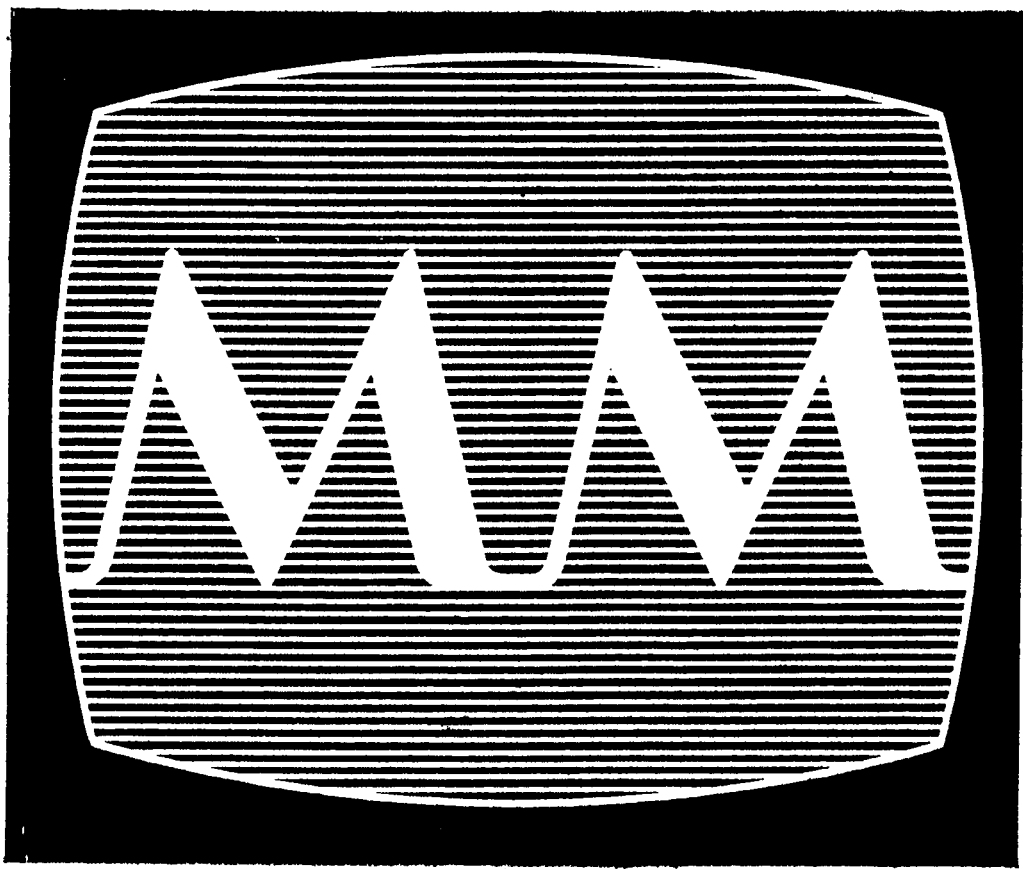


Академия наук СССР

Математическое МОДЕЛИРОВАНИЕ



том **1** номер **3** / 1989

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

УДК 519.63:618.61

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДВУМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА СЕТКАХ С ДИНАМИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИЕЙ

Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин

Излагается конечно-разностный метод решения двумерных задач типа Стефана и пограничного слоя. Сравнение численных решений с аналитическими показало возможность проведения расчетов с высокой точностью на сетках с малым числом узлов.

1. Введение. Одним из наиболее важных элементов технологического оснащения процесса математического моделирования современных задач математической физики, наряду с традиционным построением разностных схем высокого качества [1], является выбор и конструирование оптимальных относительно решения расчетных сеток. Проблеме разработки расчетных сеток в последние годы уделяется большое внимание, и к настоящему времени сформировалось несколько направлений построения, генерации и адаптации сеток, см., например, обзоры [2, 3]. Из них принципу оптимального распределения узлов в наибольшей степени удовлетворяют методы построения сеток, адаптирующихся к решению. Динамическое распределение узлов в адаптирующихся сетках приводит к тому, что координаты узлов сетки заранее не известны и подлежат определению в ходе решения наравне с сеточными функциями. Конкретный механизм перестройки сетки получают из наложения на исходную задачу некоторых дополнительных условий. Единого подхода к решению этой проблемы в настоящее время нет, поскольку разработка методов построения адаптирующихся сеток находится в стадии интенсивного развития и пока невозможно указать направление, которому следовало бы отдать явное предпочтение.

Ключевыми проблемами всех способов построения адаптирующихся сеток являются выбор характеристики численного решения, используемой в качестве параметра, управляющего перемещением узлов, и вида взаимосвязи между процедурами решения дифференциальной задачи и построения сетки. При выборе управляющего параметра в многомерных стационарных [3] и нестационарных [4] задачах наибольшее распространение получил, по-видимому, вариационный принцип и его различные

модификации [5–9]. В основе этого принципа построения адаптирующихся к решению сеток лежит задача минимизации во всей области одной из характеристик численного решения, связанная с определением экстремумов некоторых функционалов. Кроме вариационного принципа, известен ряд эмпирических подходов [10–12], использующих в процессе построения различную информацию о численном решении. В [10] в качестве управляющего параметра выбиралась норма погрешности аппроксимации, в [11, 12] – скорость изменения решения.

Не менее важной представляется и проблема взаимосвязи между разностной схемой и адаптирующейся сеткой. Идеальную сетку можно построить лишь в случае заранее известного решения. Обычно в процессе построения сетки с управляемым размещением узлов в распоряжении имеется только некоторая ограниченная априорная информация о поведении решения. Поэтому точность расчета существенно зависит от того, как взаимосвязаны разностная схема, используемая для аппроксимации дифференциальной задачи, и способ построения расчетной сетки. Существует два противоположных взгляда на данную проблему. Например, в работах [9, 13] предлагается процессы определения сеточного решения и координат узлов разделять и реализовывать независимо, поскольку взаимосвязь их может вызывать связанные колебания решения и сетки, что и наблюдалось в различных работах [11]. В качестве подтверждения положительного эффекта автономной реализации в [9, 13] приводится решение ряда модельных газодинамических и других задач и показана достаточная эффективность предлагаемого способа. С другой стороны, опыт применения математического моделирования к задачам теплопереноса и гидродинамики [1, 14–16] свидетельствует о том, что точность решения уравнений в частных производных, получаемого разностными методами, зависит от того, насколько хорошо согласуется распределение узлов расчетной сетки с особенностями искомого решения. В большинстве реальных задач моменты и области возникновения и последующего распространения таких особенностей как ударные волны, большие градиенты и др. заранее не известны, и получить хорошее согласование их с узлами сетки не всегда возможно. Авторы настоящей работы придерживаются мнения, что между используемыми разностными схемами и способом перестройки сетки должна существовать тесная взаимосвязь и вводиться она должна на уровне дифференциальной модели.

В работах [17–19] нами предложен метод построения адаптивных сеток, динамически связанных с решением, для нестационарных одномерных по пространству краевых задач. Суть предложенного метода состоит в том, что с помощью автоматического преобразования координат осуществляется переход от декартовой системы координат к более универсальной криволинейной, в которой для численного решения задачи используются расчетные сетки с фиксированными узлами. В физическом пространстве им соответствуют сетки с тем же общим числом узлов, но с управляемым распределением, что и позволяет концентрировать их в областях сингулярности, больших градиентов или других особенностей решения.

Отметим, что при переходе из физического пространства в расчетное в криволинейных координатах по сути дела рассматривается другая дифференциальная задача, отличающаяся от исходной не только видоизмененными уравнениями, но и их числом. Математическая модель расширяется за счет дополнительных уравнений в частных производных, описывающих динамику расчетной сетки. Число дополнительных уравнений равно числу пространственных измерений задачи. Конкретный вид преобразования определяется особенностями решения задачи и представляет исследователю большую свободу выбора управлением движения узлов при минимальных алгоритмических и программных изменениях в различных классах задач.

Последующее применение предложенного метода адаптации к решению различных нестационарных одномерных краевых задач типа классических задач Стефана с одним [20, 21], двумя [22] фазовыми фронтами, задач о пограничном слое [17], задач газовой динамики с явным выделением фронтов ударных волн [23–25] и сравнение полученных решений с аналитическими позволили установить, что динамическое распределение узлов дает возможность без снижения точности решения существенно уменьшить общее число используемых узлов. Тем самым удается значительно уменьшить объем вычислений и повысить эффективность алгоритма.

Настоящая работа является обобщением метода адаптивных сеток, динамически связанных с решением [17–19], на нестационарные двумерные краевые задачи. Возможности метода демонстрируются на примере решения модельных задач Стефана и задач типа пограничного слоя.

2. **Принцип построения.** Принцип построения конечно-разностных методов на адаптивных сетках, динамически связанных с решением, определим как способ решения нестационарных задач, в котором наряду с сеточными функциями искомыми являются координаты узлов сетки. Определение сеточных функций и координат узлов представляется в виде единой самосогласованной задачи, в которой часть уравнений описывает непосредственно исследуемое явление с учетом движения сетки, а вторая часть — динамику расчетной сетки, определяемую искомым решением. В предельных случаях из этих уравнений следуют постановки задач в эйлеровых (адаптация отсутствует) либо в лагранжевых (скорость движения узлов совпадает с гидродинамической) переменных.

В основу способа построения положен метод автоматического преобразования координат, выполняемый с помощью искомого решения и позволяющий перейти к некоторой системе координат (именуемой в дальнейшем криволинейной), соответствующие линии которой сопрягаются с границами области и взаимно перпендикулярны. В зависимости от класса рассматриваемых задач координатные линии могут либо следовать за подвижными границами, либо сгущаться в областях сингулярности и больших градиентов, либо перемещаться по закону, обеспечивающему минимальные схемную вязкость и немонотонность разностных схем.

В качестве исходной системы координат используется декартова система координат x, y, t , в которой производится математическая формулировка задачи. Затем с помощью преобразования общего вида $\xi = \xi(x, y, t)$, $\eta = \eta(x, y, t)$, $\tau = t$ физическая плоскость отражается на прямоугольник в плоскости криволинейных координат ξ, η (рис. 1). В криволинейных координатах математическая постановка за-

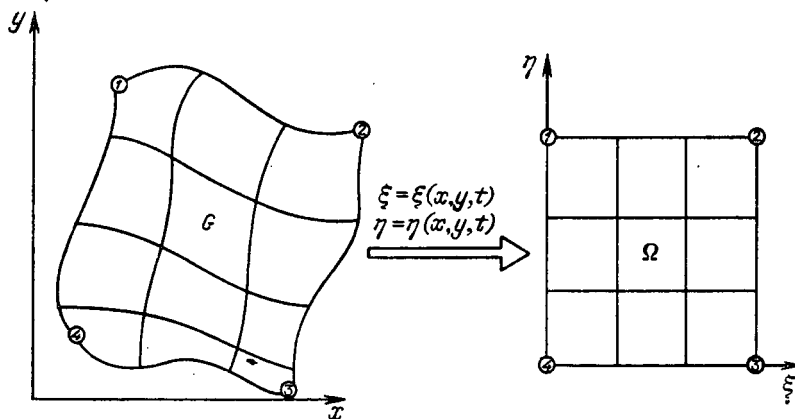


Рис. 1

дачи приобретает более сложный вид, связанный с наличием метрических коэффициентов x_ξ , x_η , y_ξ , y_η в уравнениях. Однако переход к более универсальным криволинейным координатам позволяет строить и использовать для сложных областей физического пространства ортогональные сетки равномерные или неравномерные по одному или обоим направлениям.

Обратное преобразование координат осуществляется с помощью двух уравнений эволюционного типа, являющихся уравнениями траекторий движения узлов и образующих механизм их динамического распределения. Для двумерных нестационарных задач этот механизм представляет собой систему из двух уравнений в частных производных, правые части которых представляются в виде некоторых функций Q и P , зависящих от решения. В общем случае конструкция этих функций произвольна. Конкретный вид их определяется особенностями решения, которые, как уже отмечалось, обуславливают тот или иной вид адаптации.

3. Постановка задачи. В произвольной области $G\{x, y\}$ рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности с источником

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\partial W_2}{\partial y} + g, \quad (1)$$

$$W_1 = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x}, \quad W_2 = -\lambda \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Используя преобразование общего вида $\xi = \xi(x, y, t)$, $\eta = \eta(x, y, t)$, $\tau = t$, перейдем к пространству Ω с криволинейными координатами ξ, η, τ , в которых уравнение (1) в строго консервативном виде запишется следующим образом:

$$\frac{\partial(\psi u)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(W_1 - u \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} - \left(W_2 - u \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) \frac{\partial x}{\partial \eta} \right] -$$

$$-\frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\left(W_1 - u \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \frac{\partial y}{\partial \xi} + \left(W_2 - u \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} \right] + \psi g. \quad (2)$$

Дополним полученное уравнение (2) уравнениями, характеризующими текущие значения координат x, y :

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = -Q, \quad \frac{\partial y}{\partial \tau} = -P. \quad (3)$$

С учетом (3) исходная задача (1) приобретет вид

$$\frac{\partial(\psi u)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[(W_1 + uQ) \frac{\partial y}{\partial \eta} - (W_2 + uP) \frac{\partial x}{\partial \eta} \right] -$$

$$-\frac{\partial}{\partial \eta} \left[-(W_1 + uQ) \frac{\partial y}{\partial \xi} + (W_2 + Pu) \frac{\partial x}{\partial \xi} \right] + \psi g, \quad (4)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = -Q, \quad \frac{\partial y}{\partial \tau} = -P, \quad \psi = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi},$$

где ψ , $\partial x/\partial \xi$, $\partial y/\partial \xi$, $\partial x/\partial \eta$, $\partial y/\partial \eta$ – якобиан и метрические коэффициенты; Q, P – некоторые функции, зависящие от решения.

Если функции Q и P известны, то систему уравнений (4) можно использовать для определения температурных полей и положения узлов сетки с помощью конечно-разностных методов.

Конкретный вид функций Q и P определяется из соображений эффективного построения расчетной сетки. Наиболее простой ситуацией представляется построение квазиравномерной по каждому направлению сетки в области с подвижными границами. Для этих целей функции Q и P могут быть выбраны в виде

$$Q = -D_0 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right), \quad P = -D_0 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right). \quad (5)$$

Если желательно для решения задачи (1) иметь сетку с узлами, концентрирующимися в областях сильного изменения решения и квазиравномерно распределенными в остальных, то Q и P могут быть заданы в виде [26]

$$Q = -D_0 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right) - C_0 \left\{ \psi \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\psi^2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \right)^{1/2} \right] \right\}, \quad (6)$$

$$P = -D_0 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) - C_0 \left\{ \psi \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\psi^2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \right)^{1/2} \right] \right\},$$

где D_0, C_0 — произвольные константы порядка 1.

Наличие частных производных первого порядка от решения $\partial u / \partial \xi, \partial u / \partial \eta$ в выражениях (6) позволяет отслеживать скорость изменения решения и в зависимости от ее величины обеспечивать необходимое сгущение узлов. Первые слагаемые в круглых скобках выполняют роль расталкивающих сил и с одной стороны ограничивают чрезмерное сближение узлов, а с другой делают сетку более равномерной в областях слабого изменения решения. Появление в фигурных скобках под знаком соответствующей производной величины ψ служит цели дополнительного ограничения сближения узлов. Отметим, что возможны и другие конструкции функций Q и P .

4. Разностная аппроксимация. В плоскости $\Omega\{\xi, \eta\}$ введем расчетную сетку с равномерными по каждому направлению шагами h_1 и h_2 :

$$\omega_{h_1, h_2} = \left\{ (\xi_i, \eta_j); \quad \begin{array}{l} \xi_i = \xi_{i-1} + h_1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad h_1 = \xi_N / N, \\ \eta_j = \eta_{j-1} + h_2, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad h_2 = \eta_M / M \end{array} \right\}.$$

По переменной τ шаг вводился обычным образом:

$$\omega_\tau = \{ \tau_n; \tau_{n+1} = \tau_n + \Delta\tau_n, \quad n = 0, 1, \dots \}.$$

В криволинейной системе координат шаги сетки h_1, h_2 не зависят от времени и первоначально построенная ортогональная сетка остаётся неизменной. В физическом пространстве соответствующие координаты узлов (x_i, y_j) с течением времени изменяются в зависимости от поведения решения.

Разностная аппроксимация дифференциальной модели (3)–(5) осуществлялась с помощью интегро-интерполяционного метода [17]:

$$\begin{aligned} (\psi u)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} &= (\psi u)_{i+1/2, j+1/2}^n - \frac{\Delta\tau}{h_1 h_2} [(W_1 + uQ)_{i+1, j+1/2}^n \times \\ &\times (y_{i+1, j+1}^n - y_{i+1, j}^n) - (W_1 + uQ)_{i, j+1/2}^n \cdot (y_{i, j+1}^n - y_{i, j}^n) - \\ &- (W_1 + uQ)_{i+1/2, j+1/2}^n \cdot (y_{i+1, j+1}^n - y_{i, j+1}^n) + \\ &+ (W_1 + uQ)_{i+1/2, j}^n \cdot (y_{i+1, j}^n - y_{i, j}^n) - (W_2 + uP)_{i+1, j+1/2}^n (x_{i+1, j+1}^n - x_{i+1, j}^n) + \\ &+ (W_2 + uP)_{i, j+1/2}^n (x_{i, j+1}^n - x_{i, j}^n) + (W_2 + uP)_{i+1/2, j+1}^n (x_{i+1, j+1}^n - x_{i, j+1}^n) - \\ &- (W_2 + uP)_{i, j+1/2}^n (x_{i+1, j}^n - x_{i, j}^n)] + \Delta\tau (\psi g)_{i+1/2, j+1/2}^n, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \psi_{i+1/2,j+1/2}^n &= \frac{1}{2h_1h_2} [(x_{i+1,j}^n - x_{i,j+1}^n)(y_{i+1,j+1}^n - y_{ij}^n) - \\ &- (x_{i+1,j+1}^n - x_{ij}^n)(y_{i+1,j}^n - y_{i,j+1}^n)], \\ W_{1,i+1/2,j}^n &= -\frac{\lambda}{h_1h_2\psi_{i+1/2,j}^n} \times \\ &\times [(y_{i+1/2,j+1/2}^n - y_{i+1/2,j-1/2}^n)(u_{i+1,j}^n - u_{ij}^n) - \\ &- (y_{i+1,j}^n - y_{ij}^n)(u_{i-1/2,j+1/2}^n - u_{i+1/2,j-1/2}^n)], \\ W_{2,i+1/2,j}^n &= -\frac{\lambda}{h_1h_2\psi_{i+1/2,j}^n} \times \\ &\times [-(x_{i+1/2,j}^n - x_{i+1/2,j-1/2}^n)(u_{i+1,j}^n - u_{ij}^n) + \\ &+ (x_{i+1,j}^n - x_{ij}^n)(u_{i+1/2,j+1/2}^n - u_{i+1/2,j-1/2}^n)], \\ \frac{x_{ij}^{n+1} - x_{ij}^n}{\Delta\tau} &= -Q_{ij}^n, \quad \frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n}{\Delta\tau} = -P_{ij}^n. \end{aligned}$$

К узлам сетки относились функции x_{ij}^n , y_{ij}^n , Q_{ij}^n , P_{ij}^n , к центрам ячеек — $\psi_{i+1/2,j+1/2}^n$; $u_{i+1/2,j+1/2}^n$. В серединах ребер ячеек определялись потоковые величины $W_{1,i+1/2,j}$, $W_{1,i,j+1/2}$, $W_{2,i+1/2,j}$, $W_{2,i,j+1/2}$. Необходимое интерполирование выполнялось по формулам линейной интерполяции.

5. Моделирование задач Стефана. В многомерных задачах одним из наиболее существенных требований, предъявляемых к алгоритмам, является требование проведения расчетов на сетках с малым числом узлов по каждому направлению при сохранении высокой точности расчетов. Поэтому все исследования в настоящей работе выполняются на "грубых" сетках.

В ряде проблем, таких как получение аморфных материалов, воздействие концентрированных потоков энергии на металлы и полупроводники, в задачах термодиффузии и др., где неравновесность фазового перехода может играть определяющую роль, а также в задачах, требующих корректного учета гидродинамических явлений при фазовых превращениях, появляется необходимость точного выделения фазового фронта и учета процессов, связанных с ним. Численные алгоритмы, основанные на явном выделении фронта [27–28], связаны с непростой, особенно в многомерных задачах, проблемой перестройки расчетной сетки, как правило, громоздки и требуют больших затрат машинного времени. В этой связи представляется весьма актуальной разработка экономичных и более совершенных алгоритмов решения многомерных задач с явным выделением фазовой границы. Одним из подходов к решению этой проблемы может служить метод адаптивных сеток.

Решение классической задачи Стефана состоит в определении температурных полей и скоростей движения фазового фронта v_{sl} . Основные трудности математического исследования подобных задач связаны с тем, что граница раздела фаз $\Gamma_{sl}(t)$, а тем самым и подобласти определения решения $G_s(x, y, t)$, $G_l(x, y, t)$ заранее не известны и должны определяться в ходе решения задачи. Кроме того, часто возникают ситуации, когда первоначально заданные области зарождающейся или исходной фаз изменяются во много раз. В этих случаях при численном решении оказывается, что расчетные сетки, используемые в начале процессе, становятся

непригодными через определенное время и для продолжения расчета необходима их перестройка, например с помощью интерполяционных процедур.

Основное требование, предъявляемое к расчетным сеткам при решении подобных задач, заключается в том, что должен существовать механизм автоматической перестройки сетки с фиксированным общим числом ячеек, размеры которых могли бы изменяться в зависимости от потока вещества через межфазную границу, т.е. в зависимости от поведения решения. Желательно также исключить из рассмотрения подвижную границу.

Построение расчетной сетки и решение задач производится в криволинейной системе координат. С этой целью в каждой из подобластей G_s и G_l используется уравнение (1) с $g = 0$. На границе раздела фаз $\Gamma_{sl}(t)$ записывается дифференциальное условие Стефана

$$W_s^n - W_l^n = L_m \rho u_{sl}^n, \quad W_s^\tau = W_l^\tau \quad (8)$$

и условие изотермичности

$$u_s = u_l = u_m, \quad (9)$$

где индексы n, τ означают нормальную и касательную компоненты тепловых потоков, s, l означают принадлежность вещества к твердой и жидкой фазам, ρ — плотность вещества, L_m, u_m — теплота и температура фазового перехода.

В криволинейных координатах фазовая граница $\Gamma_{sl}(x, y, t)$ совмещается с одной из координатных линий $\Gamma_{sl}(\xi, \eta)$, положение которой фиксировано, а граничное условие (9) используется для определения переноса вещества из одной области в другую. Тем самым удается избавиться от основной неприятности, присущей проблеме Стефана. В физическом пространстве в обеих подобластях сетки перестраиваются в зависимости от величины и знака потока массы. Число ячеек в каждой из подобластей остается неизменным, а размеры их изменяются. Кроме того, отображение физической плоскости сложной конфигурации в прямоугольную область позволяет строить и использовать в расчетах ортогональные сетки, равномерные по одному или нескольким направлениям с неменяющимися по времени шагами h_1 и h_2 .

Предлагаемый метод проверялся на задаче, допускающей автоматическое решение в случае одной переменной [29].

В прямоугольной области $G = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0,5\}$ рассматривалась задача Стефана о промерзании с плоской границей раздела $\Gamma_{sl}(t)$ (прямой линией) областей G_s, G_l . Оси координат выбираются так, чтобы граница раздела фаз $\Gamma_{sl}(t)$, перемещаясь параллельной самой себе, не была параллельной ни одной из осей. В численных расчетах выбирались следующие значения теплофизических параметров: $\lambda = c_p = \rho = 1, L_m = 1, u_m = 0$. При повороте системы координат на угол φ задача сводится к одномерной задаче с пространственной координатой $z = x \cos \varphi + y \sin \varphi$. Для этой задачи существует автоматическое решение

$$u(z, t) = \begin{cases} -1 + \Phi(z/(2\sqrt{t}))/\Phi(\beta), & 0 \leq z \leq z_\Gamma, \\ 0, & z_\Gamma < z \leq 1, \end{cases}$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy, z_\Gamma = 2\beta\sqrt{t}, \beta = 0,62$.

Введем в области G расчетную сетку с общим числом узлов 15×6 . Плоскую границу $\Gamma_{sl}(x, y, t_0)$ проведем под углом $\varphi = 30^\circ$. В качестве исходного выберем состояние, соответствующее автоматическому решению в момент $t_0 = 0,162$ (рис. 2). При переходе к криволинейной системе координат ξ, η, τ область G трансформируется в некоторую прямоугольную область Ω , в которой исходная расчетная сетка

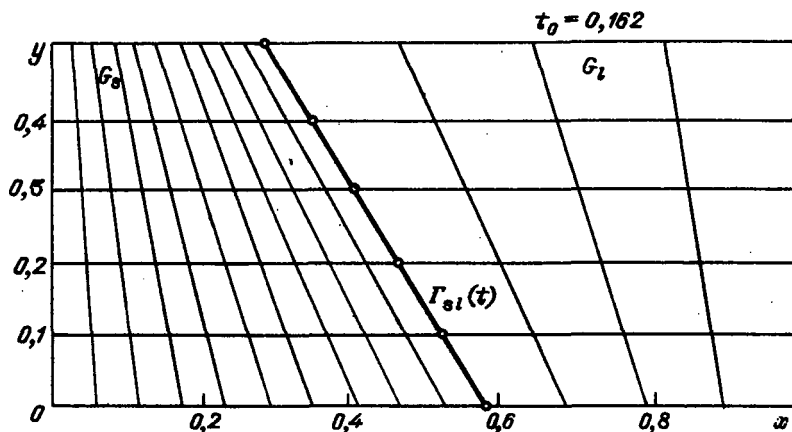


Рис. 2

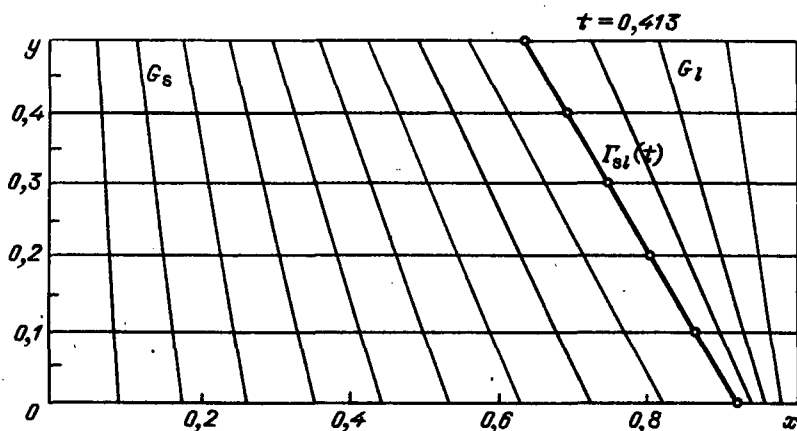


Рис. 3

становится равномерной по обоим измерениям с тем же самым общим числом узлов и шагами $h_1 = h_2 = 5 \cdot 10^{-2}$. Плоская граница $\Gamma_{sl}(\xi, \eta)$ совпадает с координатной линией $\xi = \xi_{N_0}$, $N_0 = 11$, и положение ее остается неизменным с течением времени, как и величины шагов h_1 и h_2 .

Шаг интегрирования по времени ограничивался требованием устойчивости явной схемы. На рис. 3 представлено положение фазового фронта и вид расчетной сетки в физическом пространстве на момент времени $t = 0,413$. Автомодельное и численное решение сравнивались вдоль оси x в трех сечениях с $j = 1, 3, 5$, где j — номер строки, для трех моментов времени. Сравнение показало, что относительная погрешность δl не превышает 1%, что является вполне приемлемым для практического использования. В табл. 1 приведены значения величины Δl , характеризующие отклонение границы раздела фаз от плоской, где $\Delta l = l_p - l_T$, l_T — точное значение координаты z_T , соответствующей границе раздела фаз, l_p — расчетное значение этой координаты. Приведенные результаты свидетельствуют также о высокой точности определения положения границы раздела фаз.

Таблица 1

Номер строки	Расчетные значения l_p					
	$t = 0,2623$		$t = 0,3375$		$t = 0,4123$	
	$l_T = 0,6357$		$l_T = 0,7209$		$l_T = 0,7970$	
	l_p	Δl	l_p	Δl	l_p	Δl
1	0,6370	$1,3 \cdot 10^{-3}$	0,7224	$1,6 \cdot 10^{-3}$	0,7986	$1,6 \cdot 10^{-3}$
2	0,6365	$8 \cdot 10^{-4}$	0,7220	$1,1 \cdot 10^{-3}$	0,7983	$1,3 \cdot 10^{-3}$
3	0,6353	$-4 \cdot 10^{-4}$	0,7213	$4 \cdot 10^{-4}$	0,7978	$8 \cdot 10^{-4}$
4	0,6345	$-1,2 \cdot 10^{-4}$	0,7205	$-4 \cdot 10^{-4}$	0,7972	$2 \cdot 10^{-4}$
5	0,6349	$-8 \cdot 10^{-4}$	0,7207	$-2 \cdot 10^{-4}$	0,7981	$1,1 \cdot 10^{-3}$
6	0,6360	$3 \cdot 10^{-4}$	0,7217	$8 \cdot 10^{-4}$	0,7980	$1 \cdot 10^{-3}$

Нам представлялось интересным проверить экспериментально возможности метода в следующих ситуациях:

а) области заданных фазовых состояний с течением времени изменяются в несколько раз;

б) исходные расчетные сетки в физическом пространстве существенно отличаются от ортогональных.

С этой целью решалась следующая модельная задача. В прямоугольной области $G = \{ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0,5 \}$ в начальный момент времени $t = 0$ задавалась подобласть G_s с $u = -1$ в виде уголка вдоль линий $x = 0$ и $y = 0,5$ с толщиной $1,25 \cdot 10^{-2}$, одинаковой по обоим направлениям. Остальную часть плоскости занимала область G_l с $u = 0$ (рис. 4). С течением времени фазовый фронт $\Gamma_{sl}(t)$ распространялся к точке $x = 1, y = 0$ из подобласти G_l в подобласть G_s .

Как и при решении первой задачи, для моделирования выбиралась довольно грубая сетка с общим числом узлов для области G 10×10 . Для подобластей G_s и G_l предназначалось 10×6 и 10×5 узлов соответственно. Пространственные шаги в подобластях G_s и G_l в начальный момент времени отличались более чем в 20 раз. Сетка в физическом пространстве определялась пересечением радиальных лучей, выходящих из правого нижнего угла, представляемого в виде дуги AE , длина кото-

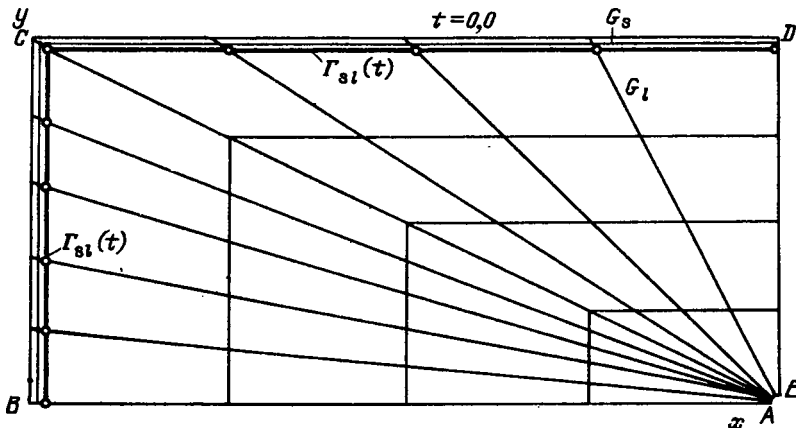


Рис. 4

рой $l \ll h_1, h_2$, и линий, параллельных координатным осям (рис. 4). В криволинейных координатах с помощью преобразования $\xi = \xi(x, y, t)$, $\eta = \eta(x, y, t)$, $\tau = t$ расчетная сетка отображалась в прямоугольную, а положение фазовой границы Γ_{sl} совпадало при этом с координатной линией $\eta = \eta_{M_0}$, $M_0 = 5$ (рис. 5).

Отметим, что аппроксимация всех граничных условий производилась конечно-разностными соотношениями, записанными в консервативной форме. Подробно эта процедура изложена в [30].

На рис. 6 представлен вид расчетной сетки и положение фазового фронта в момент времени $t = 0,104$. Расчеты показали, что к моменту времени $t = 0,122$ почти вся область G_s перешла в G_l . Использование при этом столь "экзотической" сетки с малым числом узлов и сильно изменяющимися пространственными шагами в каждой из подобластей никаких затруднений при расчетах не вызывает.

6. Моделирование задач о пограничном слое. Математическая модель (3), (5) с $g = -u$ использовалась для моделирования двух вариантов задачи, допускающей решение типа пограничного слоя. В исследованиях ставилась цель демонстрации принципиальной возможности двумерной адаптации расчетной сетки.

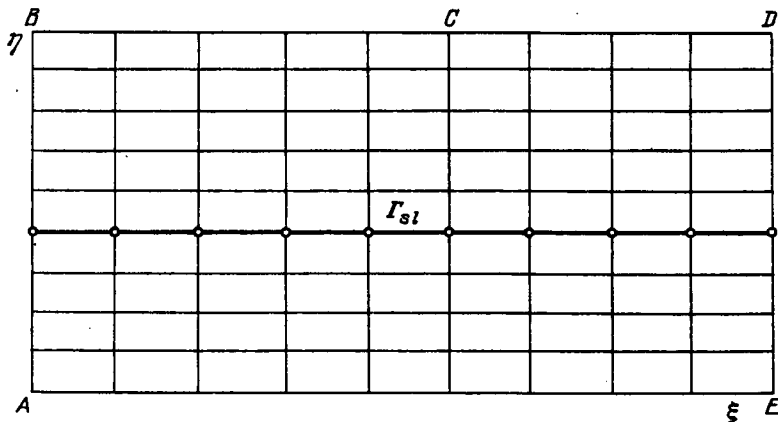


Рис. 5

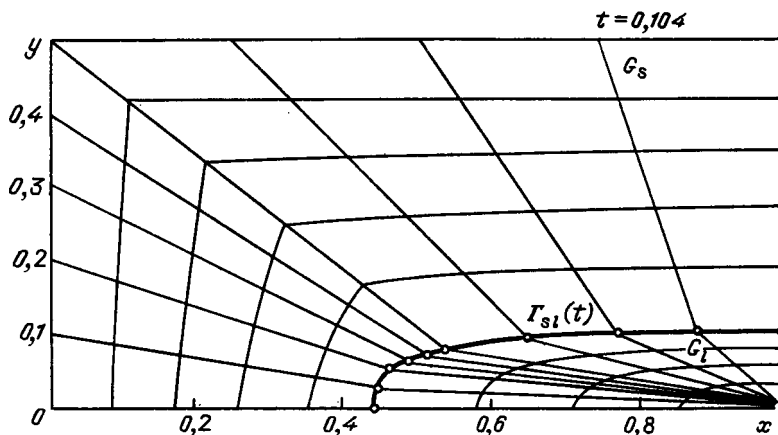


Рис. 6

В первом варианте в прямоугольной области $G = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0,5\}$ рассматривалась следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = 1, \quad u(x, 0, t) = 0, \\ u(x, 0,5, t) = 1, \quad u(1, y, t) = 0, \quad u(x, y, 0) = 0. \end{aligned}$$

В рассматриваемой задаче физическая и расчетные области совпадают. В начальный момент времени $t = 0$ совпадают и расчетные сетки, общее число узлов в которых задавалось равным (10×10) (рис. 7). Малый параметр λ выбирался равным 10^{-3} . Характерный размер пограничного слоя приближенно оценивается как $l \approx (\lambda)^{1/2} = 3,33 \cdot 10^{-2}$. Таким образом, рассматривался случай, когда пространственные шаги по каждому из направлений превосходили характерный размер пограничного слоя: $h_1, h_2 > l$.

Задание граничных значений u , отличных от нуля, в виде уголка приводит к тому, что область существенно неоднородного решения находится в верхнем левом углу области. При смещении вдоль границ вправо и вниз решение вблизи них приобретает одномерный характер. В областях одномерного изменения для решения можно выписать аналитическое выражение

$$u(l) = (e^{-l/\lambda} - e^{-(l-2)/\lambda}) / (1 - e^{-2/\lambda}). \quad (10)$$

Расчеты производились на фиксированной и адаптивной сетках с одинаковым общим числом узлов (10×10) до полного установления профиля u . Результаты расчетов сравнивались между собой и с аналитическим в областях его существования. Сравнение результатов показало, что при использовании фиксированной сетки в область пограничного слоя, в котором значения u_{ij} уменьшаются примерно на порядок, попадает одна координатная линия. Применение адаптивной сетки с тем же общим числом узлов позволяет сконцентрировать в этой области пять координатных линий сетки (рис. 8). Поточечное сравнение с аналитическим решением в областях пограничного слоя показало, что максимальная погрешность наблюдалась в узлах первой от границы координатной линии и составляла 1–3%.

Численное решение, полученное на адаптивной сетке, представлено в виде изолиний на рис. 9. Концентрация узлов в областях сильного изменения решения приводит к существенной двумерной деформации сетки в физическом пространстве (рис. 8). О степени деформации адаптивной сетки можно судить по значениям якобиана ψ_{ij} , характеризующим площади ячеек с индексами (ij) . В равномерных фиксированных сетках площади ячеек равны и неизменны во времени, $\psi_{ij} = \text{const}$. Узлы адаптивных сеток в начальный момент совпадают с узлами фиксированных сеток. К моменту установления решения значения ψ_{ij} в областях пограничного слоя уменьшаются в 4–5 раз, а в области нулевого решения увеличиваются в 3–6 раз. Тем самым расчетная сетка в физическом пространстве становится существенно неортогональной (рис. 8).

Еще большая степень деформации расчетной сетки достигалась во втором варианте задачи, где рассматриваемая область представляла собой квадрат со сторонами равными 1,4 и граничное условие $u = 1$ задавалось на одной из главных диагоналей. Тем самым пограничный слой располагался вдоль главной диагонали. В направлении перпендикулярном к этой диагонали существует аналитическое решение типа (10).

В рассматриваемой области вводилась ортогональная сетка с равномерным распределением узлов общим числом 20×20 . Шаги сетки более чем в два раза превосходили характерную толщину пограничного слоя $l \approx 3,3 \cdot 10^{-2}$. Как и в первом варианте, расчеты велись до полного установления, а затем полученные значения ре-

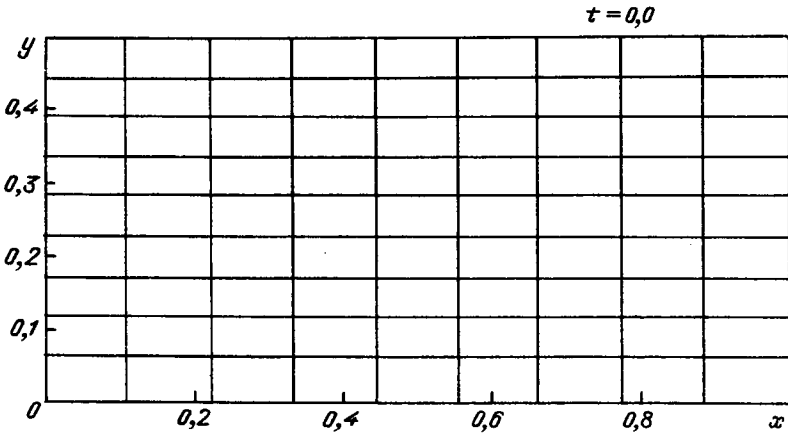


Рис. 7

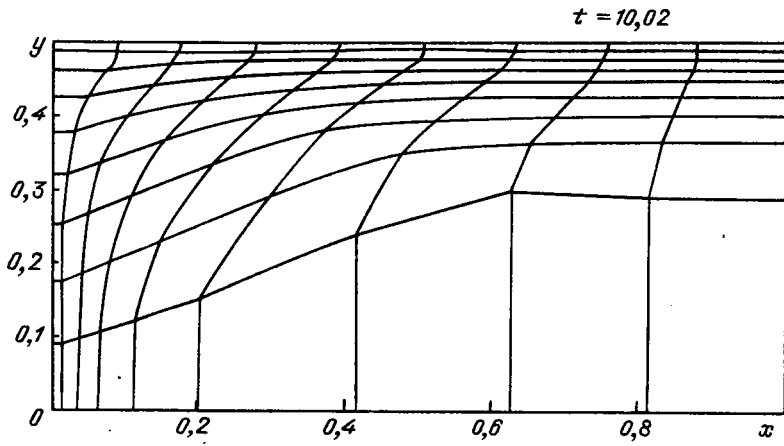


Рис. 8

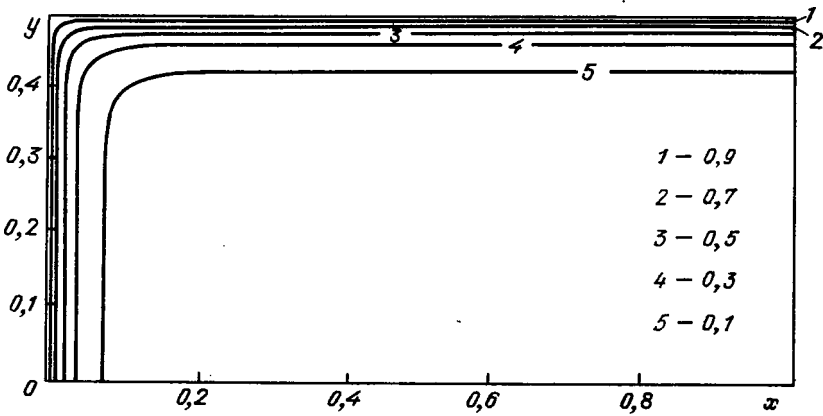


Рис. 9

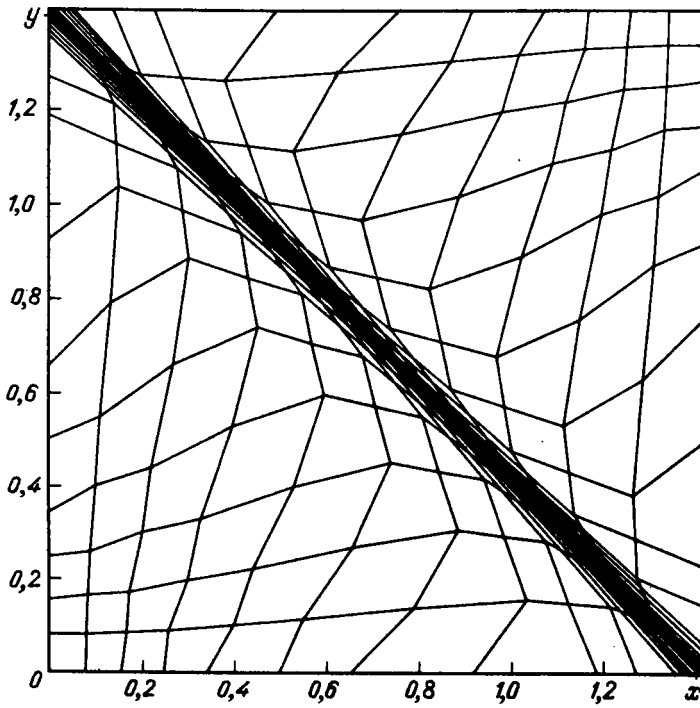


Рис. 10

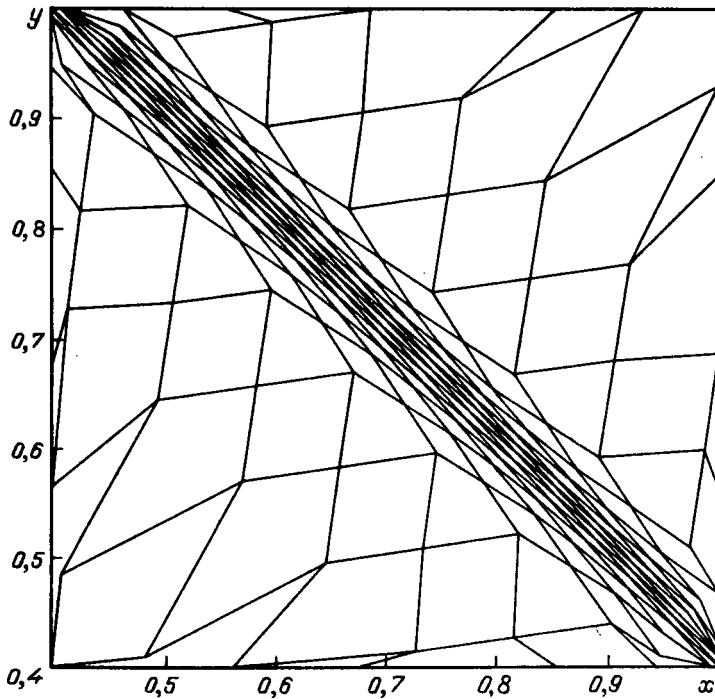


Рис. 11

шения сравнивались с точным. Конфигурация адаптивной сетки в момент установления решения показана на рис. 10. Для наглядности на рис. 11 приведен ее фрагмент в увеличенном масштабе. В области пограничного слоя на характерной толщине l концентрировалось до семи ячеек сетки, что приводило к ее чрезвычайно сильной деформации. Отметим, что максимальное значение отношения площадей ячеек в зоне пограничного слоя и площади ячеек в остальной области достигало двух порядков.

Существует широко распространенное мнение, что расчеты на сильно неравномерных сетках, особенно в случае многомерных задач, характеризуются низкой точностью. В частности, это может происходить из-за большой погрешности аппроксимации смешанных производных и потоковых величин на неортогональных сетках. Однако в случае адаптивных сеток, динамически связанных с решением, указанные эффекты сглажены. Вычисления ведутся в расчетном пространстве на неподвижной прямоугольной сетке. Информация о деформации сетки в физическом пространстве передается через метрические коэффициенты, а поскольку деформация сетки определяется динамикой решения, то изменения решения и положения узлов происходят согласованно. Это означает, что в областях сильного изменения решения значения якобиана перехода и метрических коэффициентов уменьшаются пропорционально величине градиентов, что должно приводить к уменьшению погрешности аппроксимации. В областях слабого изменения решения площади ячеек сетки увеличиваются, соответственно растут значения ψ и метрических коэффициентов. Однако величины производных в этой области невелики, соответственно мала и погрешность аппроксимации. Так, в выполненных расчетах погрешность численного решения в зоне пограничного слоя не превышала 2%.

В заключение отметим, что выполненное математическое моделирование свидетельствует о том, что предлагаемый метод построения адаптивных сеток, динамически связанных с решением, является достаточно эффективным для решения неоднородных краевых задач математической физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.
2. Thompson J.F. Grid generation technics in computation fluid dynamics // AIAA J. — 1984. — V. 22, No. 11. P. 1505–1523.
3. Thompson J.F. Numerical Grid Generation. — Amsterdam: North-Holland, 1982. — 909 p.
4. Яненко Н.Н., Данаев Н.Т., Лисейкин В.Д. О вариационном методе построения сеток // Числ. методы мех. сплошной среды. — Новосибирск. — 1977. — Т. 8, № 4. — С. 157–163.
5. Brackbill J., Saltzman J. Adaptive zoning for singular problems in two dimensions // J. Comput. Phys. — 1982. — No. 46. — P. 342–368.
6. Десятьев Л.М., Дроздов В.В. Адаптирующиеся к решению сетки в эллиптических задачах на плоскости // Дифференц. уравнения. — 1984. — Т. 20, № 7. — С. 1194–1203.
7. Nakahaski K., Dewert. Three-dimensional adaptive grid method // AIAA J. — 1986. — V. 24, No. 9. — P. 945–954.
8. Kreis R.I., Thames F.C., Hassan H. Application of a variational method for generating adaptive grids // AIAA J. — 1986. — V. 24, No. 3. — P. 404–410.
9. Anderson D.A. Equidistribution schemes, poisson generators and adaptive grids // Appl. Math. Comput. — 1987. — No. 24. — P. 211–227.
10. Rai M.M., Anderson D.A. Application of adaptive grid to fluid-flow problems with asymptotic solutions // AIAA J. — 1982. — V. 20, No. 4. — P. 469–502.
11. Dwyer H.A., Kee R.J., Sanders B.R. Adaptive grid method for problems in fluid mechanics and heat transfer // AIAA J. — 1980. — V. 18, No. 10. — P. 1205–1212.
12. Dwyer H.A. Grid adaption for problems in fluid dynamics // AIAA J. — 1984. — V. 22, No. 12. — P. 1705–1712.

13. Bell J.B., Shubin C.R. An adaptive grid finite difference method for conservation laws // J. Comput. Phys. — 1983. — V. 52. — P. 569–591.
14. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Наука, 1980. — С. 352.
15. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976. — 400 с.
16. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. — М.: Наука, 1984. — 520 с.
17. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Метод построения адаптивных сеток для одномерных краевых задач. — М., 1987. — 26 с. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 33).
18. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Об одном подходе к построению адаптивных разностных сеток // ДАН СССР. — 1988. — Т. 298, № 1. — С. 64–68.
19. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Об одном подходе к построению адаптивных сеток для нестационарных задач // ЖВМ и МФ. — 1988. — Т. 28, № 3. — С. 454–460.
20. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. О численном решении задачи Стефана на адаптивной сетке. — М., 1987. — 17 с. (Препр. ИПМ АН СССР; № 51).
21. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Математическое моделирование задачи Стефана на адаптивной сетке // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 7. — С. 1154–1160.
22. Бреславский П.В., Мажукин В.И. Математическое моделирование процессов импульсного плавления и испарения металла с явным выделением фазовых границ // ИФЖ. — 1989. — Т. 56, № 6.
23. Дарьин Н.А., Мажукин В.И., Самарский А.А. Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с использованием адаптивных сеток. — М., 1987. — 38 с. — (Препр. / ИПМ АН СССР; № 115).
24. Дарьин Н.А., Мажукин В.И., Самарский А.А. Конечно-разностный метод решения одномерных уравнений газовой динамики на адаптивных сетках // ДАН СССР. — 1988. — Т. 302, № 5. — С. 1078–1081.
25. Дарьин Н.А., Мажукин В.И., Самарский А.А. Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с использованием адаптивных сеток, динамически связанных с решением // ЖВМ и МФ. — 1988. — Т. 28, № 8. — С. 1210–1225.
26. Дарьин Н.А., Мажукин В.И., Самарский А.А. Конечно-разностный метод решения нестационарных двумерных краевых задач на адаптивной сетке, динамически связанной с решением. — М., 1988. — 27 с. (Препр. ИПМ; № 117).
27. Бакирова О.И. О некоторых методах решения задачи Стефана // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19, № 3. — С. 491–500.
28. Davis M., Kapadia P., Dowden J. Solution of a Stefan problem in the theory of laser welding by the method of lines // J. Comput. Phys. — 1985. — V. 60. — P. 534–548.
29. Караслю Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964. — 487 с.
30. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Математическое моделирование нестационарной двумерной задачи Стефана на адаптивной сетке. — М., 1987. — 25 с. — (Препр. ИПМ АН СССР; № 52).