МИНСКИЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ ФОРУМ
(24 - 27 мая 1988 года)

Минск, СССР

СЕКЦИИ 8,9

Вычислительный эксперимент
в задачах теплообмена
и теплопроводности

Минск 1988

В.И. Мажукин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОБЛЕМЫ СТЕФАНА
НА АДАПТИВНОЙ СЕТКЕ

Под классической задачей Стефана обычно понимается класс математических моделей, описывающих тепловые процессы с фазовыми переходами I рода в чистом веществе. В наиболее полном рассмотрении задача Стефана представляется как движение сплошной среды, описываемое полной системой уравнений гидродинамики, с сильным разрывом (разрыв I рода), на котором скачком изменяются внутренняя энергия, плотность и теплофизические характеристики среды. Решение задачи состоит в определении гидродинамических величин, тепловых полей и границы фазового перехода. В переменных Эйлера положение границы раздела фаз $\Gamma_{se}(t)$, а значит, и область определения решения $\Omega_x(t)$ не известны и подлежат определению в ходе решения задачи. С этим обстоятельством связаны основные математические трудности решения задачи Стефана.

Существующие в настоящее время методы численного решения задач типа Стефана можно условно разбить на два класса: методы с явным выделением фронта и методы сквозного счета. Численные методы, содержащие процедуру явного выделения фазовых фронтов, отличаются большим разнообразием подходов к решению проблемы. Среди них: метод ловли фронта в узел / 1 /, в котором с помощью итерационной процедуры шаг интегрирования по времени подбирается так, чтобы фазовый фронт по пространственной координате сместился на один узел; метод дробных шагов / 2 /; метод прямых / 3 /; метод выпрямления фронтов / 4 /, основанный на замене пространственной переменной X с помощью преобразования Ландау $X = \xi \eta$, где ξ характеризует положение фазовой границы; метод потенциала / 5 /; метод переменных сеток / 6 /, использующий интерполяционные процедуры; метод миграции изотерм / 7 /, в котором зависимая и независи-

мая переменные меняются местами, и др. Эти методы, как правило, обладают высокой точностью определения межфазной границы, но становятся весьма громоздкими алгоритмически и требуют больших затрат машинного времени в случае многофазных и многомерных задач.

Отсутствие достаточно эффективных алгоритмов определения классического решения и все возрастающее количество прикладных проблем стимулировали развитие иного подхода к решению задач Стефана. Для математического моделирования определенного класса задач, связанных с фазовыми превращениями вещества, в которых точное положение границы раздела не играет существенной роли, эффективными оказались методы, позволяющие находить обобщенное решение задачи Стефана. В основу этих методов положена идея отказа от непосредственного поиска неизвестной фазовой границы и замены его процедурой сглаживания функции теплосодержания [8, 9]. Для получения обобщенных решений были разработаны экономичные алгоритмы сквозного счета [10, 11], эффективность которых особенно заметна в многомерных постановках, использующих теплопроводностное приближение. К недостаткам методов сквозного счета обычно относят низкую точность определения положения фазового фронта и их чувствительность к выбору параметра сглаживания [12], определить значение которого априори в ряде случаев затруднительно.

Новые проблемы, связанные с фазовыми превращениями вещества, возникли при интенсивном исследовании импульсного воздействия концентрированных потоков энергии на конденсированные среды. При воздействии очень коротких импульсов ($\tau \leq 10^{-8}$ с) с высокой интенсивностью ($I \approx 10^9$ Вт/см²) многие физические эффекты обнаруживают качественно новые проявления, в том числе и такие, казалось бы, широко известные и хорошо изученные процессы плавления и испарения. Поведение фазовых переходов I рода в этих условиях определяется в первую очередь возникновением метастабильных состояний, проявляющихся в кратковременном перегреве твердой фазы при плавлении [13], переохлаждении жидкой при кристаллизации [14] или перегреве жидкой фазы при испарении [15]. Явление быстрого охлаждения при импульсном воздействии, обусловленное большими температурными градиентами, используется для получения аморфных сплавов и полупроводников [16].

Отметим, что реализация принципа однородной записи в подобных задачах вообще неосуществима. Необходимость точного выделения фазовых границ возникает также в задачах, требующих корректного учета гидродинамических явлений при фазовых превращениях.

В этой связи представляется весьма актуальной разработка экономичных и более совершенных алгоритмов решения многофазных и многомерных задач с явным выделением фазовых границ. Одним из возможных подходов к решению этой проблемы может служить метод адаптивных к решению сеток / 17, 18 /. Целью настоящей работы является обобщение этого метода на случаи нестационарных одномерных и двумерных задач Стефана с одним или двумя фазовыми фронтами. В основу метода положена идея описания движения узлов сетки на уровне дифференциальной модели с помощью уравнений в частных производных. Координаты узлов при этом являются дополнительными неизвестными и должны определяться наряду с сеточными функциями из численного решения единой дифференциальной модели. Основные требования, которым должен удовлетворять численный метод решения задачи Стефана с явным выделением фазовых границ, заключаются в том, что он должен позволить избавиться от влияния подвижных границ и иметь механизм автоматической перестройки сетки с фиксированным общим числом ячеек, размеры которых могли бы изменяться во много раз. Достичь этих целей оказалось возможным с помощью конечно-разностных методов, использующих адаптивные сетки, динамически связанные с решением / 17, 18 /. Эти методы позволяют посредством автоматического преобразования координат осуществить переход к некоторой системе неподвижных криволинейных координат и тем самым избавиться от подвижных границ, а также перестраивать расчетную сетку на каждом шаге по времени.

Рассмотрим указанный метод применительно к нестационарной одномерной задаче Стефана, описывающей процесс одновременного плавления и испарения металла при импульсном воздействии.

Описание задачи о фазовых переходах типа плавления или затвердевания в простейшем случае сводится к нелинейному уравнению теплопроводности в области с заранее неизвестной подвижной границей $\Gamma_{s\ell}(t)$, разделяющей твердую и жидкую фазы:

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} = - \frac{\partial W_i}{\partial x}, \quad H = \rho c_p T, \quad W = - \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad i = s, \ell. \quad (1)$$

$$x_0 < x < x_N,$$

с граничными условиями на $\Gamma_{sl}(t)$

$$W_e - W_s = L_m \rho_s v_{sl}, \quad T_s = T_e = T_m. \quad (2)$$

Процесс испарения представляет собой переход вещества из конденсированного состояния в газообразное и по сравнению с плавлением характеризуется большей энергоёмкостью и большим удельным объемом. Испарение металлов концентрированными потоками энергии в области докритических температур, где существует явно выраженная граница раздела фаз жидкость-пар, может протекать в двух существенно отличающихся режимах. В одном из них газодинамические возмущения в потоке испаренного вещества не влияют на процесс испарения / 19 /, во втором - газодинамический фактор оказывает определяющую роль / 20 /. Для описания процесса испарения на поверхности раздела фаз $\Gamma_{lv}(t)$ выполняются законы сохранения массы, импульса и энергии

$$\rho_e v_{lv} = \rho(u - v_{lv}), \quad p_e + \rho_e v_{lv}^2 = p + \rho(u - v_{lv})^2, \quad \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} = L_v \rho_e v_{lv} - I, \quad (3)$$

а также формулируются некоторые дополнительные соотношения / 21 /, простейшим примером которых является формула типа Герца-Кнудсена

$$J = \rho(u - v_{lv}) = \frac{p_s(T_e)}{(2\pi R T_e)^{1/2}}$$

Численное решение задачи (1)-(3) получим с помощью конечно-разностного метода на адаптивной сетке, динамически связанной с решением / 17, 18 /, обобщенного на случай задачи с двумя фазовыми фронтами. Выполним преобразование координат применительно к задаче (1)-(3) с помощью замены переменных общего вида: $x = \xi(q, t)$ - прямое преобразование, $q = \varphi(x, t)$ - обратное. С учетом этих равенств можно записать

$$x = \xi(\varphi(x, t), t). \quad (4)$$

Продифференцируем равенство (4) по t и получим

$$0 = \frac{\partial \xi}{\partial q} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{или} \quad \frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} = 0$$

Отсюда $\frac{\partial q}{\partial t} = - \frac{\partial x}{\partial t} / \frac{\partial x}{\partial q}$ Введем обозначения

$$\frac{\partial x}{\partial t} = - \frac{Q}{\rho}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\psi}{\rho} \quad (5)$$

тогда $\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{Q}{\psi}$

Продифференцировав по t второе равенство (5), получим для обрат-

ного преобразования $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$, откуда $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial q}$.

Выполняя замену переменных в уравнении (1) и представляя его в дивергентной форме, запишем задачу (1)-(3) в окончательном виде:

$$\frac{\partial(\Psi H)_i}{\partial t} = -\frac{\partial W_i}{\partial q} - \frac{\partial(QH)_i}{\partial q}, \quad W = -\frac{\lambda(T) \cdot \rho}{\Psi} \frac{\partial T}{\partial q}, \quad i = s, l, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = -\frac{\partial O_i}{\partial q}, \quad q_0 < q < q_n, \quad (7)$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\Psi}{\rho}. \quad (8)$$

В полученной нелинейной системе уравнений (6) является уравнением теплопроводности в энтальпийной форме записи. Уравнение (7) с учетом равенства (8) является уравнением обратного преобразования. В дальнейшем оно используется для описания движения узлов сетки.

Функция Q , входящая в уравнение (7), обеспечивает конкретный вид преобразования. В общем случае её конструкция произвольна и должна определяться особенностями решения, которые собственно и предопределяют тот или иной вид адаптации в расчетах. Особенностью решения задачи Стефана, как уже отмечалось, является наличие непрерывно изменяющейся области решения. Построение адаптивной сетки для задач с подобными особенностями в простейшем случае заключается в управляемом распределении узлов, близком в каждый момент времени к равномерному. Получить такое распределение можно, например, с помощью задания функции Q в виде диффузионного потока $Q = -D \frac{\partial \Psi}{\partial q}$, где D - коэффициент диффузии, в простейшем случае его можно задавать константой [17, 18]. В данной задаче D представлялся в виде функции, выражаемой через теплофизические характеристики среды: $D = \frac{\lambda}{\Psi} \frac{\rho^2 \lambda}{c_p}$.

Граничные условия для уравнений (6), (7) формулируются следующим образом. В новых переменных q , t фазовая граница $\Gamma_{sl}(q)$ неподвижна, положение её заранее известно ($q = q^*$). Для уравнения (6) на этой границе используется равенство температур:

$$T_s = T_l = T_m.$$

Условие для уравнения (7) записывается в виде потока вещества через фазовую границу $\Gamma_{sl}(q^*)$. Величина его определяется из дифференциального условия Стефана

$$Q_{sl} = -(W_l - W_s) / L_m.$$

На левой границе ($q = q_0$) граничные условия для уравнения теплопроводности могут быть любыми. Для уравнения неразрывности (7) из-за отсутствия перетока вещества через левую границу в качестве граничного условия используется равенство $Q(q_0, t) = 0$. На правой границе, являющейся поверхностью раздела жидкость-пар Γ_{ev} , поток вещества отличен от нуля и граничное условие имеет вид

$$Q_{ev} = -\rho(u - v_{ev}) = -j = -\frac{p_v(T_e)}{(2\pi RT_e)^{1/2}}.$$

Кроме того, на этой границе использовалось условие

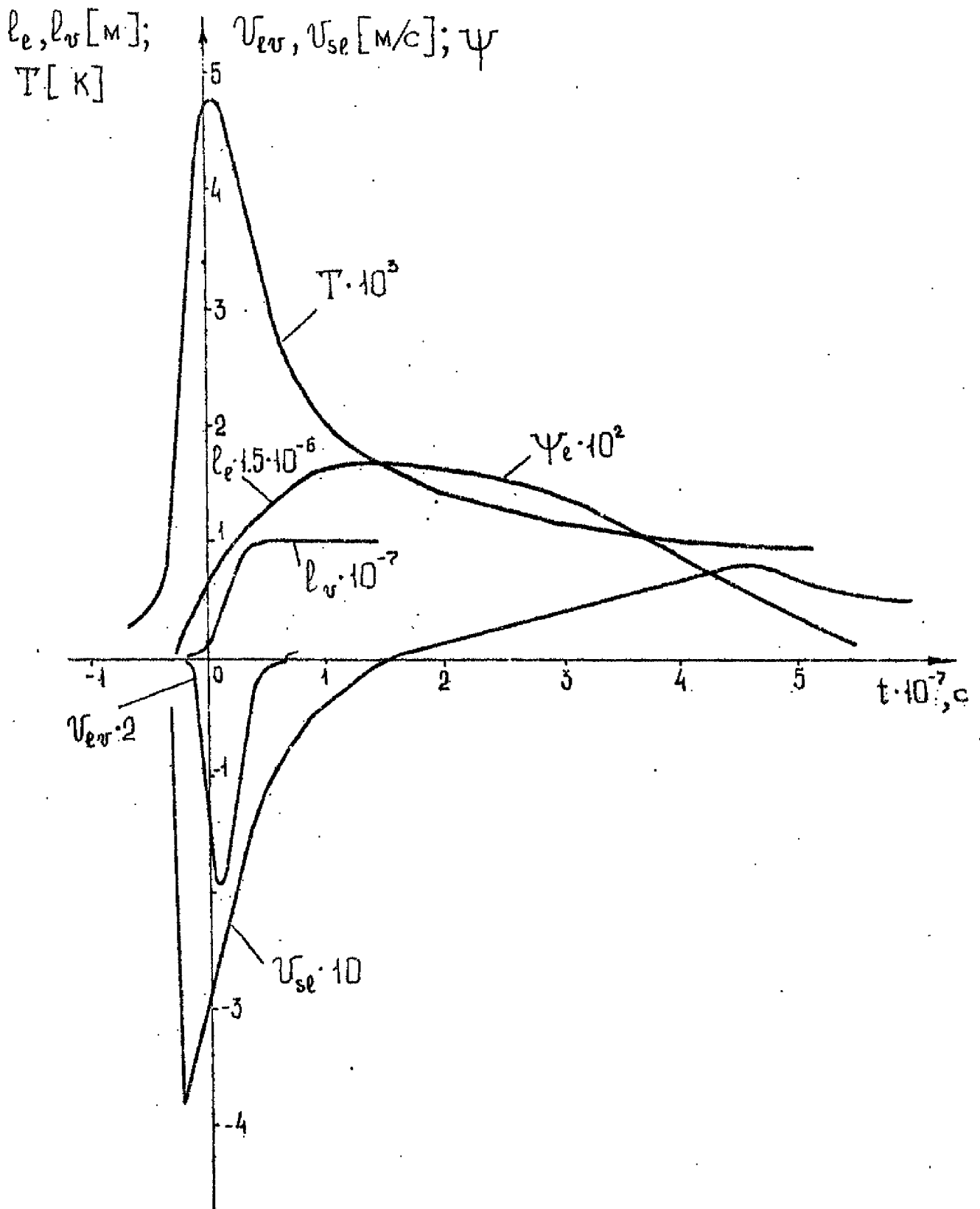
$$W_{ev} = I - L_v \rho_e v_{ev}.$$

Таким образом, проблема распространения фазовых границ в расчетном пространстве переменных q, t сводится к определению потоков Q_{se} , Q_{ev} .

Нелинейная система (6), (7) аппроксимировалась полностью нелинейной разностной схемой, получаемой с помощью интегроинтерполяционного метода. Решение системы нелинейных разностных уравнений на каждом шаге по времени представлялось в виде $T_i^{j+1} = T_i^j + \Delta T_i^{j+1}$. Для определения приращения ΔT_i^{j+1} применялся метод встречной матричной прогонки с итерациями по нелинейности /22/. При расчетах в каждой из фазовых областей вводится своя расчетная сетка. Пространственные шаги сеток могут отличаться на порядки.

В качестве примера рассмотрим задачу о плавлении и испарении конденсированной среды с теплофизическими свойствами, характерными для алюминия /23/. Воздействующий тепловой поток выбирался с параметрами, типичными для источников концентрированной энергии: $I = I_0 \exp[-(t/\tau)^2]$, $I_0 = 5 \cdot 10^7$ Вт/см², $\tau = 3 \cdot 10^{-8}$ с. Расчеты показали, что плавление возникает в момент времени $t = 3 \cdot 10^{-8}$ с. Характерные скорости движения фронта плавления достигают десятков метров в секунду (рис. 1). Положительная ветвь кривой v_{se} соответствует процессу кристаллизации, отрицательная — плавлению. Максимальная глубина жидкой фазы достигает 2,6 мкм (рис. 1). Скорость движения фронта испарения v_{ev}^* примерно на порядок меньше скорости v_{se} (рис. 1), соответственно и толщина испаренного слоя много меньше толщины расплава ($\sim 0,1$ мкм).

Динамику расчетной сетки в каждой из областей можно характеризовать с помощью величины Ψ , показывающей, во сколько раз изменились первоначальные размеры расчетных ячеек. В области твердой фазы, при задании начального значения $\Psi_s(q, 0) = 1$, величи-



Р и с. I

на Ψ_s может изменяться от Γ до 0 . Значение $\Psi_s = 0$ соответствует полному переходу области в жидкую фазу. В расчетах Ψ_s достигало $\sim 0,8$. В области жидкой фазы значение Ψ_s изменяется на 2-3 порядка по сравнению с первоначально заданным. Соответственно во столько же раз изменяются область жидкой фазы и шаг сетки.

В заключение отметим, что использование метода адаптивных сеток, динамически связанных с решением, позволяет избавиться от основной трудности, обусловленной подвижными границами. Число фазовых границ в одномерных задачах, в принципе, не ограничено. Численное решение задачи с двумя фазовыми фронтами характеризуется быстротходящимся устойчивым вычислительным процессом. Число итераций на одном временном шаге не превышало 3-5 и определялось условиями необходимой точности. Использование встречной матричной прогонки позволяет производить расчеты с эффективностью, сравнимой с эффективностью методов сквозного счета.

Предлагаемый способ решения задач Стефана может быть легко обобщен на класс двумерных нестационарных задач. В этом случае в качестве исходной системы координат используются декартовы координаты x, y, t , в которых производится математическая формулировка исследуемого явления. Затем с помощью преобразования общего вида

$$\xi = \xi(x, y, t), \quad \eta = \eta(x, y, t), \quad \tau = t,$$

осуществляется переход к некоторой криволинейной системе координат, соответствующие координатные линии которой сопрягаются с границами области и взаимно перпендикулярны. Тем самым физическая плоскость в расчетном пространстве отображается в прямоугольник в плоскости криволинейных координат ξ, η . Обратное преобразование координат осуществляется с помощью двух дифференциальных уравнений эволюционного типа, правые части которых зависят от искомого решения. Как и в одномерном случае, в криволинейных координатах математическая постановка задачи приобретает более сложный вид. Дифференциальная модель представляет собой нелинейную систему уравнений в частных производных, в которой часть уравнений описывает непосредственно исследуемое явление, а вторая — динамику расчетной сетки, определяемую поведением искомого решения. Кроме того, преобразованные уравнения несколько сложнее исходных из-за появления в них дополнительных членов с множителями

в виде метрических коэффициентов. Однако процесс решения задачи в целом облегчается. В криволинейных координатах фазовая граница совмещается с одной из координатных линий, положение которой фиксировано, а граничные условия используются для определения потока вещества из одной фазовой области в другую. отображение физической плоскости в прямоугольную область позволяет строить и использовать в расчетах ортогональные сетки, равномерные или неравномерные по одному или обоим направлениям с независимыми от времени шагами h_1 и h_2 .

В физическом пространстве сетки в обеих областях перестраиваются в зависимости от величины и знака потока массы. Число ячеек при этом в каждой из областей остается неизменным, а изменяются лишь их размеры. Механизм динамического распределения узлов в двумерных задачах состоит из двух уравнений в частных производных, правые части которых представляются в виде некоторых функций Q и P , зависящих от искомого решения.

Математическая формулировка классического варианта нестационарной двумерной задачи Стефана в декартовых переменных имеет

$$\text{вид } \frac{\partial H_i}{\partial t} = \text{div}[\lambda(T) \text{grad } T]_i = -\frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\partial W_2}{\partial y}, \quad i = s, l,$$

$$W_1 = -\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad W_2 = -\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y},$$

с граничными условиями на межфазной границе $\Gamma_{se}(x, y, t)$

$$W_e^n - W_s^n = L_m \rho_s v_{se}^n, \quad T_s = T_e = T_m.$$

В переменных ξ, η, τ для каждой фазовой области выписывается система уравнений, состоящая из уравнения теплопроводности в консервативной форме и двух уравнений обратного преобразования:

$$\frac{\partial(\Psi H)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \xi}[(W_1 + QH) \frac{\partial \eta}{\partial \tau}] + \frac{\partial}{\partial \eta}[(W_1 + QH) \frac{\partial \xi}{\partial \tau}] + \frac{\partial}{\partial \xi}[(W_2 + PH) \frac{\partial \eta}{\partial \tau}] - \frac{\partial}{\partial \eta}[(W_2 + PH) \frac{\partial \xi}{\partial \tau}],$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = -\frac{Q}{\rho}, \quad \frac{\partial y}{\partial \tau} = -\frac{P}{\rho},$$

$$W_1 = -\frac{\lambda \rho}{\Psi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(T \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(T \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \right) \right], \quad W_2 = -\frac{\lambda \rho}{\Psi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(T \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(T \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \right],$$

$$\Psi = \rho \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right].$$

Функции Q и P задавались по аналогии с одномерным случаем:

$$Q = -D\rho \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right), \quad P = -D\rho \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right).$$

На межфазной границе $\Gamma_{se}(\xi, \eta)$ записываются граничные условия

$$O_{se}^n = -(W_e - W_s)/L_m, \quad T_s = T_e = T_m.$$

Предлагаемый метод тестировался на задаче, имеющей автомодельное решение в случае одной пространственной переменной /24/.

В прямоугольной области $\Omega: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0,5\}$ рассматривалась задача о промерзании с плоской границей раздела $\Gamma_{se}(x, y, t)$ областей Ω_s, Ω_e . Оси координат выбирались таким образом, чтобы граница раздела фаз Γ_{se} , перемещаясь параллельно самой себе, не была параллельна ни одной из осей. Задача описывается нестационарным двумерным уравнением теплопроводности с постоянными значениями теплофизических характеристик.

При повороте системы координат на угол φ задача сводится к одномерному варианту с пространственной координатой $z = x \cos \varphi + y \sin \varphi$.

Для этой задачи существует автомодельное решение

$$T(z, t) = \begin{cases} -1 + \Phi(z/2t^{1/2})/\Phi(\beta) & 0 \leq z \leq z_r, \\ 0 & z_r < z \leq 1, \end{cases} \quad \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy, \\ \beta = 0,62.$$

Введем в области Ω расчетную сетку с общим числом узлов 15×6 . Плоскую границу $\Gamma(x, y, t)$ проведем под углом $\varphi = 30^\circ$. В качестве исходного выберем состояние, соответствующее автомодельному решению в момент $t_0 = 0,162$ (рис. 2). При переходе к криволинейной системе координат ξ, η, τ область Ω трансформируется в некоторую прямоугольную область G , в которой исходная расчетная сетка становится равномерной по обоим измерениям $h_1 = h_2$ с тем же общим числом узлов. Плоская граница $\Gamma_{se}(\xi, \eta)$ совпадает с координатной линией $\xi = \xi_{11}$, и положение её остается неизменным с течением времени, как и величины шагов h_1, h_2 . В расчетах использовалась явная консервативная разностная схема. Шаг интегрирования по времени ограничивался требованием устойчивости явной схемы. На рис. 3 представлены положение фазового фронта и вид расчетной сетки в физическом пространстве на момент времени $t = 0,418$. Автомодельное и численное решения сравнивались вдоль оси X в трех сечениях с $j = 1, 3, 5$, где j - номер строки. Сравнение показало, что относительная погрешность при определении температуры и отклонение границы раздела фаз от плоской не превышала $0,2\%$. Полученные результаты свидетельствуют о достаточно высокой точности метода при использовании грубых расчетных сеток.

Представлялось также интересным проверить экспериментально

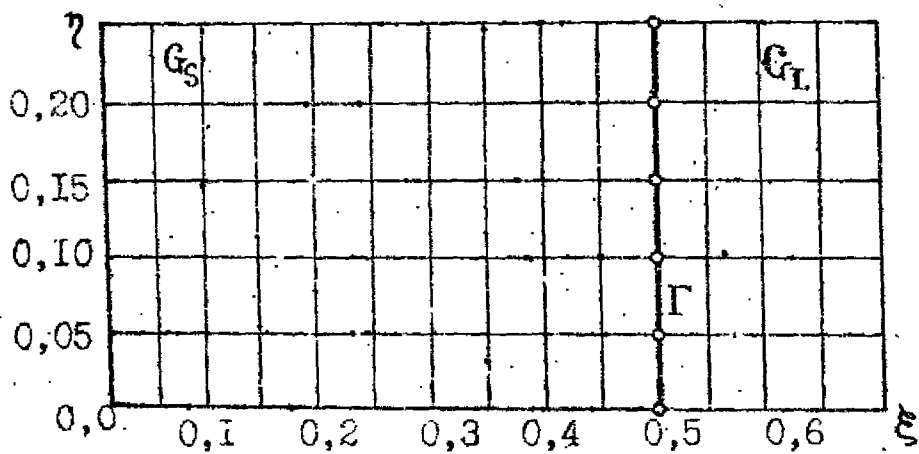
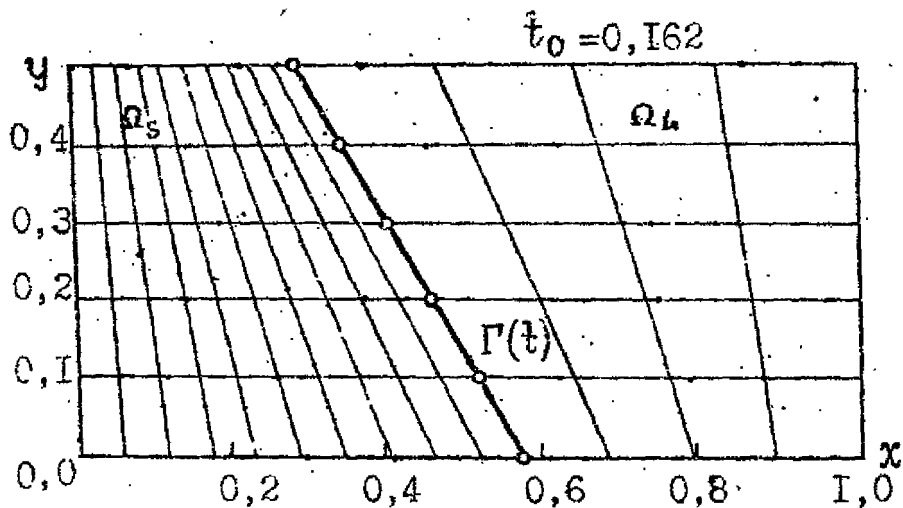


Рис. 2

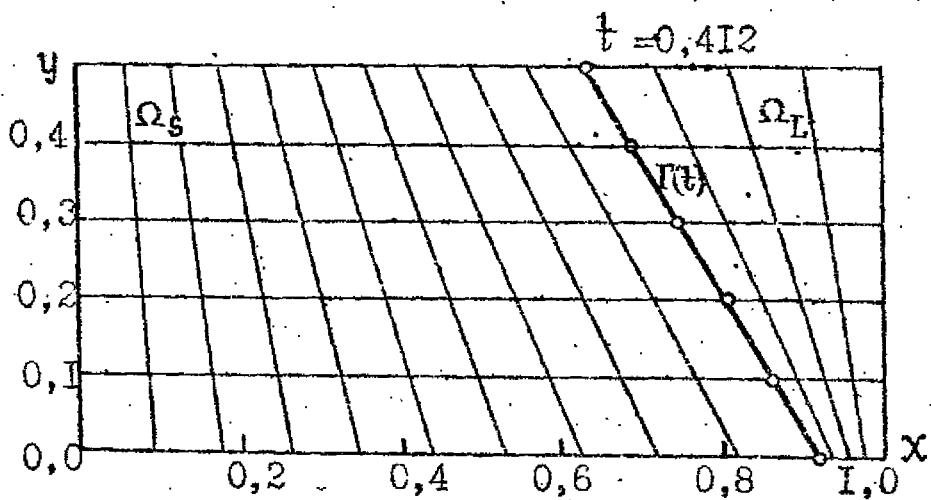
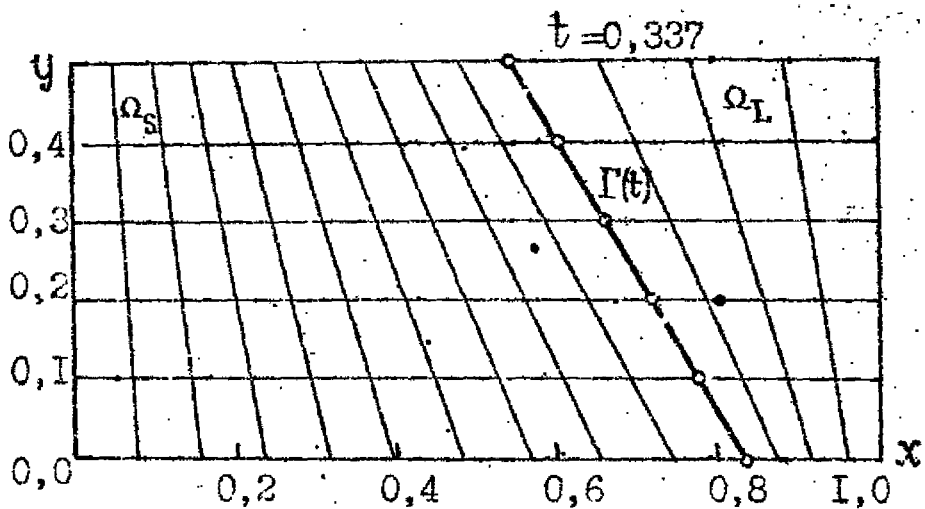


Рис.3

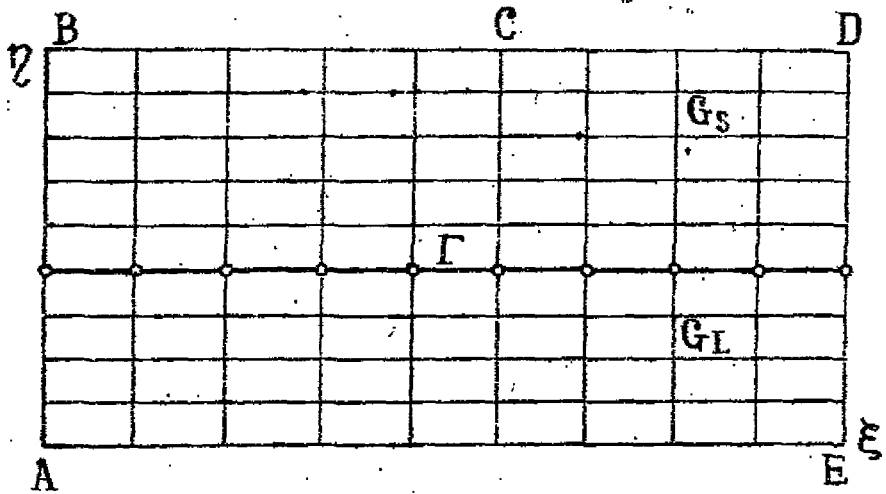
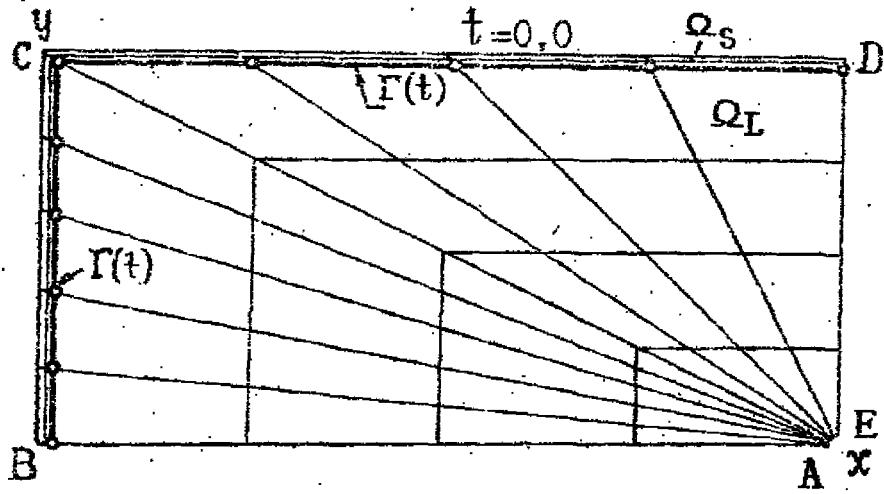


Рис. 4

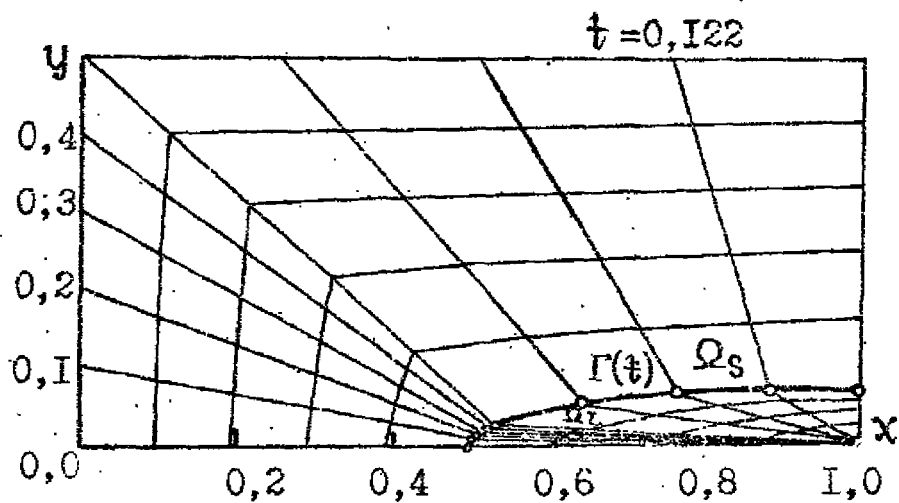
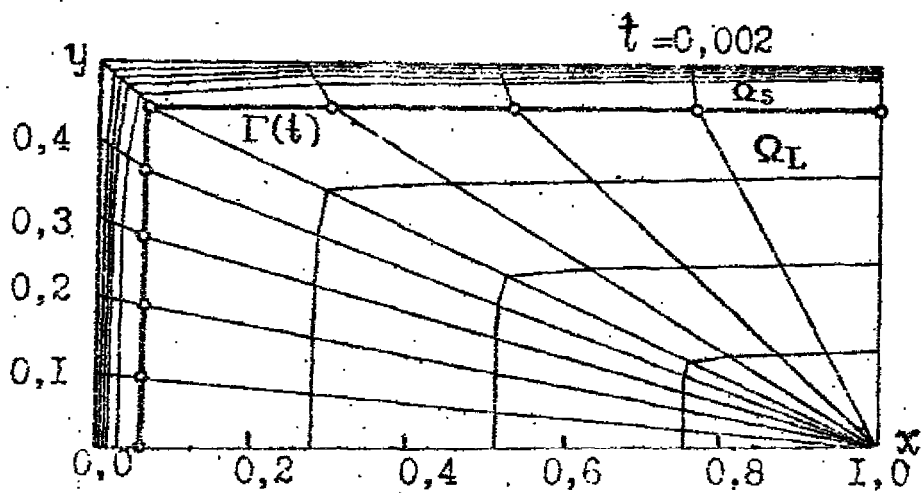


Рис.5

возможности метода в ситуации, когда области фазовых состояний изменяются в несколько раз, а исходные расчетные сетки в физическом пространстве существенно отличаются от ортогональных.

С этой целью решалась следующая модельная задача. В прямоугольной области $\Omega: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0,5\}$ в начальный момент времени задавалась подобласть Ω_1 с $T = -1$ в виде уголка вдоль линий $x=0, y=0,5$ с одинаковой толщиной $\ell = 1,25 \cdot 10^{-2}$ по обоим направлениям. Остальную часть плоскости занимала подобласть Ω_2 с $T = 0$ (рис. 4). С течением времени фазовый фронт распространяется к правому нижнему углу.

Как и при решении первой задачи, для моделирования применялись грубые сетки с общим числом узлов 10×10 . Для подобластей Ω_1 и Ω_2 предназначалось 10×6 и 10×5 узлов соответственно. Пространственные шаги в подобластях Ω_1 и Ω_2 в начальный момент времени отличались более чем в 20 раз. Сетка в физическом пространстве задавалась пересечением радиальных лучей, выходящих из правого нижнего угла, и линий, параллельных координатным осям (рис. 4). В расчетном пространстве сетка отображалась в прямоугольную, а положение фазовой границы Γ_{se} совмещалось с одной из координатных линий $\eta = \eta_s$ (рис. 4). На рис. 5 представлены расчетные сетки и положение фазовой границы в различные моменты времени. Использование неортогональных сеток с сильно изменяющимися пространственными шагами никаких затруднений при расчетах не вызывает.

В заключение отметим, что предлагаемый метод решения одномерных и двумерных нестационарных задач Стефана с явным выделением фазовых фронтов обладает рядом несомненных достоинств:

1. Переход к более универсальным криволинейным координатам позволяет избавиться от основной трудности математического исследования задач Стефана, связанной с подвижными границами.
2. Предложенный механизм адаптации позволяет автоматически перестраивать расчетные сетки, в том числе и при многократных изменениях размеров фазовых областей.
3. Метод обладает достаточными для практического использования точностью и эффективностью.

Л и т е р а т у р а

1. Васильев Ф.П. О методе конечных разностей для решения однофаз-

- ной задачи Стефана // ЖВМ и МФ. - 1963. - Т.3, № 5. - С. 861-873.
2. Будаk Б.М., Васильев Ф.П., Успенский А.Б. Разностные методы решения некоторых краевых задач типа Стефана // Численные методы в газовой динамике. - М., 1965. - № 4. - С. 139-183. - (Сб. науч. тр. / ВЦ МГУ).
 3. Васильев Ф.П. Об одном варианте метода прямых для решения задачи Стефана // Вычислительные методы и программирование. - М., 1967. - № 8. - С. 139-164. - (Сб. науч. тр. / ВЦ МГУ).
 4. Успенский А.Б. О методе выпрямления фронтов для многофронтowych одномерных задач типа Стефана // Докл. АН СССР. - 1967. - Т.172, № 2. - С. 61-64.
 5. Вабищевич П.Н., Вабищевич Т.Н. Об одном методе численного решения задачи Стефана // Вестн. МГУ. Вычисл. математика и кибернетика. - 1983. - № 4. - С. 17-22.
 6. Бакирова О.И. О некоторых методах решения задачи Стефана // Дифференциальные уравнения. - 1983. - Т.19, № 3. - С. 491-500.
 7. Crank J., Gupta R.S. Isotherm migration method in two dimension // Brunel Univ, Tech. Rep. - 1974. - P. 42-52.
 8. Олейник О.А. Об одном методе решения общей задачи Стефана // Докл. АН СССР. - 1960. - Т.135, № 5. - С. 1054-1057.
 9. Каменоместская С.Л. О задаче Стефана // Мат. сб. - 1961. - Т.53, № 4. - С. 489-514.
 10. Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономичеcкая схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // ЖВМ и МФ. - 1965. - Т.5, № 5. - С. 816-827.
 11. Будаk Б.М., Соловьёва Е.Н., Успенский А.Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана // ЖВМ и МФ. - 1965. - Т.5, № 5. - С. 828-840.
 12. Махукин В.И., Повещенко Ю.А., Попов С.Б., Попов Ю.П. Об однородных алгоритмах численного решения задачи Стефана. - М., 1985. - С. 23. - (Препринт/ИГМ им. М.В. Келдыша АН СССР, № 122).
 13. Williamson S., Mourou G., Li J. Time-resolved, laser-induced phase transformation in Aluminium // Phys. Rev. Lett. - 1984. - V. 52, N 26. - P. 2364-2367.
 14. Карпов С.Ю., Ковальчук Ю.В., Подгорельский Ю.В. Плавление полупроводников под действием импульсного лазерного излучения //

- Физика и техника полупроводников. - 1986. - Т.20, № 11. - С. 1945-1969.
15. Самохин А.А., Успенский А.Б. Испарение вещества под действием лазерного излучения // Физ. и хим. обработка материалов. - 1981. - № 3. - С. 3-11.
 16. Алферов Ж.И., Ковальчук Ю.В., Погорельский Ю.В., Смольский О.В. Воздействие пикосекундных лазерных импульсов на Si и полупроводниковые соединения A^3B^5 // Изв. АН СССР. Сер. физ. - 1985. - Т.49, № 6. - С. 1069-1075.
 17. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. О численном решении задачи Стефана на адаптивной сетке. - М., 1987. - 17 с. - (Препринт / ИТМ им. М.В. Келдыша АН СССР, № 51).
 18. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Математическое моделирование задачи Стефана на адаптивной сетке // Дифференциальные уравнения. - 1987. - Т.23, № 7. - С. 1154-1160.
 19. Анисимов С.И., Имас Я.А., Романов Г.С. и др. Действие излучения большой мощности на металлы. - М.: Наука, 1970. - С. 271.
 20. Мажукин В.И., Самохин А.А. Математическое моделирование фазовых переходов и образования плазмы при действии лазерного излучения на поглощающие конденсированные среды // Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, 1987. - С. 191-244.
 21. Knight C. Theoretical modeling of rapid surface vaporization with pressure // AIAA J. - 1979. - V. 17, N 5. - P. 519-523.
 22. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978. - С. 590.
 23. Таблицы физических величин: Справочник // Под ред. И.К. Кирикоина. - М.: Атомиздат, 1976. - С. 801.
 24. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. - М.: Мир. - 1964. - С. 246.