



Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Академии наук СССР

В.Ф. Василевский, В.И. Мажукин

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ
НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
НА АДАПТИВНОЙ СЕТКЕ
С ЯВНЫМ ВЫДЕЛЕНИЕМ ОБЛАСТИ СЛАБОГО РАЗРЫВА

Препринт № 14 за 1989г.

Москва

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М. В. КЕЛДЫША
АКАДЕМИИ НАУК СССР

В. Ф. Василевский, В. И. Махукин

Ч И С Л Е Н Н О Е Р Е Ш Е Н И Е
Н Е С Т А Ц И О Н А Р Н О Й З А Д А Ч И Т Е П Л О П Р О В О Д Н О С Т И
Н А А Д А П Т И В Н О Й С Е Т К Е
С Я В Н Ы М В Ы Д Е Л Е Н И Е М О Б Л А С Т И С Л А Б О Г О Р А З Р Ы В А

Москва

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматривается нелинейная одномерная по пространству нестационарная задача теплопроводности, аналитическое решение которой содержит слабый разрыв. Численное решение задачи производится конечно-разностным методом с динамической адаптацией сетки, осуществляемой с помощью искомого решения. С целью повышения эффективности численного решения предлагается исходную задачу представлять в виде задачи со свободной границей, для чего точка слабого разрыва совмещается с подвижной границей области. Приведены примеры численного решения задачи о распространении тепловой волны для $\lambda = u^2$ и $\lambda = u^1$.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ.

Численному исследованию задачи о распространении температурной волны, описываемому квазилинейным уравнением теплопроводности, уделялось достаточно много внимания [1,2]. Повышенный интерес к этой проблеме обусловлен наличием особенности в решении. Хорошо известно [3], что при определенном выборе теплофизических параметров решение уравнения теплопроводности в точке, где меняющийся профиль примыкает к постоянному, может содержать слабый разрыв, т.е. решение содержит точку, в которой его производная разрывна, а тепловой поток непрерывен. Это приводит к возникновению температурной волны, распространяющейся по среде с конечной скоростью. Отметим, что в этом случае нелинейная задача теплопроводности не имеет классического решения.

В работах [1,2] для расчета обобщенных решений использовались неявные однородные разностные схемы сквозного счета, не предусматривающие явного выделения точек слабого разрыва. Было установлено, что эти схемы пригодны для расчета температурных волн, позволяют вести счет с крупным шагом по времени и хорошо передает скорость распространения, а при достаточно подробной сетке и сам профиль фронта. Исследования показали, что максимальная ошибка наблюдается в области фронта волны и сильно зависит от пространственного шага сетки. Так как алгоритмы сквозного счета разглаживают область слабого разрыва на одну или несколько ячеек, то при использовании грубых сеток ошибка в окрестности фронта может достигать больших значений, которые быстро уменьшаются при удалении от фронта [1]. Таким образом, если в расчетах использовать подвижные сетки со сгущением узлов, то можно, уменьшив общее число узлов, существенно уменьшить максимальное значение ошибки. Эта идея была реализована в работах [4,5], в которых для расчетов использовался метод адаптивных сеток, динамически связанных с решением. За счет концентрации узлов вблизи особенности решения разглаживание фронта удалось свести к некоторому минимальному значению, однако, из-за несовпадения положения фронта с узлами сетки все пространственные профили в точке примыкания содержали характерный выступ, рис.1,2 [4].

В настоящей работе предлагается алгоритм численного решения нестационарной задачи теплопроводности с явным выделением

области слабого разрыва при одновременном повышении эффективности за счет исключения из рассмотрения областей решения с постоянными значениями. Численная реализация производится конечно-разностным методом на сетке с динамической адаптацией [4,5].

Предлагаемый способ решения допускает обобщение на более широкий класс нестационарных задач, посредством представления их в виде задач со свободной границей.

§ 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассмотрим квазилинейное уравнение теплопроводности

$$(1) \quad \frac{\partial \varepsilon(u)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right]; \quad x_L \leq x \leq x_R.$$

Положим, что

$$\varepsilon(u) = u, \quad \lambda = \lambda_0 u^\alpha, \quad \varepsilon(u_0) = \lambda(u_0) = 0, \quad \alpha(u) \geq 0.$$

Известно [3], что при $\alpha > 1$ образуется температурная волна, фронт которой движется по среде с постоянной скоростью.

Уравнение (1) допускает автомодельное решение типа бегущей волны:

$$(2) \quad u(x, t) = \begin{cases} (\alpha c)^{1/\alpha} (ct-x)^{1/\alpha} & , x < ct; \\ 0 & , x \geq ct. \end{cases}$$

Выделение слабого разрыва осуществляется следующим образом. Пусть температурная волна распространяется слева направо и в момент времени t_* фронт находится в точке $x_T = x_T(t_*)$. Известно, что в этой точке выполняется условие $u(x_T, t_*) = u_0$ и условие непрерывности потока $W = \lambda(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$. Представим задачу о распространении слабого разрыва в виде задачи со свободной границей и сформулируем на разрыве граничные условия, аналогичные условиям в известной проблеме Стефана (с учетом того, что в задаче о распространении температурной волны теплота перехода $L_M = 0$). Как и в проблеме Стефана искомыми являются пространственно-временные распределения температуры $u(x, t)$ и скорость движения точки слабого разрыва $v(t)$. Для представления (1,2) в виде задачи со свободной границей правая граница области $x = x_R$ совмещается с точкой слабого разрыва $x_R = x_T(t)$, на которой записываются два граничных условия для температуры

$$(3) \quad u(x_T(t), t) = u_0$$

и скорости движения правой границы $v(x_\Gamma(t), t)$, которое получим из условия непрерывности теплового потока $W(x_\Gamma(t), t) \equiv 0$ в точке слабого разрыва. В силу непрерывности W можно записать равенство потоков слева и справа от точки разрыва

$$W = \lambda \cdot \frac{\partial u(x_\Gamma^-, t)}{\partial x} = -\lambda \cdot \frac{\partial u(x_\Gamma^+, t)}{\partial x} = -W^*.$$

Представляя поток в виде $W^* = v(x_\Gamma, t) \cdot \varepsilon(u^+)$, получим условие для скорости $v(x_\Gamma, t)$

$$(4) \quad v(x_\Gamma, t) = - \lim_{x \rightarrow x_\Gamma} \frac{\lambda}{\varepsilon(u(x_\Gamma^+, t))} \cdot \frac{\partial u(x_\Gamma^-, t)}{\partial x} = - \lim_{x \rightarrow x_\Gamma} \frac{\lambda(u)}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Граничные условия на левой границе $x = x_L$ могут быть любыми. В рассматриваемых нами примерах в качестве $u(x_L, t)$ задавалась функция, зависящая от времени

$$(5) \quad u(x_L, t) = u(t).$$

Отметим следующие особенности постановки задачи. Начальный отрезок $[x_L, x_\Gamma(t_0)]$ задается и может быть сколь угодно мал. Правая граница оказывается подвижной и расстояние, проходимое ею, в принципе не ограничено.

Для решения задачи (1-5) воспользуемся методом адаптивных сеток, динамически связанных с решением [4,5], в основе которого лежит процедура автоматического преобразования координат с помощью искомого решения. Применяя к (1) преобразование общего вида $x = x(q, t)$, выполним переход из физического пространства $\Omega_{x,t}$ в расчетное $\Omega_{q,\tau}$, в котором исходная задача принимает вид:

$$(6) \quad \frac{\partial(\psi u)}{\partial \tau} = - \frac{\partial W}{\partial q} + \frac{\partial(Qu)}{\partial q},$$

$$(7) \quad \frac{\partial x}{\partial \tau} = Q,$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \psi, \quad W = - \frac{\lambda(u)}{\psi} \cdot \frac{\partial u}{\partial q}.$$

(6) - уравнение теплопроводности в переменных q, τ .

(7) - уравнение обратного преобразования, используемое в дальнейшем для описания поведения узлов.

Q - функция, определяющая фактическое преобразование. Конкретный вид функции Q определяется особенностями искомого решения.

ψ - метрический коэффициент.

Основной особенностью рассматриваемой задачи наряду с подвижной границей является наличие областей больших градиентов, которые можно характеризовать первой производной решения $\frac{\partial u}{\partial t}$. Расчетную сетку желательно строить таким образом, чтобы в каждый момент времени в области больших градиентов концентрировалось достаточно большое число узлов. Достичь этой цели можно задавая функцию Q , например, в виде

$$Q = -Q_0 \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left[\psi \cdot \frac{\partial u}{\partial q} \right],$$

где Q_0 - некоторый размерный коэффициент, величина которого может варьироваться в довольно широком диапазоне значений.

Граничные условия для (6,7) следуют из (3,4)

$$(8) \quad q = q_L: \quad u(q_L, \tau) = u(\tau), \quad Q(q_L, \tau) = 0;$$

$$(9) \quad q = q_r: \quad u(q_r, \tau) = u_0, \quad Q(q_r, \tau) = -v_r = \lim_{q \rightarrow q_r} \frac{\lambda(u)}{u\psi} \cdot \frac{\partial u}{\partial q}.$$

Граничное условие $Q(q_0, \tau) = 0$ означает неподвижность левой границы.

Для численного решения в пространстве $\Omega_{q, \tau}$ вводилась расчетная сетка с постоянным шагом h по переменной q и шагом Δt по переменной τ :

$$\omega = \left\{ (q_i, \tau^j), (q_{i+0.5}, \tau^j), q_i = q_{i-1} + h, q_{i+0.5} = q_i + .5h, \right. \\ \left. \tau^{j+1} = \tau^j + \Delta t, i = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

В целых точках вычислялись функции x , u , λ , Q , в полужелтых - W , ψ .

Для аппроксимации уравнений (6,7) использовалась неявная консервативная разностная схема, полученная с помощью интегро-интерполяционного метода. Аппроксимация граничных условий затруднений не вызывает за исключением условия на функцию $Q(q_r, t)$. Его аппроксимация осуществлялась интегро-интерполяционным методом с использованием уравнений (6,7). Окончательное выражение для $Q(q_r, t)$ имеет вид

$$Q_N = \frac{W_{N-0.5}}{u_{N-0.5}}.$$

Численная реализация разностной схемы производилась

матричной прогонкой с итерациями по нелинейности.

§ 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ.

Рассматривались два варианта движения теплового фронта, в одном из которых коэффициент теплопроводности задавался $\lambda = u^2$, а во втором - $\lambda = u^{1^0}$. Исследовалось влияние погрешности аппроксимации граничного условия на подвижной границе и влияние величины коэффициента Q_0 на процесс адаптации.

Расчеты проводились для первого варианта $\lambda = u^2$ на сетках с общим числом узлов $N = 11$ и 21 , рис. 1, 2. Для второго варианта $\lambda = u^{1^0}$ использовались сетки с $N = 21, 41$, рис. 3, 4. На температурных профилях для различных моментов времени, рис. 1-4, точные решения изображены сплошными линиями, численные - пунктирами. Количество и положение узлов отмечено маркерами. Максимальная погрешность решения во всех вариантах наблюдалась в окрестности фронта тепловой волны, т.е. в области правой подвижной границы. Величина ее в основном определяется величиной погрешности аппроксимации граничного условия на подвижной границе. Для наглядности были выполнены расчеты на сетке с малым числом узлов $N = 11$, рис. 1. Максимальную погрешность оценить в какой-либо норме затруднительно и она показана графически. Увеличение общего числа узлов сетки в два раза приводит к существенному уменьшению погрешности. В варианте с $\lambda = u^{1^0}$ при использовании сеток с $N = 21$ и 41 к моменту $t = 1$ погрешность не превышает точности графического представления и поэтому на рис. 3, 4 не показана.

Отметим, что наличие наряду с механизмом динамической адаптации свободной границы приводит к появлению двух конкурирующих тенденций: увеличению расстояния между узлами за счет увеличения области, охваченной возмущением, и их сближению под действием адаптации. При использовании сетки со слишком малым общим числом узлов расталкивание может стать преобладающим и погрешность в области подвижной границы несколько увеличится. Наиболее заметен этот эффект в варианте с $N = 11$, рис. 1.

У ряда исследователей вызывает некоторое беспокойство наличие свободного параметра Q_0 , связанное с определенным произволом в выборе его значения. Как показывает практика решения ряда задач типа теплопроводности, величина Q_0 может варьироваться в довольно широком диапазоне значений без

заметного влияния на решение. В самом деле, при $Q_0 \rightarrow \infty$ скорость перестройки сетки близка к мгновенной. При $Q_0 \rightarrow 0$ эффекты адаптации исчезают, а скорость перестройки сетки стремится к нулю. Таким образом, значение Q_0 регулирует силу реакции сетки на изменение решения и определяет, тем самым, величину временного шага интегрирования.

В качестве доказательства этих рассуждений на рис. 5-7 для значений $Q_0 = 10^{-2}, 1, 10^2$ приведены траектории движения узлов, характеризующие структуру сетки в каждый момент времени применительно к варианту с $\lambda = c^2$ и $N = 11$. Положение фронта, определяемое из автомодельного решения, отмечено пунктиром. Начальный отрезок по x может быть любым. В данных расчетах он задавался равным 0.1. Затем на этом отрезке строилась равномерная сетка. На начальном этапе расчета все узлы за исключением граничного устремляются к левому концу. Скорость движения узлов в различных вариантах различна и зависит от величины Q_0 . До захвата тепловой волной граничного узла расчеты ведутся без выделения фронта, но погрешность при этом невелика из-за малых размеров области решения, в которой сосредоточено N узлов. После захвата граничного узла область решения непрерывно увеличивается и узлы сетки динамически распределяются пропорционально градиентам. Согласно рис. 5-7 значение Q_0 при этом существенной роли не играет. Таким образом, жесткой связи между величиной Q_0 и решением нет.

§ 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Процедура выделения области слабого разрыва проста по своей сути и сводит исходную задачу к краевой задаче со свободной границей. Решение подобных задач конечно-разностными методами с динамической адаптацией сетки не вызывает никаких дополнительных затруднений. Выделение области слабого разрыва позволяет существенно повысить точность расчетов при одновременном повышении эффективности алгоритмов с динамической адаптацией за счет исключения из рассмотрения области с постоянным решением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Соболев И.М. Примеры численного расчета температурных волн. - ЖВМ и МФ, 1963, т.3, N4, с.702-719.
2. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. - М: Наука, 1980, с.352.
3. Баренблатт Г.И., Вишик И.М. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа. - ПММ., 1956, т.20, N3, с.411-417.
4. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Метод построения адаптивных сеток для одномерных краевых задач. Препринт ИГиМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1987, N33, с.26.
5. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Об одном подходе к построению адаптивных разностных сеток. ДАН СССР, 1988, т.298, N1, с.64-68.

РИС. 1.

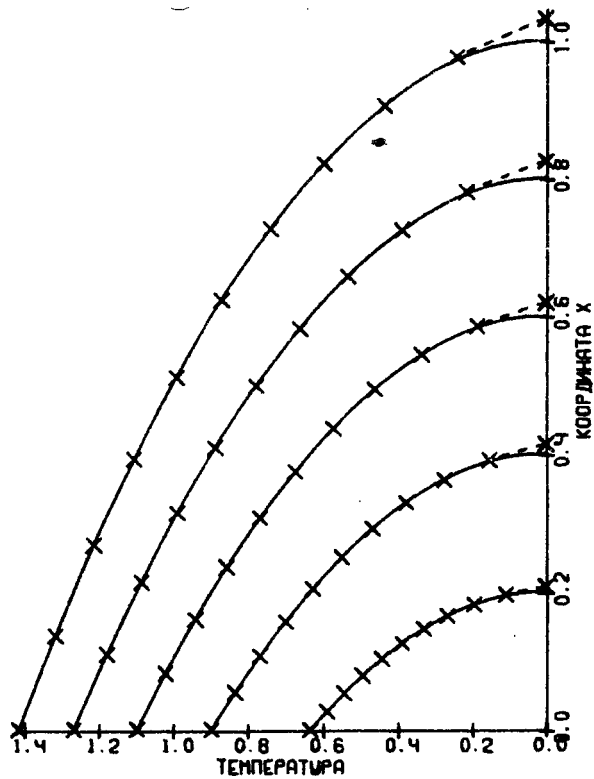


РИС. 2.

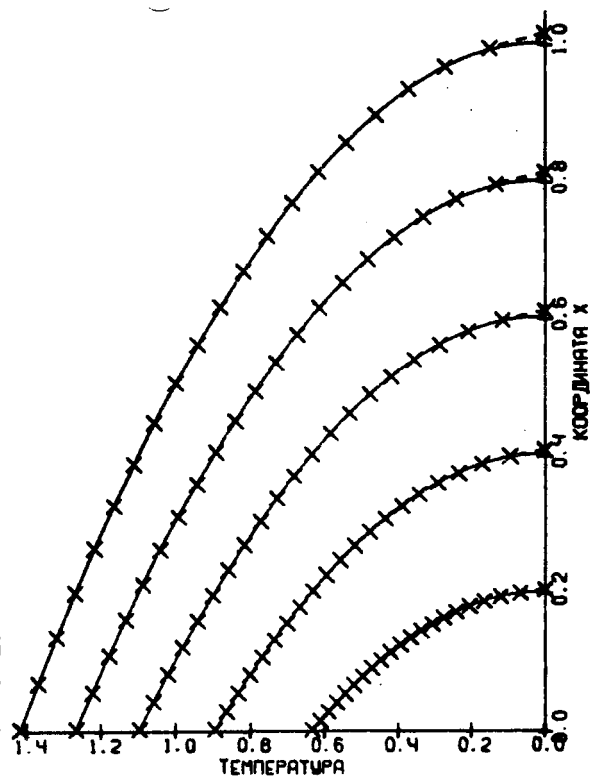


РИС. 3.

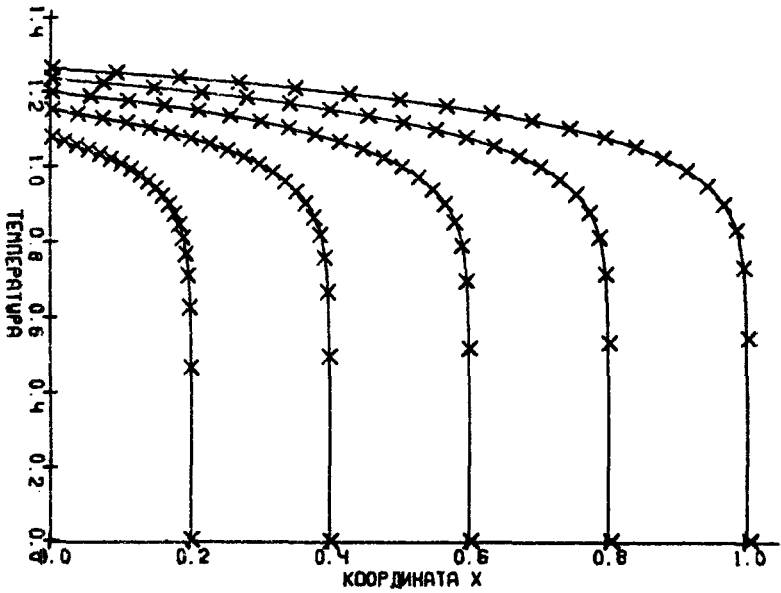


РИС. 4.

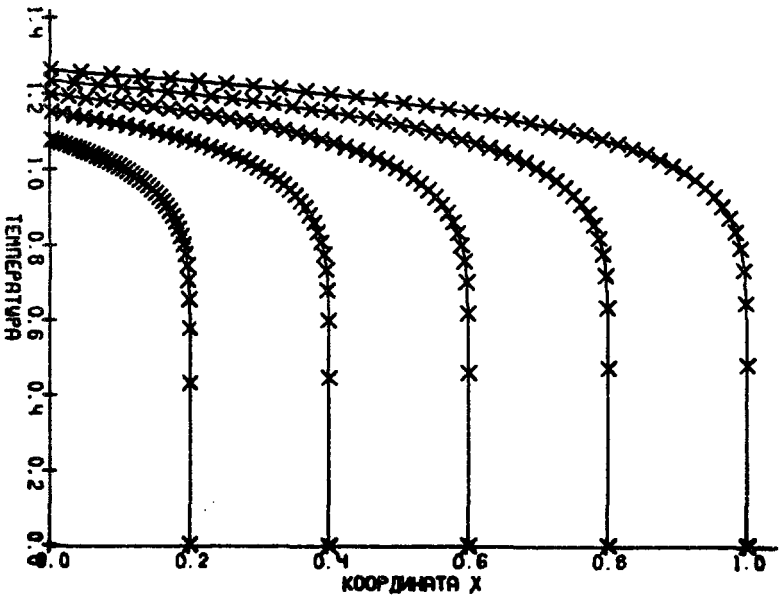


РИС. 7.

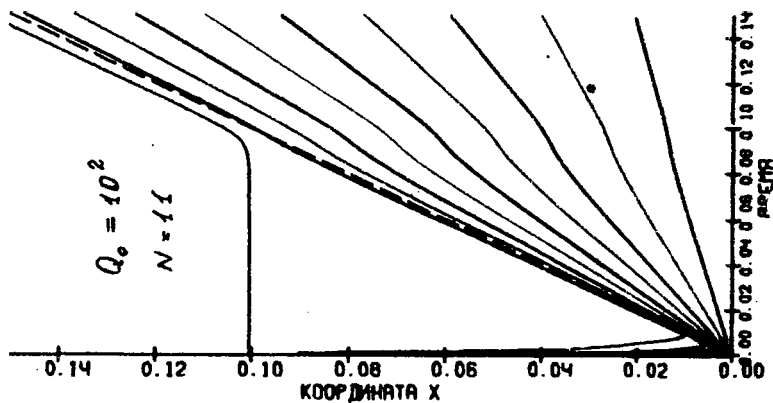


РИС. 6.

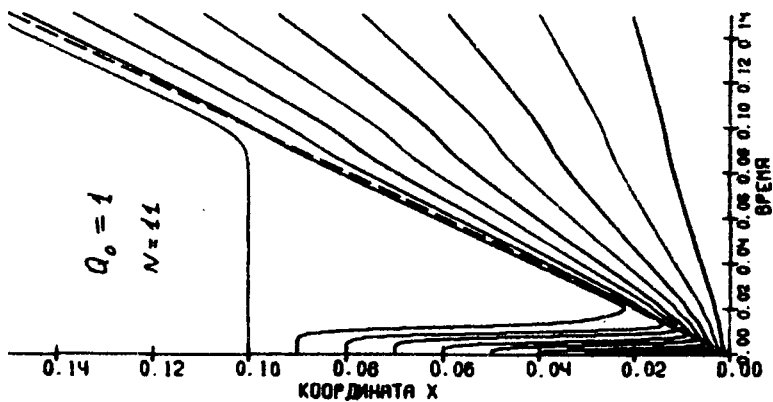


РИС. 5.

