

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ АДАПТИРУЮЩИХСЯ К РЕШЕНИЮ СЕТОК В ОДНОМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

© В.И. Мажукин, Л.Ю. Такоева

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, Москва

В статье сформулированы основные принципы метода решения одномерных задач эволюционного типа с помощью динамически адаптирующихся к решению расчетных сеток. Адаптация сетки производится с помощью производных решения различного порядка. На конкретных примерах демонстрируется возможность существенного повышения точности и эффективности алгоритма посредством представления нестационарных задач в виде задач со свободной границей.

THE PRINCIPLES OF DINAMICAL ADAPTING TO SOLVE GRID CONSTRUCTION INTO ONE-DIMENSIONAL BOUNDARY PROBLEMS

V.I. Mazhukin, L.U. Takoyeva

There is the one-dimensional evolutionary type problem method by means of dynamical adapting to solve computation meshes main principles formulated in this article. The grid adaptation is made with the aid of the different order of solving derivatives. The possibility of algorithm precision and efficiency increasing is illustrated of the concrete examples by consideration of nonstationary problems as free boundary one.

Существенными элементами численного решения уравнений математической физики являются выбор и конструирование расчетной сетки. В последнее время все большее распространение получают расчетные сетки, адаптирующиеся к решению, которые могут быть построены для всех типов уравнений в частных производных. Очевидно, построение адаптирующихся к решению сеток для уравнений в частных производных различного типа должно основываться на различных принципах. Наибольшее отличие в принципах построения наблюдается в задачах эллиптического и эволюционного типов. В стационарных задачах, описываемых эллиптическими уравнениями, адаптивные сетки могут строиться либо до начала расчетов [1–3], либо в ходе решения задачи [4–11]. Наиболее эффективными оказались адаптивные сетки для уравнений этого типа в случае многомерных задач со сложной геометрией области определения решения. Методы построения таких сеток сравнительно хорошо разработаны [4–7, 11]. В основу их положен вариационный принцип. Для вычисления оптимального распределения узлов сетки, минимизирующего погрешность решения, разными авторами использовались близкие по смыслу представления о минимизации упругой энергии (набор пружин) [8, 9], эквидистантности решения [7, 11], равномерного распределения [10] и др. Все эти подходы связаны с опреде-

ленным набором свободных параметров и определенными ограничениями, при невыполнении которых могут возникать связанные колебания сетки и решения.

В эволюционных задачах, описываемых уравнениями параболического, гиперболического и смешанного типов, стратегия построения адаптирующихся к решению сеток выглядит иначе. Принципы построения адаптирующихся сеток для подобных уравнений сформулированы не столь четко, как в случае эллиптических задач, что связано как с большим разнообразием особенностей, так и с непредсказуемостью поведения решения нелинейных динамических систем. Распространение вариационного принципа на эволюционные задачи не всегда приводит к успеху и не столь эффективно, как для стационарных задач.

Целью настоящей работы является формулировка основных принципов построения динамически адаптирующихся к решению расчетных сеток в задачах эволюционного типа. Изложение выполнено на примере задачи о распространении ламинарного пламени. Данная работа является также обобщением опыта решения нестационарных одномерных задач различной природы, выполненных в [12–19].

§ 1. Принципы построения

Основные трудности математического моделирования в нестационарных задачах связаны с наличием таких особенностей решения как возникновение и распространение зон больших градиентов, разрывов и подвижных границ. К числу подобных задач относятся, в частности, известные проблемы гидродинамики: возникновение ударных волн и контактных границ, задачи теплообмена: о фазовых превращениях и горении вещества, задачи пограничного слоя. Повышение точности и эффективности расчетов в этих задачах возможно посредством применения адаптирующихся к решению сеток.

Специфика поведения решения эволюционных задач предопределяет стратегию адаптации расчетных сеток для них, которая заключается в последовательном управлении распределении узлов на каждом шаге по времени. Опыт применения адаптирующихся сеток показывает, что перестройка сетки через определенное число временных слоев может приводить в задачах с сильно изменяющимся решением к слишком большим искажениям, а зачастую и к невозможности продолжения расчетов.

Опорными моментами в реализации указанной стратегии адаптации являются:

1. Переход от декартовой системы координат к произвольной нестационарной системе координат.
2. Использование в качестве параметра управления движением узлов сетки такой характеристики как производные различных порядков.
3. Определение закона обратного преобразования в виде дифференциального уравнения эволюционного типа.
4. Математическая формулировка задачи в консервативном виде.
5. Исключение из рассмотрения области решения, не охваченной возмущением, посредством представления исходной задачи в виде задачи с подвижной границей.

Переход к подвижной системе координат позволяет в расчетном пространстве иметь сетку с фиксированными узлами, а скорость движения узлов сетки учитывать непосредственно в уравнениях, описывающих физические процессы. Тем самым удастся избавиться от интерполяционных процедур для зависимых переменных. Если движение системы координат согласовать со скоростью изменения решения или движением разрывов, границ и т.п., то появляется возможность концентрации узлов в зонах больших градиентов или получения равномерных на каждый

момент времени сеток в задачах со свободными границами. Отметим, что пространственные шаги сетки в расчетном пространстве остаются неизменными.

Пусть (x, t) — исходные независимые переменные. Переход к произвольной нестационарной системе координат осуществляется с помощью замены общего вида $x = f(q, \tau)$, $t = \tau$, имеющей обратное преобразование $q = \phi(x, t)$, $\tau = t$. Частные производные зависимых переменных выражаются стандартным образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q},$$

где $\frac{\partial x}{\partial \tau}$ — скорость движения системы координат; $\Psi = \frac{\partial x}{\partial q}$ — метрический коэффициент.

Одной из наиболее важных проблем любого метода построения адаптирующихся сеток является выбор характеристики численного решения, используемой в качестве параметра, управляющего перемещением узлов сетки. Идеальную сетку можно построить лишь в случае заранее известного решения, выбрав в качестве управляющего параметра погрешность численного решения. Однако в действительности в распоряжении имеется только некоторая ограниченная информация о поведении решения. В силу этого в качестве управляющего параметра используются различные характеристики численного решения (см., например, [20–22]).

Выбор управляющего параметра в предлагаемом методе осуществляется из следующих соображений. В эволюционных задачах в областях с подвижными и неподвижными границами любое движение узлов с целью измельчения ячеек в зонах сильного изменения решения приводит к уменьшению общей погрешности решения. Поэтому представляется наиболее удобным в качестве управляющего параметра использовать различного порядка производные численного решения, характеризующие такие особенности решения, как скорость изменения, величину кривизны и т.п. Связь между элементами физического пространства Δx и расчетного — Δq , координаты которого неизменны во времени, можно выразить соотношением

$$\Delta q \sim |u^{(n)}| \Delta x, \quad n = 0, 1, 2, \dots, u^{(n)} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}.$$

Поскольку величина Δq постоянна, то между значениями Δx и производной $u^{(n)}$ существует обратно пропорциональная зависимость, из которой следует, что в физическом пространстве сильным изменениям производных соответствуют большие изменения Δx . В частном случае $u^{(n)}$ может равняться константе.

Основная проблема при построении динамически адаптирующихся сеток состоит в установлении конкретного вида обратного преобразования, переводящего расчетное пространство в физическое и в согласовании взаимосвязи между дифференциальной моделью и механизмом адаптации. Согласование означает, что в преобразованных координатах математическая постановка задачи и механизм адаптации должны описываться в рамках единой дифференциальной модели, представляющей собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Часть из этих уравнений описывает исследуемое явление, а остальные характеризуют динамику расчетной сетки, определяемую искомым решением. В эволюционных одномерных задачах этим требованиям будет удовлетворять нестационарное диф-

дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial x}{\partial q} = -Q, \quad (1)$$

правая часть которого зависит от особенностей решения основной задачи [12–16, 19]. В общем случае тип уравнения (1) должен согласовываться с типом уравнений, описывающих физические явления. Так в задачах диффузии и теплопроводности уравнение обратного преобразования может иметь параболический или смешанный тип. В случае уравнений гиперболического типа желательно, чтобы уравнение обратного преобразования имело тот же тип. Это позволяет в случае необходимости получать разрывные решения без процедуры разглаживания, например, явно выделять ударные волны в задачах нестационарной газовой динамики [17, 18]. С этой целью уравнение (1) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial Q}{\partial q},$$

где Q – газодинамический поток.

Рассмотрим указанные проблемы на конкретном примере развернутого моделирования задачи о горении ламинарного пламени.

§ 2. Моделирование процессов горения в стационарном случае

Задача о распространении ламинарного пламени в наибольшей степени соответствует требованиям тестирования предлагаемого метода. Характерная особенность задач горения заключается в наличии процессов с сильно различающимися характерными временами: малым временем химической реакции t_c и большим временем тепловой релаксации t_r , $t_r \gg t_c$. Высокая скорость химического превращения реагента и весьма медленное распространение тепловых возмущений по непрореагировавшей смеси приводят к формированию узкой зоны горения, в которой формируется фронт пламени, характеризующийся большими градиентами температуры. Наиболее известны и изучены два предельных режима горения: стационарный, в котором фронт горения распространяется с постоянной скоростью, и пульсирующий, сопровождающийся термокинетическими колебаниями [23–26].

Рассмотрим задачу, в которой скорость экзотермической реакции зависит от температуры по закону Аррениуса и от концентрации вещества. Предположим также, что процесс горения является изобарическим, а перенос тепла и вещества имеет диффузионную природу. Процессы переноса характеризуются одними и теми же коэффициентами диффузии и теплопроводности с постоянными значениями. В принятых предположениях описание задачи горения сводится к системе двух нелинейных уравнений параболического типа, которые в безразмерных переменных имеют вид [27]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} + A \rho e^{-\Theta/T}, \quad (2)$$

$$0 < x < L,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = Le \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - A \rho e^{-\Theta/T}, \quad (3)$$

где x , t – пространственная и временная координаты, T , ρ , Θ – температура, плот-

ность, энергия активации, Le , A – число Льюиса, предэкспоненциальная константа, $k = 1$ – коэффициент теплопроводности.

Постановка задачи взята из работы [27], согласно которой в момент времени $t = 0$ реакционноспособное вещество задавалось в виде одномерного стержня конечной длины $L = 1$ с начальной температурой $T(x, 0) = T_0$, и граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \rho(x, 0) = 1, \quad T(x, 0) = T_0, \\ \frac{\partial \rho(1, t)}{\partial x} = 0, \quad T(1, t) = T_0 + c_1 t (t < c_1) \quad \text{и} \quad T(1, t) = T_f(t) c_1. \end{aligned} \quad (4)$$

В [27] значения безразмерных параметров выбраны для горения углеводородного топлива в воздухе, для которого характерно шестикратное увеличение температуры. Поэтому $T(x, 0)$ выбиралось равным 0,2, а значение $T(x, t)$ менялось в интервале $T_0 < T < T_f$, где $T_f = T/T_0 = 6$ за исключением окрестности правой границы. Значение $\rho(x, t)$ изменялось в пределах от нуля до единицы.

Зона горения перемещалась от правого конца стержня к левому. Скорость перемещения при $Le = 1$ асимптотически стремится к постоянной величине – нормальной скорости горения, что соответствует устойчивому режиму горения. Постоянство скорости распространения фронта является благоприятным обстоятельством для оценки точности и эффективности различных методов численного решения, поскольку при $Le \neq 0$ найти точное аналитическое решение системы (2)–(4) не представляется возможным. Однако при постоянной скорости фронта оценки точности можно производить по сходящимся значениям u при вариации пространственных и временных шагов интегрирования. При численном решении системы (2)–(4) необходимо, чтобы в зону реакции попадало определенное, в зависимости от значений A и Θ , число пространственных интервалов. Это условие затрудняет создание экономичных алгоритмов, поскольку при использовании расчетных сеток с фиксированными узлами не представляется возможным производить дискретизацию пространственных переменных с крупным шагом. Тем самым число узлов в фиксированных сетках будет велико. Более эффективными в подобных ситуациях являются алгоритмы, использующие расчетные сетки, динамически адаптирующиеся к решению [12–14].

Рассмотрим различные аспекты построения и применения адаптивных сеток, динамически связанных с решением. С помощью замены общего вида $x = f(q, \tau)$ сформулируем задачу (2)–(3) в произвольных нестационарных координатах q, τ . Система уравнений записывается в строго консервативной форме и имеет вид:

$$\frac{\partial(\Psi T)}{\partial \tau} = - \frac{\partial W}{\partial q} - \frac{\partial(QT)}{\partial q} + A \rho \Psi e^{-\Theta/T}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\Psi \rho)}{\partial \tau} = - \frac{\partial R}{\partial q} - \frac{\partial(Q\rho)}{\partial q} - A \rho \Psi e^{-\Theta/T}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = - \frac{\partial Q}{\partial q}, \quad 0 < q < 1, \quad (7)$$

$$W = - \frac{k}{\Psi} \frac{\partial T}{\partial q}, \quad R = - \frac{1}{\Psi} \frac{\partial \rho}{\partial q}, \quad \Psi = \frac{\partial x}{\partial q},$$

где (7) – уравнение обратного преобразования, используемое в дальнейшем для

описания динамики расчетной сетки. Конкретный вид преобразования определяется видом функции Q . Для численного решения системы (5)–(7) в расчетном пространстве $\Omega_{q,\tau}$ использовалась равномерная по q сетка с разнесенными узлами. Шаг по переменной $\Delta\tau$ выбирался автоматически из условия достижения необходимой точности. К целым узлам сетки (q_i, t^j) относились $x_i^j, W_i^j, Q_i^j, R_i^j$, к полужелым $(q_{i+1/2}, t^j)$ – сеточные функции $T_{i+1/2}^j, \rho_{i+1/2}^j, \Psi_{i+1/2}^j$. Для разностной аппроксимации системы уравнений (5–7) использовалась неявная схема, полученная с помощью интегро-интерполяционного метода [28]:

$$\begin{aligned} \frac{(\Psi T)_{i+1/2}^{j+1} - (\Psi T)_{i+1/2}^j}{\Delta\tau} &= - \frac{W_{i+1}^{j+1} - W_i^{j+1}}{h} - \frac{(QT)_{i+1}^{j+1} - (QT)_i^{j+1}}{h} + \\ &+ A(\rho\Psi)_{i+1/2}^{j+1} e^{-\Theta/T_{i+1/2}^{j+1}}, \\ \frac{(\Psi\rho)_{i+1/2}^{j+1} - (\Psi\rho)_{i+1/2}^j}{\Delta\tau} &= \frac{R_{i+1}^{j+1} - R_i^{j+1}}{h} - \frac{(Q\rho)_{i+1}^{j+1} - (Q\rho)_i^{j+1}}{h} - \\ &- A(\rho\Psi)_{i+1/2}^{j+1} e^{-\Theta/T_{i+1/2}^{j+1}}, \\ \frac{\Psi_{i+1/2}^{j+1} - \Psi_{i+1/2}^j}{\Delta\tau} &= - \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{h}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (8)$$

Полученная система разностных уравнений нелинейна, решалась методом матричной прогонки с итерациями по нелинейности.

Определение точности и эффективности метода динамически адаптирующихся к решению сеток производилось посредством сравнения получаемых значений скорости распространения фронта со сходящимся значением v . Сходящееся значение скорости v было получено на сетке с фиксированными узлами при $N = 500$ и равнялось 35,3, что довольно хорошо согласуется с данными работы [27]. Для определения значений скорости использовалась интерполяционная процедура вида [25]

$$v = \frac{dx^*}{dt}, \quad \rho(x^*, t) = 0, 1.$$

В предлагаемом методе динамической адаптации одним из наиболее важных моментов является выбор функции Q . В задачах, где основной особенностью решения являются подвижные границы, динамическая адаптация сводится к построению равномерных на каждый момент времени сеток. Функция Q в этих случаях имеет вид [13], [16]

$$Q_1 = -D_0 \frac{\partial\Psi}{\partial q},$$

D_0 – имеет смысл коэффициента диффузии, и в общем случае его величину можно определять через теплофизические характеристики среды [16]. В задачах, решение которых содержит большие градиенты, узлы сетки должны сгущаться в областях сильного изменения решения. Тем самым Q должна зависеть от одной из производных решения, например, [12]:

$$Q_2 = -v_0 \frac{\partial}{\partial q} \left(\Psi \left| \frac{\partial T}{\partial q} \right| \right).$$

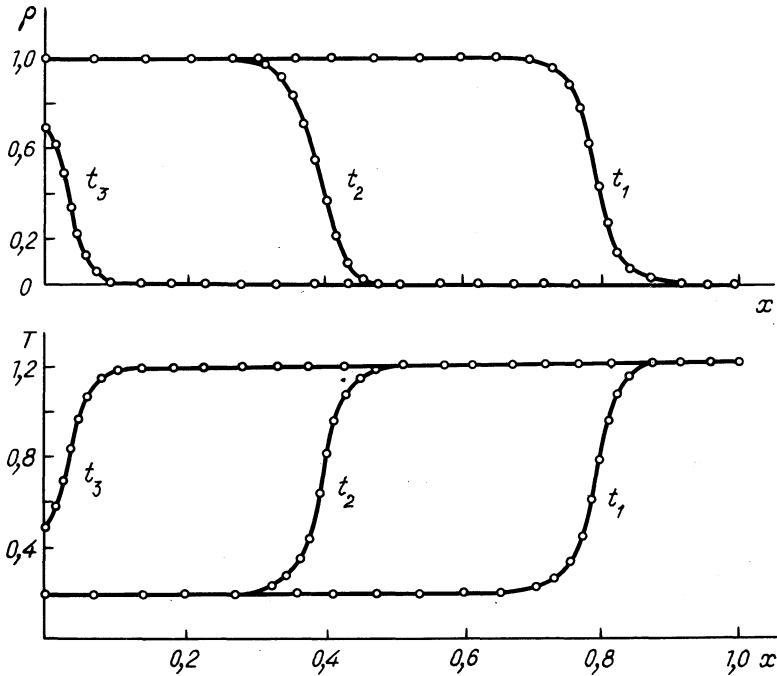


Рис. 1

Наличие функции Ψ под знаком производной ограничивает сближение двух соседних узлов до некоторой конечной величины. Для того, чтобы не было больших разрывов между узлами в областях сильного изменения решения и в областях, не охваченных возмущением, функция Q в [12, 14, 15] задавался в виде суммы Q_1 и Q_2

$$Q_3 = -D_0 \frac{\partial \Psi}{\partial q} - \nu_0 \frac{\partial}{\partial q} \left(\Psi \left| \frac{\partial T}{\partial q} \right| \right). \quad (9)$$

В работах [12, 14] отмечалось, что указанная конструкция Q не является единственной, но других видов Q не приводилось.

Рассмотрим некоторые варианты конструкций функции Q , зависящие от производных решения задачи, и эффективность алгоритмов. Из множества вариантов рассмотрим следующие:

$$Q_4 = -D_0 \frac{\partial \Psi}{\partial q} - \nu_0 \frac{\partial}{\partial q} \left(\Psi \left| \frac{\partial T}{\partial q} \right| \right) - \sigma_0 \frac{\partial}{\partial q} \left(\Psi \left| \frac{\partial^2 T}{\partial q^2} \right| \right),$$

$$Q_5 = -D_0 \frac{\partial \Psi}{\partial q} - \chi \frac{W}{T} - \nu_0 \frac{\partial}{\partial q} \left(\Psi \left| \frac{\partial T}{\partial q} \right| \right),$$

$$Q_6 = -D_0 \frac{\partial \Psi}{\partial q} - \chi \frac{W}{T}, \quad W = -\frac{k}{\Psi} \frac{\partial T}{\partial q}.$$

Для каждой из представленных функций $Q_3 - Q_6$ проводился полный расчет задачи (5-7). Расчеты проводились на сетке с общим числом узлов $N = 25$. Определялись температурные и концентрационные поля, стационарные значения скорости распространения фронта пламени, фиксировались величины шага интегрирования Δt

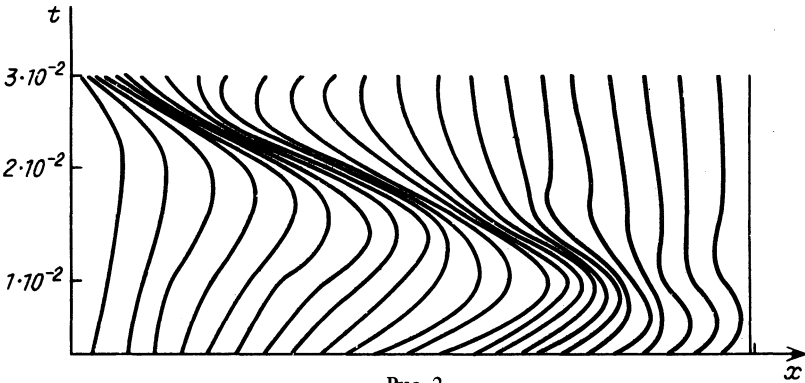


Рис. 2

по переменной t и затраты процессорного времени. Типичные пространственно-временные профили $T(x, t)$ и $\rho(x, t)$ для Q_3 представлены на рис. 1. На рис. 2 представлена диаграмма движения узлов сетки в физическом пространстве. Полученные значения скорости v , используемые шаги интегрирования Δt по переменной t , общее число и число узлов, концентрирующиеся в зоне горения, приведены в таблице 1. Там же представлены аналогичные параметры для фиксированной сетки. Параметр δv характеризует отклонение значений скорости распространения фронта, получаемых в расчетах, от сходящегося v_c . Величина n характеризует эффективность алгоритма для каждой функции обратного преобразования и показывает во сколько раз затраты процессорного времени для расчетов на адаптивных сетках меньше, чем на фиксированной с $N = 500$.

Степень деформации расчетной сетки удобно характеризовать с помощью графического представления функции $\Psi(x, t)$, показывающей во сколько раз изменилась длина каждого интервала сетки в текущий момент времени по сравнению с $t = 0$, когда $\Psi(x, 0) = 1$. Характерные пространственные профили Ψ для каждой из функций обратного преобразования приведены на рис. 3. Количество и местоположение узлов отмечено маркерами. Зоне горения, для которой характерно сильное изменение решения и где происходит концентрация узлов, соответствует участок профиля с $\Psi(x, t) < 1$. В остальных областях $\Psi(x, t) > 1$.

Анализ данных таблицы 1 и кривых Ψ подтвердил, что конструкция функции Q действительно допускает большую свободу выбора при минимальных алгоритмических и программных изменениях. Использование в расчетах функций Q с произ-

Таблица 1

Вид функции Q	Общее число точек N	Число узлов в зоне горения	Скорость волны v	Относительное время счета $n = t_i/t_1$	Погрешность δv %
1. Равномерная сетка, $Q = 0$	500	75	35,3	1	0
2. Равномерная сетка, $Q = 0$	25	4	38,2	0,1	8
3. $Q = Q_3$	25	10	35,5	0,3	0,6
4. $Q = Q_4$	25	10–11	35,4	0,4	0,3
5. $Q = Q_5$	25	11	35,4	0,2	0,4
6. $Q = Q_6$	25	8	35,6	0,08	0,8

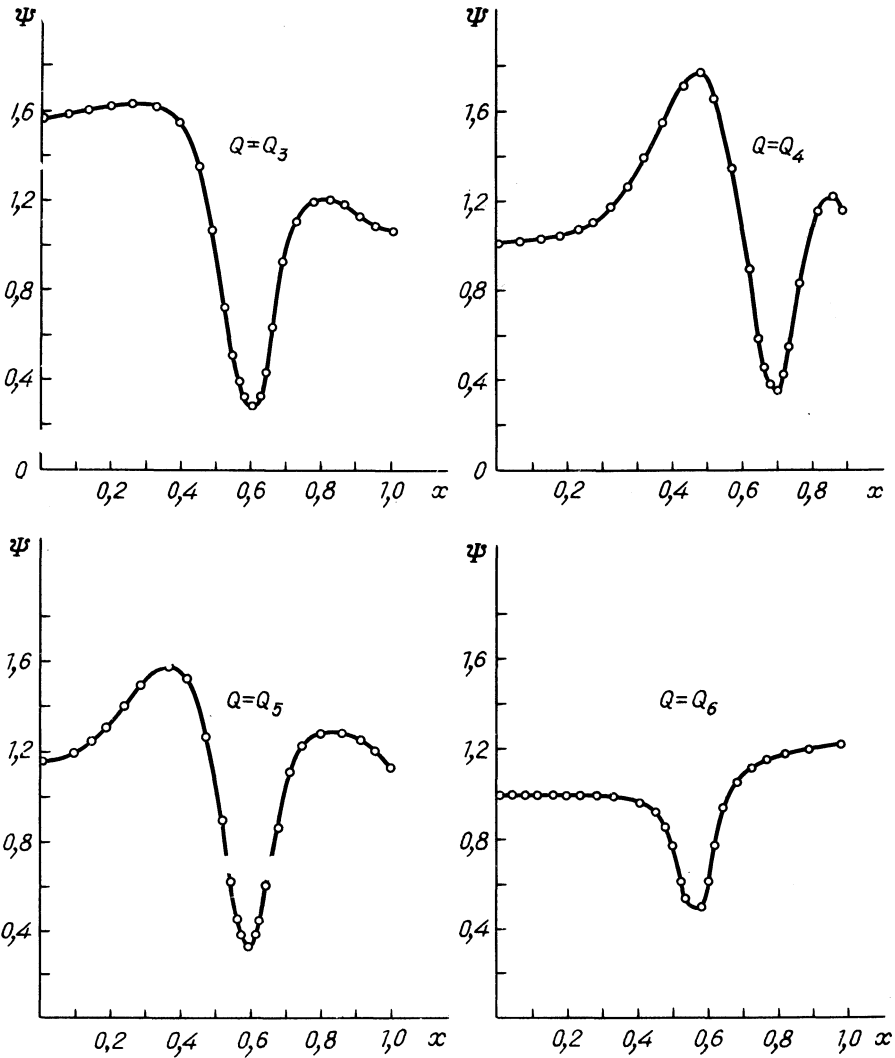


Рис. 3

водными высокого порядка повышает чувствительность механизма адаптации и приводит к более сильной деформации сетки, но одновременно заметно уменьшает шаг интегрирования Δt , что приводит к росту общих затрат процессорного времени. Наиболее эффективной для исследуемой задачи оказалась функция Q_6 , при использовании которой погрешность δv не превышает 1%, а время счета по сравнению с фиксированной сеткой уменьшается более, чем в 10 раз.

Расчеты показали, что в зоне горения концентрируется только часть узлов адаптивной сетки. В рассматриваемой задаче их 10–13 против 75 узлов фиксированной сетки. Это обстоятельство говорит не только о более высокой эффективности метода динамической адаптации, но свидетельствует также о достаточно большом неиспользуемом резерве. В самом деле, для расчетов необходимо максимум 10–15 узлов, в то время как общее их число может быть существенно большим,

но пользы они не приносят, так как находятся в области, не охваченной возмущением (см. рис. 3). Подобная ситуация характерна для большинства одномерных задач эволюционного типа. Задействовать в полезных расчетах все узлы сетки и существенно повысить эффективность алгоритма решения одномерных нестационарных задач можно посредством представления их в виде задач со свободной границей. Для демонстрации этой возможности рассмотрим одну из задач горения, допускающую при определенных предположениях аналитическое решение, которое будем использовать в качестве теста.

§ 4. Явное выделение фронта горения

Идею представления нестационарной задачи в виде задачи со свободной границей лучше всего продемонстрировать на задаче, допускающей аналитическое решение. Как уже отмечалось, при $Le \neq 0$ задача о горении в постановке (2)–(4) не имеет точного аналитического решения. Однако при $Le \equiv 0$ и некоторых других допущениях можно получить автомодельное решение типа бегущей волны [29]. В частности, при выборе коэффициента теплопроводности в виде степенной функции можно получить для уравнения теплопроводности решение, содержащее слабые разрывы. Профиль таких решений состоит из двух участков: меняющегося и постоянного, и содержит излом в точке их соединения. Производная решения в этой точке обращается в бесконечность, а тепловой поток непрерывен. Численное моделирование распространения подобных температурных волн требует при применении алгоритмов сквозного счета достаточно подробных сеток [29]. Максимальная погрешность в расчетах наблюдается в области слабого разрыва и величина ее сильно зависит от пространственного шага сетки. Точность и эффективность алгоритмов сквозного счета можно повысить, применяя в расчетах адаптирующиеся к решению сетки [14, 15], которые при меньшем общем числе узлов позволяют концентрировать в окрестности разрыва большее число точек.

Еще более существенного повышения точности и эффективности алгоритмов можно достичь выделением слабого разрыва в явном виде. С этой целью рассмотрим задачу (2–3) при следующих предположениях:

$$Le = A = 0, \quad \rho = \text{const}, \quad k = k_0(T - T_0)^\alpha, \quad k_0 = 1, \quad \alpha > 0, \quad T(x, 0) = T_0.$$

При этих предположениях уравнение теплопроводности (2) имеет автомодельное решение типа бегущей волны

$$T(x, t) = \begin{cases} T_0 + (\alpha C)^{1/\alpha} (1 - x - Ct)^{1/\alpha}, & x \geq 1 - Ct, \quad C = \text{const}, \\ T_0, & x < 1 - Ct. \end{cases}$$

Известно [30], что при $\alpha > 1$ образуется температурная волна, фронт которой движется по среде с постоянной скоростью u .

Выделение слабого разрыва осуществляется следующим образом. Пусть температурная волна распространяется справа налево и в момент времени t_* фронт находится в точке $x_* = x_*(t_*)$. Известно, что в этой точке выполняются условия $T(x, t_*) = T_0$ и $W = -k(T - T_0) \partial T / \partial x = 0$. Для представления исходной задачи в виде задачи со свободной границей поместим левую границу в точку слабого разрыва, исключив тем самым из рассмотрения область с постоянными значениями T . На разрыве сформулируем граничные условия, аналогичные условиям в известной проблеме Стефана (с учетом того, что в задаче о распространении температурной

волны теплота перехода $L_m \equiv 0$). Условие для температуры остается без изменений

$$T(x_*(t), t) = T_0.$$

Условие для определения скорости движения фронта можно получить из условия непрерывности потока $W(x_*(t), t) = 0$. В силу непрерывности W можно записать равенство потоков слева и справа от точки разрыва

$$-W^- = k(T - T_0) \frac{\partial T(x_*^-, t)}{\partial x} = -k(T - T_0) \frac{\partial T(x_*^+, t)}{\partial x} = W^+.$$

Представляя поток W в виде $W^- = v(x_*, t) \epsilon(T)$, получим условие для скорости $v(x, t)$

$$v(x_*, t) = \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{k(T - T_0)}{\epsilon(T(x_*, t))} \frac{\partial T(x_*, t)}{\partial x} = - \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{k(T - T_0)}{T - T_0} \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\epsilon(T(x, t)) = T - T_0.$$

Граничные условия на правой границе $x = x_L$ могут быть любыми. В рассматриваемых примерах в качестве $T(x_L, t)$ задавалась функция, зависящая от времени $T(x_L, t) = T(t)$.

В преобразованных координатах q, τ задача имеет вид

$$\frac{\partial(\Psi T)}{\partial \tau} = - \frac{\partial W}{\partial q} - \frac{\partial(TQ)}{\partial q}, \quad q_* < q < q_L, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = - \frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \Psi = \frac{\partial x}{\partial q}, \quad (11)$$

$$q = q_*: \quad T = T_0 = 0,2, \quad Q = -v = \lim_{q \rightarrow q_*} \frac{k(T - T_0)}{T - T_0} \frac{1}{\Psi} \frac{\partial T}{\partial q}, \quad (12)$$

$$q = q_L: \quad T = T_0 + (\alpha C)^{1/\alpha} (Ct)^{1/\alpha}, \quad Q = 0. \quad (13)$$

Для разностной аппроксимации уравнений (10), (11) использовалась неявная консервативная разностная схема. Аппроксимация граничных условий затруднений не вызывает за исключением условия (13). Его аппроксимация осуществлялась методом баланса с использованием уравнений (10), (11). Окончательное выражение для него имеет вид:

$$Q_0 = - \frac{\Delta W}{\Delta T} = - \frac{W_1 - W_0}{T_1 - T_0}.$$

Рассмотрим несколько способов адаптации, используемых при решении задачи о распространении температурной волны с явным выделением фронта.

При $k = (T - T_0)^\alpha$, $T_0 = 0,2$, $\alpha = 2$, $N = 11$ в качестве функции преобразования зададим функцию Q_1 , обеспечивающую при подвижной границе равномерную на каждый момент времени сетку. Численное решение, отмеченное штриховыми линиями (рис. 4), сравнивалось с аналитическим — сплошные линии. Число узлов и их положение отмечено маркерами. На рис. 5 изображены траектории движения узлов сетки. Длина начального участка может быть сколь угодно малой, в расчетах задавалась равной 0,1. До тех пор, пока волна возмущения не доходит до левой границы, узлы сетки неподвижны и расчеты ведутся по схеме алгоритма сквозного счета. После захвата волной левой границы, она начинает двигаться со скоростью v , увеличивая

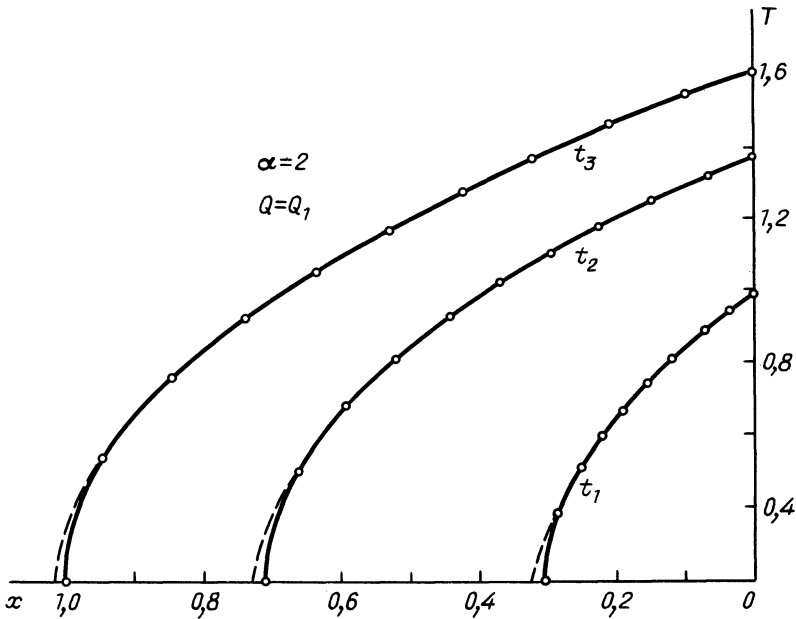


Рис. 4

область решения и пространственный шаг h . С течением времени за счет увеличения области погрешность несколько увеличивается, но остается гораздо меньше, чем при любом другом алгоритме с тем же общим числом узлов. Погрешность можно уменьшить, либо предусматривая процедуру генерации новых узлов, либо используя функцию преобразования $Q_2 - Q_6$, т.е. зависящую от одной из производных решения.

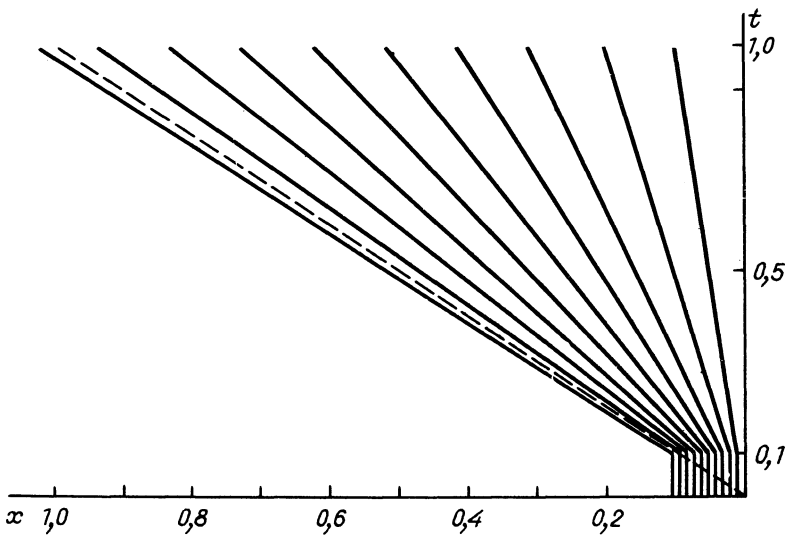


Рис. 5

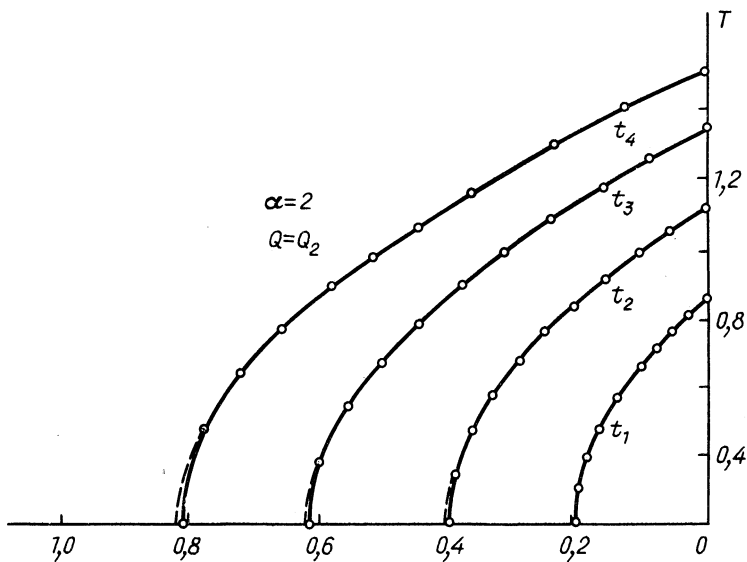


Рис. 6

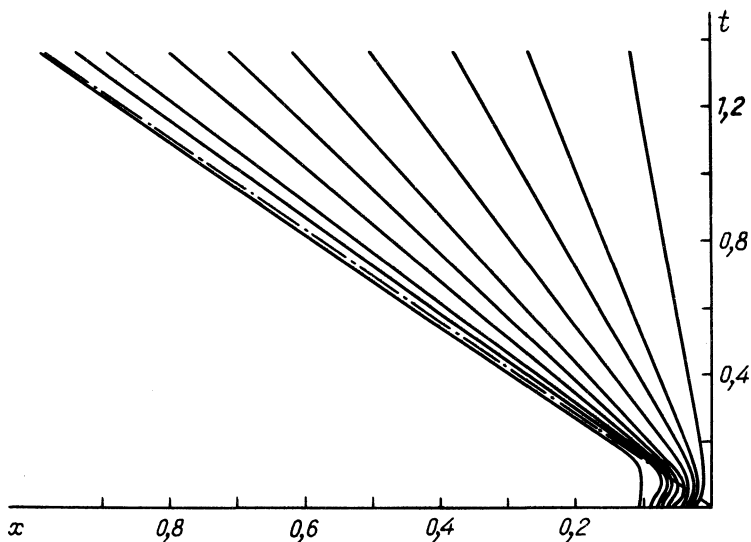


Рис. 7

На рис. 6, 7 представлены результаты моделирования на сетке с тем же числом узлов и функцией $Q = Q_2$. В этом случае до захвата левой границы все узлы сетки, кроме граничного, под влиянием градиента решения устремляются вправо, уменьшая погрешность расчетов. После того, как левая граница становится подвижной, узлы сетки перегруппировываются, концентрируясь в окрестности фронта волны.

Предлагаемый способ решения допускает обобщения на более широкий класс нестационарных задач, в частности он может быть применим для решения задач теплопроводности, в которых фронт волны не образуется. Примером такого решения мо-

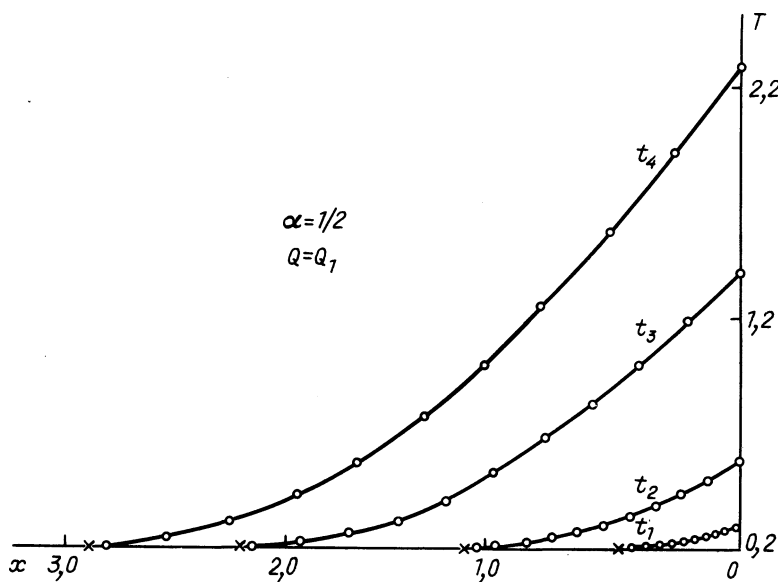


Рис. 8

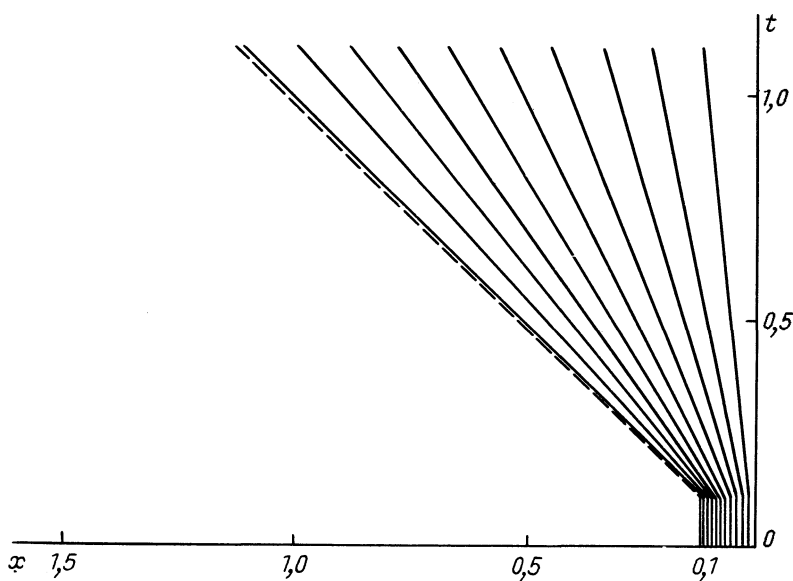


Рис. 9

жет быть задача (10), (11) с коэффициентом теплопроводности $k = k_0(T - T_0)^\alpha$, $\alpha = 1/2$. Результаты расчётов представлены на рис. 8, 9. Положение крайней точки аналитического решения на кривых $T(x)$ на рис. 8 отмечено звездочкой. Шаг интегрирования Δt в указанных способах адаптации минимален в начале расчетов, и величина его определяется начальным размером области решения. С ростом времени увеличивается область, охваченная возмущением, что приводит к увеличению шагов h и

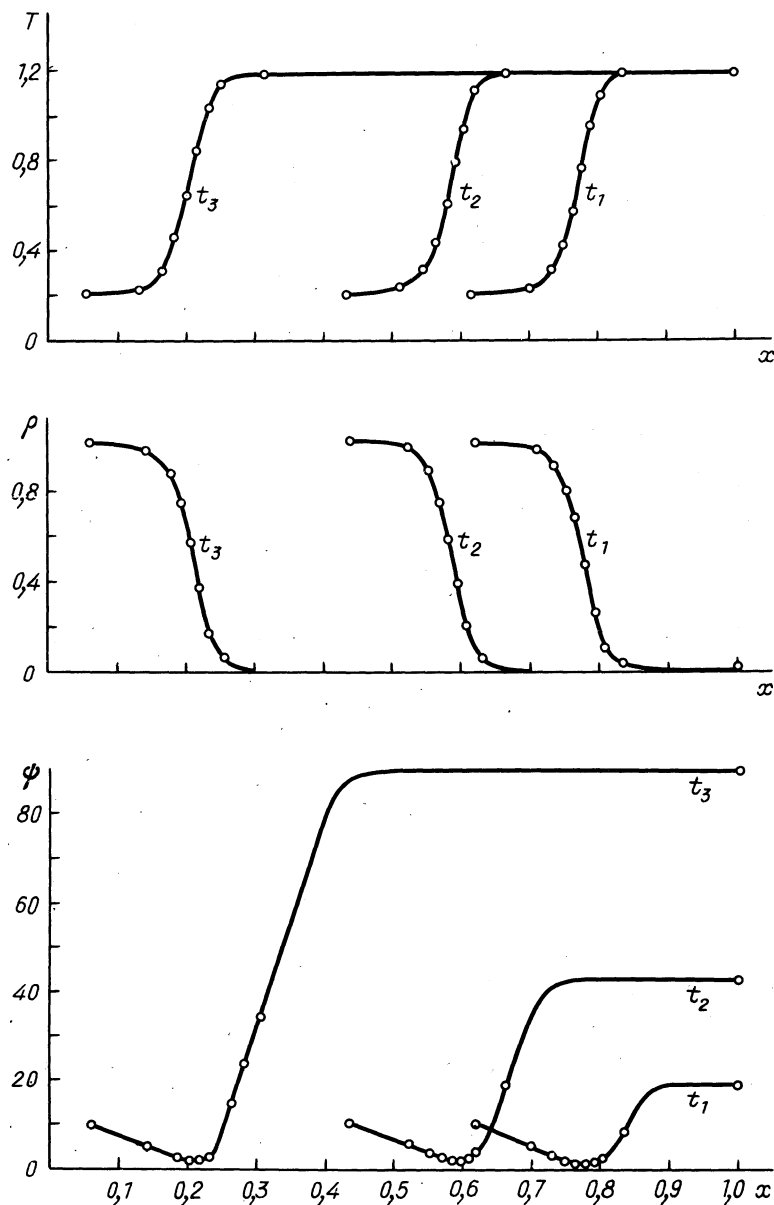


Рис. 10

Δt . Максимальное значение Δt ограничивается из соображений необходимой точности.

Применим рассмотренную методику к задаче о горении (2), (3) в стационарном режиме с $Le = 1$. На рис. 10 приведены кривые $T(x)$, $\rho(x)$, $\Psi(x)$, полученные в различные моменты времени на сетке с $N = 11$. В качестве функций преобразования использовались функции Q_2 и Q_6 . На рис. 11 показана временная зависимость ско-

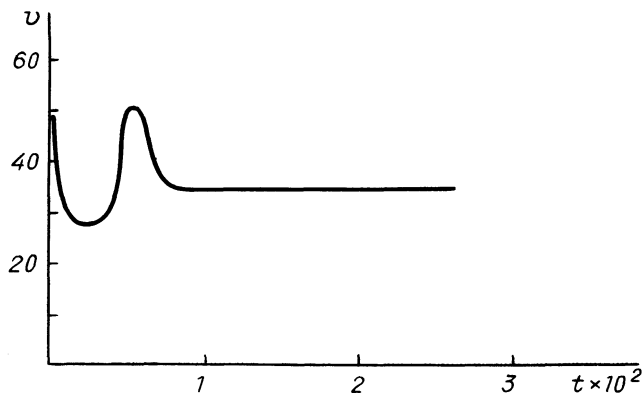


Рис. 11

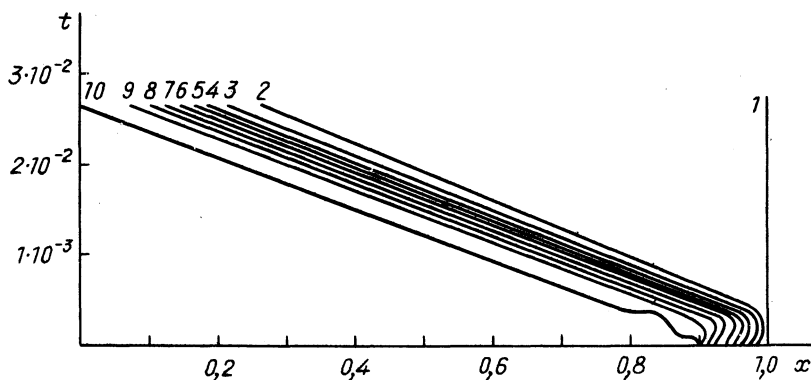


Рис. 12

рости фронта пламени v . Установившееся значение ее равнялось 35,0, немонотонность на начальном отрезке времени определялась переменным источником на правой границе. На рис. 12 приведена диаграмма движения узлов. Как и в предыдущих расчетах начальный отрезок задавался равным 0,1. Характерной особенностью адаптации в рассматриваемой задаче является то, что все узлы сетки, за исключением узла на правой границе, концентрируются в зоне горения и движутся вместе с ней.

Заключение

Сформулированы основные принципы построения динамически адаптирующихся к решению расчетных сеток для одномерных задач эволюционного типа.

Управляемое распределение узлов в рассматриваемом методе осуществляется как под влиянием перемещения границ, так и поведением решения внутри области. Закон перемещения границ при этом может быть задан заранее или определяться из решения задачи.

Решение ряда нестационарных задач показало, что предлагаемый метод позволяет значительно повысить точность разностных схем при одновременном увеличении эффективности алгоритма решения в целом за счет существенного уменьшения числа используемых узлов.

Дальнейшего повышения точности, эффективности и разрешающей способности расчетных сеток в областях больших градиентов в нестационарных задачах можно достичь посредством представления исследуемых проблем в виде задач со свободной границей, что позволяет задействовать в расчетах 100% узлов сетки. Так в существенно нелинейных задачах о распространении ламинарного пламени при неизменной точности удастся сократить число узлов на 1–2 порядка и тем самым затраты процессорного времени.

Как показали первые попытки [31–33] предлагаемый метод без особых затруднений может быть распространен на многомерные постановки нестационарных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tompson J.F., Tames F.C., Maston C.W.* Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. // *J. Comp. Phys.* – 1974. – P. 299–319.
2. *Шанеев В.П., Шитов Ю.А.* Об одном методе построения криволинейных сеток // *Числ. методы механ. сплошной среды*. Т. 7. № 2. – Новосибирск: Вычисл. центр СО АН СССР, 1976. – С. 140–144.
3. *Сидоров А.Ф., Шабашова Т.И.* Об одном методе расчета оптимальных разностных сеток // *Числ. методы механ. сплошной среды*. Т. 12. № 5. – Новосибирск: Вычисл. центр СО АН СССР, 1981. – С. 106–123.
4. *Яненко Н.Н., Данаев Н.Т., Лисейкин В.Д.* О вариационном методе построения сеток // *Числ. методы механ. сплошной среды*. Т. 8. № 4. – Новосибирск: Вычисл. центр СО АН СССР, 1977. – С. 157–163.
5. *Ковеня В.М., Яненко Н.Н.* Разностная схема на подвижных сетках для решения уравнений вязкого газа. // *ЖВМ и МФ.* – 1979. – Т. 19, № 1. – С. 174–188.
6. *Brackbill J.U., Saltzman J.S.* Adaptive zoning for singular problems in two dimensions // *J. Comp. Physics.* – 1982. – V. 46, № 3. – P. 342–368.
7. *Дегтярев Л.М., Дроздов В.В.* Адаптирующиеся к решению сетки в эллиптических задачах на плоскости // *Дифф. уравнения.* – 1984. – Т. 20, № 7. – С. 1194–1203.
8. *Накахаси К., Дейуэрт Д.С.* Новый метод построения трехмерных адаптирующихся сеток // *Аэрокосмическая техника.* – 1987. – № 7. – С. 90–98.
9. *Накахаси К., Дейуэрт Д.С.* Автоматический метод построения адаптирующихся сеток и его применение в задачах обтекания профиля // *Аэрокосмическая техника.* – 1987. – № 12. – С. 10–18.
10. *Anderson D.* Equidistribution schemes, Poisson generators and adaptive grids // *Appl. mathem. comput.* – 1987. – V. 24. – P. 211–227.
11. *Matsuno K., Dwyer H.* Adaptive methods for elliptic grid generation // *J. Comp. Physics.* – 1988. – V. 77. – P. 40–52.
12. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И.* Методы построения адаптивных сеток для одномерных краевых задач. Препринт № 33. – М.: ИПМатем. АН СССР, 1987. – 28 с.
13. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И.* Математическое моделирование задачи Стефана на адаптивной сетке // *Диф. уравнения.* – 1987. – Т. 23, № 7. – С. 1154–1159.
14. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И.* Об одном подходе к построению адаптивных сеток для нестационарных задач // *ЖВМ и МФ.* – 1988. – Т. 23, № 3.
15. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И.* Об одном подходе к построению адаптивных разностных сеток // *Докл. АН СССР.* – 1988. – Т. 298, № 1. – С. 64–68.
16. *Бреславский П.В., Мажукин В.И.* Математическое моделирование процессов импульсного плавления и испарения металла с явным выделением фазовых границ // *Инж. физ. журнал.* – 1989. – № 6.
17. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И., Самарский А.А.* Конечно-разностный метод решений уравнений газовой динамики с использованием адаптивных сеток: Препринт № 115. – М.: ИПМатем. АН СССР, 1987. – 37 с.
18. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И., Самарский А.А.* Конечно-разностный метод решений уравнений газовой динамики с использованием адаптивных сеток, динамически связанных с решением // *ЖВМ и МФ.* – 1988. – Т. 23, № 8. – С. 1210–1225.

19. Василевский В.Ф., Мажукин В.И. Численное решение нестационарной задачи теплопроводности на адаптивной сетке с явным выделением области слабого разрыва: Препринт № 14. – М.: ИПМатем АН СССР, 1989. – 12 с.
20. Dwyer H.A., Hee P.J., Sanders B.R. Adaptive grid method for problems in fluid mechanics and heat transfer // AIAA J. – 1980. – V. 18, № 10. – P. 1205–1212.
21. Rai M.M., Anderson D. Application of adaptive grid to fluid–flow problems with asymptotic solution // AIAA J. – 1982. – V. 20, № 4. – P. 469–502.
22. Дегтярев Л.М., Дроздов В.В., Иванова Т.С. Метод адаптивных к решению сеток в одномерных краевых задачах с пограничным слоем: Препринт № 164. – М.: ИПМатем АН СССР, 1986. – 26 с.
23. Льюис Б., Эльбе Г. Горение, плямя и взрывы в газах. – М.: ИП, 1948. – 447 с.
24. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. – М.: Наука, 1980. – 478 с.
25. Гришин М.А., Зеленский Е.Е. О релаксационных колебаниях при горении реагирующих веществ // Числ. методы механ. сплошной среды. Т. 5. № 4. – Новосибирск: Вычисл. центр СО АН СССР, 1974. – С. 14–25.
26. Агранат В.М., Берцун В.Н., Гришин А.М. Анализ диффузионно-тепловой неустойчивости ламинарных пламен // Числ. методы механ. сплошной среды. Т. 8. № 4. – Новосибирск: Вычисл. центр СО АН СССР, 1977. – С. 5–19.
27. Otey G.R., Dwyer H.A. Numerical study of the interaction of fast chemistry and diffusion. // AIAA J. – 1979. – V. 17, № 6. – P. 606–613.
28. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
29. Самарский А.А., Соболев И.М. Примеры численного расчета температурных волн // ЖВМ и МФ. – 1963. – Т. 3. № 4. – С. 702–719.
30. Баренблатт Г.И., Вишик И.М. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // Прикл. матем. и мех. – 1956. – Т. 20, № 3. – С. 411–417.

Поступила в редакцию
19.10.89