

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ВСЕСОЮЗНЫЙ ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ЮИЛЬ

№ 7

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ТОМ 25



МИНСК  
«НАУКА И ТЕХНИКА»  
1989

## ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЛН СО СЛАБЫМИ РАЗРЫВАМИ НА СЕТКАХ С ДИНАМИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИЕЙ

1. Численному исследованию задачи о распространении температурной волны, описываемому квазилинейным уравнением теплопроводности, уделялось достаточно много внимания [1, 2]. Повышенный интерес к этой проблеме обусловлен наличием особенности в решении. Хорошо известно [3], что при определенном выборе теплофизических параметров решение уравнения теплопроводности в точке, где меняющийся профиль примыкает к постоянному, может содержать слабый разрыв, т. е. решение содержит точку, в которой его производная разрывна, а тепловой поток непрерывен. Это приводит к возникновению температурной волны, распространяющейся по среде с конечной скоростью. Отметим, что в этом случае нелинейная задача теплопроводности не имеет классического решения.

В работах [1, 2] для расчета обобщенных решений использовались неявные однородные разностные схемы сквозного счета, не предусматривающие явного выделения точек слабого разрыва. Было установлено, что эти схемы пригодны для расчета температурных волн, позволяют вести счет с крупным шагом по времени и хорошо передают скорость распространения, а при достаточно подробной сетке и сам профиль фронта. Исследования показали, что максимальная ошибка наблюдается в области фронта волны и сильно зависит от пространственного шага сетки. Так как алгоритмы сквозного счета разглаживают область слабого разрыва на одну или несколько ячеек, то при использовании грубых сеток ошибка в окрестности фронта может достигать больших значений, которые быстро уменьшаются при удалении от фронта [1]. Таким образом, если в расчетах использовать подвижные сетки со сгущением узлов, то можно, уменьшив общее число узлов, существенно уменьшить максимальное значение ошибки. Эта идея была реализована в работах [4, 5], в которых для расчетов использовался метод адаптивных сеток, динамически связанных с решением. За счет концентрации узлов вблизи особенности решения разглаживание фронта удалось свести к некоторому минимальному значению, однако из-за несовпадения положения фронта с узлами сетки все пространственные профили в точке примыкания содержали характерный выступ (см. рис. 1, 2 [4]).

В настоящей работе предлагается алгоритм численного решения нестационарной задачи теплопроводности с явным выделением области слабого разрыва при одновременном повышении эффективности за счет исключения из рассмотрения областей решения с постоянными значениями. Численная реализация производится конечно-разностным методом на сетке с динамической адаптацией [4, 5].

Предлагаемый способ решения допускает обобщение на более широкий класс нестационарных задач посредством представления их в виде задач со свободной границей.

2. Рассмотрим квазилинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \varepsilon(u)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right]; \quad x_L \leq x \leq x_R. \quad (1)$$

Положим, что

$$\varepsilon(u) = u, \quad \lambda = \lambda_0 u^\alpha, \quad \varepsilon(u_0) = \lambda(u_0) = 0, \quad \alpha(u) \geq 0.$$

Известно [3], что при  $\alpha > 1$  образуется температурная волна, фронт которой движется по среде с постоянной скоростью.

Уравнение (1) допускает автомодельное решение типа бегущей волны

$$u(x, t) = \begin{cases} (\alpha c)^{1/\alpha} (ct-x)^{1/\alpha}, & x < ct, \\ 0, & x \geq ct. \end{cases} \quad (2)$$

Выделение слабого разрыва осуществляется следующим образом. Пусть температурная волна распространяется слева направо и в момент времени  $t_*$  фронт находится в точке  $x_{\Gamma} = x_{\Gamma}(t_*)$ . Известно, что в этой точке выполняется условие  $u(x_{\Gamma}, t_*) = u_0$  и условие непрерывности потока

$$W = \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0. \quad (3)$$

Представим задачу о распространении слабого разрыва в виде задачи со свободной границей и сформулируем на разрыве граничные условия, аналогичные условиям в известной проблеме Стефана (с учетом того, что в задаче о распространении температурной волны теплота перехода  $L_{\kappa} = 0$ ). Как и в проблеме Стефана, искомыми являются пространственно-временные распределения температуры  $u(x, t)$  и скорость движения точки слабого разрыва  $v(t)$ . Для представления (1), (2) в виде задачи со свободной границей правая граница области  $x = x_{\Gamma}$  совмещается с точкой слабого разрыва  $x_R = x_{\Gamma}(t)$ , на которой записываются два граничных условия: для температуры

$$u(x_{\Gamma}(t), t) = u_0 \quad (3)$$

и скорости движения правой границы  $v(x_{\Gamma}(t), t)$ , которое получим из условия непрерывности теплового потока  $W(x_{\Gamma}(t), t) \equiv 0$  в точке слабого разрыва. В силу непрерывности  $W$  можно записать равенство потоков слева и справа от точки разрыва

$$W^- = \lambda \frac{\partial u(x_{\Gamma}^-, t)}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial u(x_{\Gamma}, t)}{\partial x} = -W^+.$$

Представляя поток в виде  $W^+ = v(x_{\Gamma}, t) \varepsilon(u^+)$ , получим условие для скорости  $v(x_{\Gamma}, t)$ :

$$\begin{aligned} v(x_{\Gamma}, t) &= -\lim_{x \rightarrow x_{\Gamma}} \frac{\lambda}{\varepsilon(u(x_{\Gamma}^+, t))} \frac{\partial u(x_{\Gamma}^-, t)}{\partial x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow x_{\Gamma}} \frac{\lambda(u)}{u} \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия на левой границе  $x = x_L$  могут быть любыми. В рассматриваемых нами примерах в качестве  $u(x_L, t)$  задавалась функция, зависящая от времени

$$u(x_L, t) = u(t). \quad (5)$$

Отметим следующие особенности постановки задачи. Начальный отрезок  $[x_L, x_{\Gamma}(t_0)]$  задается и может быть сколь угодно мал. Правая граница оказывается подвижной и расстояние, проходимое ею, в принципе не ограничено.

Для решения задачи (1)–(5) воспользуемся методом адаптивных сеток, динамически связанных с решением [4, 5], в основе которого лежит процедура автоматического преобразования координат с помощью искомого решения. Применяя к (1) преобразование общего вида  $x = x(q, t)$ , выполним переход из физического пространства  $\Omega_{x, t}$  в расчетное  $\Omega_{q, \tau}$ , в котором исходная задача принимает вид

$$\frac{\partial(\psi u)}{\partial \tau} = -\frac{\partial W}{\partial q} + \frac{\partial(Qu)}{\partial q}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = Q, \quad (7)$$

$\frac{\partial x}{\partial q} = \psi$ ;  $W = -\frac{\lambda(u)}{\psi} \frac{\partial u}{\partial q}$ ; (6) — уравнение теплопроводности в переменных  $q, \tau$ ; (7) — уравнение обратного преобразования, используемое в дальнейшем для описания поведения узлов;  $Q$  — функция, определяющая фактическое преобразование (конкретный вид функции  $Q$  определяется особенностями искомого решения);  $\psi$  — метрический коэффициент.

Основной особенностью рассматриваемой задачи наряду с подвижной границей является наличие областей больших градиентов, которые можно характеризовать первой производной решения  $\frac{\partial u}{\partial q}$ . Расчетную сетку желательно строить таким образом, чтобы в каждый момент времени в области больших градиентов концентрировалось достаточно большое число узлов. Достичь этой цели можно, задавая функцию  $Q$ , например, в виде

$$Q = -Q_0 \frac{\partial}{\partial q} \left( \psi \frac{\partial u}{\partial q} \right),$$

где  $Q_0$  — некоторый размерный коэффициент, величина которого может варьироваться в довольно широком диапазоне значений.

Граничные условия для (6), (7) следуют из (3), (4):

$$q = q_L: u(q_L, \tau) = u(\tau), Q(q_L, \tau) = 0; \quad (8)$$

$$q = q_T: u(q_T, \tau) = u_0, Q(q_T, \tau) = -v_T = \lim_{q \rightarrow q_T} \frac{\lambda(u)}{u\psi} \frac{\partial u}{\partial q}. \quad (9)$$

Граничное условие  $Q(q_0, \tau) = 0$  означает неподвижность левой границы.

Для численного решения в пространстве  $\Omega_{q,\tau}$  вводилась расчетная сетка с постоянным шагом  $h$  по переменной  $q$  и шагом  $\Delta\tau$  по переменной  $\tau$ :  $\omega = \{(q_i, \tau^i), (q_{i+5}, \tau^i), q_i = q_{i-1} + h, q_{i+5} = q_i + 0,5h, \tau^{j+1} = \tau^j + \Delta\tau, i = 1, 2, \dots, N\}$ .

В целых точках вычислялись функции  $x, u, \lambda, Q$ , в полуцелых —  $W, \psi$ .

Для аппроксимации уравнений (6), (7) использовалась неявная консервативная разностная схема, полученная с помощью интегро-интерполяционного метода. Аппроксимация граничных условий затруднений не вызывает, за исключением условия на функцию  $Q(q_T, \tau)$ . Его аппроксимация осуществлялась интегро-интерполяционным методом с использованием уравнений (6), (7). Окончательное выражение для  $Q(q_T, \tau)$  имеет вид  $Q_N = W_{N-5}/u_{N-5}$ .

Численная реализация разностной схемы производилась матричной прогонкой с итерациями по нелинейности.

3. Рассматривались два варианта движения теплового фронта, в одном из которых коэффициент теплопроводности задавался  $\lambda = u^2$ , а во втором  $\lambda = u^{10}$ . Исследовалось влияние погрешности аппроксимации граничного условия на подвижной границе и влияние величины коэффициента  $Q_0$  на процесс адаптации.

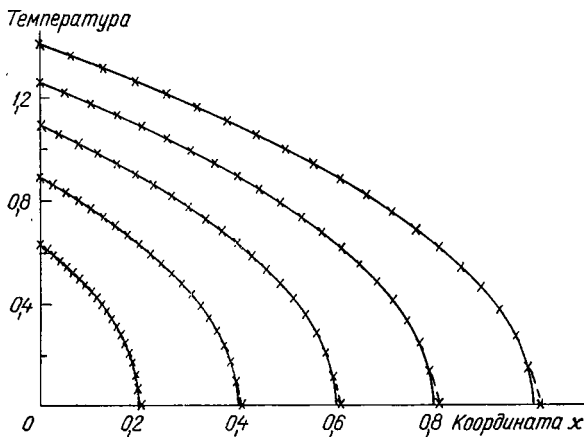


Рис. 1

Расчеты проводились для первого варианта  $\lambda = u^2$  на сетке с общим числом узлов  $N=21$  (рис. 1). Для второго варианта  $\lambda = u^{10}$  использовались сетки с  $N=21; 41$  (рис. 2, 3). На температурных профилях для различных моментов времени (рис. 1—3) точные решения изображены сплошными линиями, численные — штриховыми. Количество и положение узлов отмечено маркерами. Максимальная погрешность решения во всех вариантах наблюдалась в окрестности фронта тепловой волны, т. е. в области правой подвижной границы. Величина ее в основном

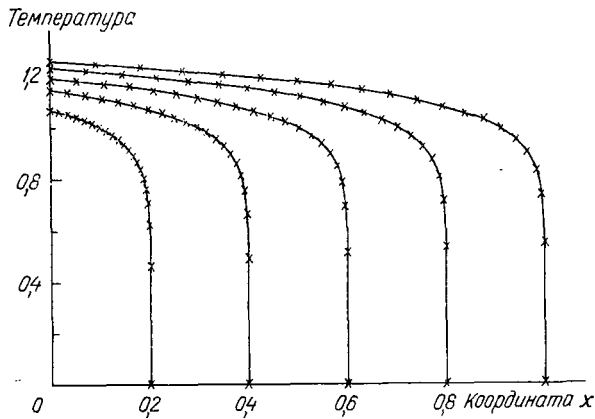


Рис. 2

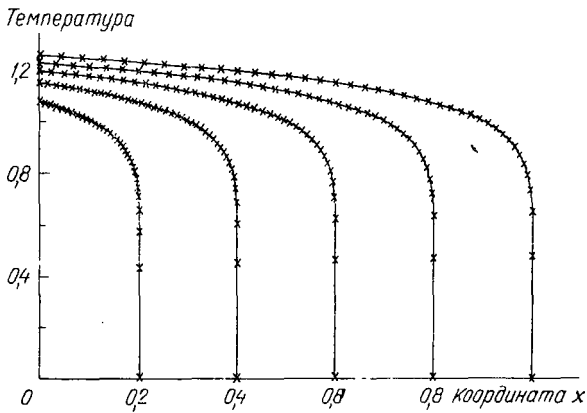


Рис. 3

определяется величиной погрешности аппроксимации граничного условия на подвижной границе и наиболее заметна в расчетах на сетке с малым числом узлов  $N \cong 11$ . Максимальную погрешность оценить в какой-либо норме затруднительно, и она показана графически. Увеличение общего числа узлов сетки приводит к существенному уменьшению погрешности. В варианте с  $\lambda = u^{10}$  при использовании сеток с  $N=21; 41$  к моменту  $t=1$  погрешность не превышает точности графического представления и поэтому на рис. 2, 3 не показана.

Отметим, что наличие наряду с механизмом динамической адаптации свободной границы приводит к появлению двух конкурирующих тенденций: увеличению расстояния между узлами за счет увеличения области, охваченной возмущением, и их сближению под действием адаптации. При использовании сетки со слишком малым общим числом узлов расталкивание может стать преобладающим и погрешность в области подвижной границы несколько увеличится.

У ряда исследователей вызывает некоторое беспокойство наличие свободного параметра  $Q_0$ , связанное с определенным произволом в выборе его значения. Как показывает практика решения ряда задач типа

теплопроводности, величина  $Q_0$  может варьироваться в довольно широком диапазоне значений без заметного влияния на решение. В самом деле, при  $Q_0 \rightarrow \infty$  скорость перестройки сетки близка к мгновенной. При  $Q_0 \rightarrow 0$  эффекты адаптации исчезают, а скорость перестройки сетки стремится к нулю. Таким образом, значение  $Q_0$  регулирует силу реакции сетки на изменение решения и определяет тем самым величину временного шага интегрирования.

В качестве доказательства этих рассуждений на рис. 4 для значений

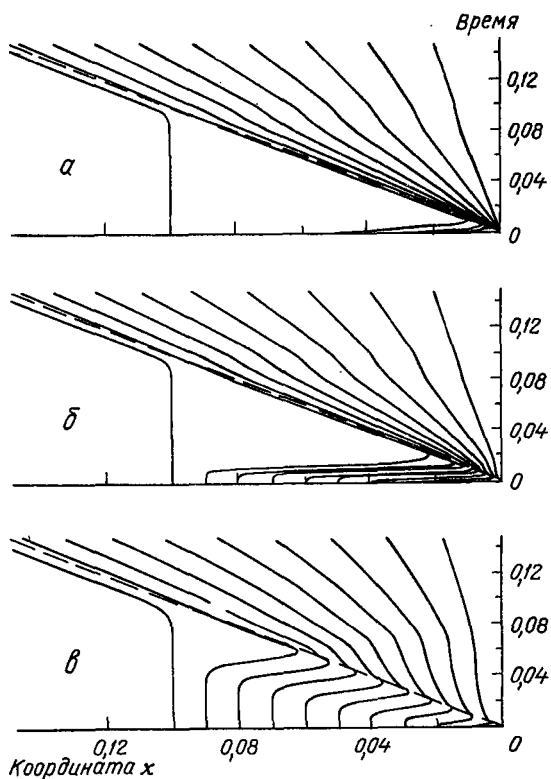


Рис. 4

$Q_0 = 10^2$  (а); 1 (б);  $10^{-2}$  (в) приведены траектории движения узлов, характеризующие структуру сетки в каждый момент времени применительно к варианту с  $\lambda = u^2$  и  $N = 11$ . Положение фронта, определяемое из автомодельного решения, отмечено штриховой линией. Начальный отрезок по  $x$  может быть любым. В данных расчетах он задавался равным 0,1. Затем на этом отрезке строилась равномерная сетка. На начальном этапе расчета все узлы, за исключением граничного, устремляются к левому концу. Скорость движения узлов в различных вариантах различна и зависит от величины  $Q_0$ . До захвата тепловой волны граничного узла расчеты ведутся без выделения фронта, но погрешность при этом невелика из-за малых размеров области решения, в которой сосредоточено  $N$  узлов. После захвата граничного узла область решения непрерывно увеличивается и узлы сетки динамически распределяются пропорционально градиентам. Согласно рис. 4, значение  $Q_0$  при этом существенной роли не играет. Таким образом, жесткой связи между величиной  $Q_0$  и решением нет.

Отметим, что процедура выделения области слабого разрыва проста по своей сути и сводит исходную задачу к краевой задаче со свободной границей. Решение подобных задач конечно-разностными методами с динамической адаптацией сетки не вызывает никаких дополнительных затруднений. Выделение области слабого разрыва позволяет существен-

но повысить точность расчетов при одновременном повышении эффективности алгоритмов с динамической адаптацией за счет исключения из рассмотрения области с постоянным решением.

### Литература

1. Самарский А. А., Соболев И. М. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3, № 4. С. 702—719.
2. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М., 1980.
3. Баренблатт Г. И., Вишик И. М. // Прикл. математика и механика: 1956. Т. 20, № 3. С. 411—417.
4. Дарьин Н. А., Мажукин В. И. Метод построения адаптивных сеток для одномерных краевых задач. М., 1987. (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР: № 33).
5. Дарьин Н. А., Мажукин В. И. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298, № 1. С. 64—68.

*Институт прикладной математики  
им. М. В. Келдыша АН СССР*

*Поступила в редакцию  
23 февраля 1989 г.*

УДК 519.63