



Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Академии наук СССР

В.Ф. Василевский, В.И. Мажукин

РАСЧЁТ УДАРНЫХ ВОЛН
НА СЕТКАХ С ДИНАМИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИЕЙ

Препринт № 37 за 1990 г.

Москва

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М. В. КЕЛДЫША
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Василевский В. Ф. , Мажукин В. И.

РАСЧЕТ УДАРНЫХ ВОЛН
НА СЕТКАХ С ДИНАМИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИЕЙ

УДК 517: 519: 533.7

А Н Н О Т А Ц И Я

Предметом исследования являются задачи, имеющие решения типа распространяющихся волн при условии конечной скорости распространения возмущения. В подвижной системе координат формулируются граничные условия, при которых распространяющееся возмущение оказывается заключенным в ограниченном интервале. Динамическая адаптация под градиенты решения внутри интервала позволяет получать высокую точность на грубых сетках. Приводится пример численного решения одномерной модельной задачи об ускоряющемся поршне .

1. Настоящая работа является продолжением цикла работ [1-5], связанных с разработкой конечно-разностных методов решения задач математической физики, использующих динамически адаптирующиеся к решению расчетные сетки.

Идея метода основывается на процедуре перехода к произвольной нестационарной системе координат, в которой можно строить более эффективные алгоритмы для решения задач эволюционного типа. Процедура перехода заключается в автоматическом преобразовании координат, осуществляемом посредством численного решения дополнительного дифференциального уравнения, конструируемого специальным образом.

Интересно сравнить этот подход с методом, основанным на равномерном распределении весовой функции по сетке, краткое изложение которого можно найти в [6].

Согласно [6] на сетке вводится некоторая неотрицательная весовая функция θ . Предполагается, что в каждый момент времени узлы сетки должны распределяться таким образом, чтобы всюду на сетке было выполнено условие

$$(1) \quad \theta \cdot \frac{\partial x}{\partial q} = \text{const.}$$

Это эквивалентно выполнению дифференциального уравнения [7]

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial q} \cdot \left[\theta \cdot \frac{\partial x}{\partial q} \right] = 0,$$

которое в данном методе используется как уравнение обратного преобразования.

В этих терминах подход, использованный в [1-5], можно назвать методом динамического перераспределения весовой функции по сетке, поскольку вместо (2) здесь используется уравнение

$$(3) \quad \theta_0 \cdot \frac{\partial}{\partial q} \cdot \left[\theta \cdot \frac{\partial x}{\partial q} \right] = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \theta_0 = \text{const}, \quad 0 < \theta_0 < \infty.$$

То есть, весовая функция перераспределяет сетку с конечной скоростью, которую можно регулировать, управляя значением параметра θ_0 . В частности, при $\theta_0 = \infty$ уравнение (3) вырождается в (2). Таким образом, подход, использованный в [1-5], содержит [6] как предельный частный случай. Другой предельный случай: $\theta_0 = 0$ - это обычный Эйлеров подход.

Уравнение (3) предоставляет большую свободу в управлении

сеткой. Некоторая априорная информация о поведении решения и простые физические соображения позволяют конструировать весовую функцию таким образом, что сетка автоматически подстраивается под изменяющиеся особенности решения.

В простейшем случае весовая функция может быть выбрана в виде [3]

$$(4) \quad \theta \equiv 1,$$

что соответствует равномерному разравниванию сетки.

В приводимых ниже примерах сетка адаптируется к изменениям градиента скорости с помощью весовой функции [3]

$$(5) \quad \theta = - \frac{\partial u}{\partial q}.$$

Знак минус выбран в связи с тем, что в рассмотренных примерах функция u убывает, а функция θ должна быть неотрицательна. На участках, где производная u меняет знак представляется целесообразным использовать модуль u .

Линейная комбинация функций (4) и (5) дает еще один вариант весовой функции [3]

$$(6) \quad \theta = \theta_1 - \frac{\partial u}{\partial q}, \quad \theta_1 = \text{const}, \quad 0 < \theta_1 < \infty.$$

Этот вариант необходим в том случае, если на некоторых участках производная u может обращаться в ноль или стремиться к бесконечности.

Очевидно, возможны и другие варианты построения весовой функции [5], а также адаптация под градиенты других функций.

Переход к нестационарной системе координат с последующим введением механизма динамической адаптации позволяет значительно повысить точность расчетов при одновременном уменьшении числа используемых узлов сетки. Дополнительный резерв эффективности в рассматриваемых методах связан со способом задания граничных условий. Целесообразно, как показал опыт решения задач о распространении температурных волн [4] и горении вещества [5], исходную физическую задачу представлять в виде задачи со свободной границей, то есть при математической формулировке задачи в нестационарной системе координат предпочтительнее задавать граничные условия нестационарного вида. Это позволяет исключать из рассмотрения пространственную область, не

охваченную возмущением, и при сравнительно малом числе узлов проводить расчеты с высокой точностью. В этом случае можно предположить, что данный алгоритм позволит в задачах газовой динамики проводить расчеты формирования и распространения ударных волн без процедуры их явного выделения при одновременном сохранении достаточно высокой точности.

2. Систему уравнений газовой динамики для политропного газа в эйлеровых переменных можно записать в виде:

$$(7) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ,$$

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = 0 ,$$

$$(9) \quad \frac{\partial P}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \gamma P \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

С помощью замены переменных общего вида

$$(10) \quad q = q(x, t) ,$$

$$(11) \quad \tau = \tau(x, t) = t$$

перепишем исходные уравнения в произвольной подвижной системе координат:

$$(12) \quad \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \left[u - \frac{\partial x}{\partial \tau} \right] \cdot \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial q}} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial q} + \rho \cdot \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial q}} \cdot \frac{\partial u}{\partial q} = 0 ,$$

$$(13) \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} + \left[u - \frac{\partial x}{\partial \tau} \right] \cdot \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial q}} \cdot \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial q}} \cdot \frac{\partial P}{\partial q} = 0 ,$$

$$(14) \quad \frac{\partial P}{\partial \tau} + \left[u - \frac{\partial x}{\partial \tau} \right] \cdot \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial q}} \cdot \frac{\partial P}{\partial q} + \gamma P \cdot \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial q}} \cdot \frac{\partial u}{\partial q} = 0 ,$$

$$(15) \quad \frac{\partial x}{\partial \tau} = Q .$$

Последнее уравнение в этой системе является уравнением обратного преобразования и используется в дальнейшем для построения расчетной сетки с динамической адаптацией. В качестве функции Q в данной работе используется левая часть уравнения (3) с весовой функцией (5).

Рассмотрим область $q_L < q < q_R$, $\tau > \tau_0$. Начальные условия зададим в виде:

$$(16) \quad u(q, \tau_0) = u_0, \quad \rho(q, \tau_0) = \rho_0, \quad P(q, \tau_0) = P_0, \quad q_L < q < q_R, \\ u_0 = \text{const}, \quad \rho_0 = \text{const}, \quad P_0 = \text{const}.$$

Пусть известно, что возмущение распространяется слева направо. Граничные условия для (12-14) сформулируем в виде:

$$(17) \quad u(q_L; \tau) = U(\tau), \quad \tau > \tau_0,$$

$$(18) \quad \rho(q_R; \tau) = \rho_0, \quad .$$

$$(19) \quad P(q_R, \tau) = P_0.$$

Пусть, кроме того, левая граница области движется вместе с потоком:

$$(20) \quad \left[u - \frac{\partial x}{\partial \tau} \right] \Big|_{q=q_L} = 0, \quad \tau > \tau_0.$$

Для нахождения скорости правой границы сетки можно воспользоваться любым из уравнений (12-14). Однако, наилучшие результаты в данном случае дает уравнение (13):

$$(21) \quad \left[u - \frac{\partial x}{\partial \tau} \right] \Big|_{q=q_R} = \frac{\frac{\partial P}{\partial q}}{\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial q}} \Big|_{q=q_R}, \quad \tau > \tau_0, \quad \frac{\partial u}{\partial q} \Big|_{q=q_R} \neq 0.$$

На начальном этапе, когда возмущение еще не достигло правой границы, положим

$$(22) \quad \left[u - \frac{\partial x}{\partial \tau} \right] \Big|_{q=q_R} = 0, \quad \tau > \tau_0, \quad \frac{\partial u}{\partial q} \Big|_{q=q_R} = 0,$$

то есть граница движется вместе с потоком.

В расчетном пространстве $\Omega_{q,\tau}$ введем сетку ω с постоянным шагом Δq по переменной q и шагом $\Delta \tau$ по переменной τ :

$$(23) \quad \omega = \left\{ (q_i, \tau^j), (q_{i+.5}, \tau^j), q_{i+1} = q_i + \Delta q, \right. \\ \left. q_{i+.5} = q_i + .5 \cdot \Delta q, \tau^{j+1} = \tau^j + \Delta \tau, i = 0, \dots, N \right\}.$$

Заметим, что без ограничения общности можно положить

$$(24) \quad \Delta q = 1.$$

Выпишем следующую чисто неявную схему:

$$(25) \quad \frac{\rho_{i+1}^{j+1} - \rho_i^j}{\Delta \tau} + \left[u_{i+.5}^{j+1} - \frac{x_{i+.5}^{j+1} - x_{i+.5}^j}{\Delta \tau} \right] \cdot \frac{\rho_{i+1}^{j+1} - \rho_i^{j+1}}{x_{i+1}^{j+1} - x_i^{j+1}} +$$

$$+ \rho_{i+.5}^{j+1} \cdot \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{x_{i+1}^{j+1} - x_i^{j+1}} = 0 ,$$

$$(26) \quad \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta \tau} + \left[u_{i-.5}^{j+1} - \frac{x_{i-.5}^{j+1} - x_{i-.5}^j}{\Delta \tau} \right] \cdot \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{x_i^{j+1} - x_{i-1}^{j+1}} + \\ + \frac{1}{\rho_{i-.5}^{j+1}} \cdot \frac{p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}}{x_i^{j+1} - x_{i-1}^{j+1}} = 0 ,$$

$$(27) \quad \frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\Delta \tau} + \left[u_{i+.5}^{j+1} - \frac{x_{i+.5}^{j+1} - x_{i+.5}^j}{\Delta \tau} \right] \cdot \frac{p_{i+1}^{j+1} - p_i^{j+1}}{x_{i+1}^{j+1} - x_i^{j+1}} + \\ + \gamma \cdot \rho_{i+.5}^{j+1} \cdot \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{x_{i+1}^{j+1} - x_i^{j+1}} = 0 ,$$

$$(28) \quad \frac{x_i^{j+1} - x_i^j}{\Delta \tau} = - \theta_0 \cdot \left[\left(u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1} \right) \cdot \left(x_{i+1}^{j+1} - x_i^{j+1} \right) - \right. \\ \left. - \left(u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1} \right) \cdot \left(x_i^{j+1} - x_{i-1}^{j+1} \right) \right] , \quad i, = 1, \dots, N-1 .$$

Функции x , ρ , u , P вычисляются в целых точках. Значения в полужелтых точках получаются линейной интерполяцией:

$$(29) \quad f_{i+.5} = \frac{f_{i+1} + f_i}{2} .$$

Система (25-28) решалась матричной прогонкой с итерациями по нелинейности.

3. В качестве примеров выбраны две модификации модельной задачи о движении ускоряющегося поршня по покоящемуся газу, использованной в работах [2,3] в качестве тестовой.

ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ПО ФОНУ С НЕНУЛЕВЫМ ДАВЛЕНИЕМ. Решение этой задачи на начальном этапе представляет собой простую волну, содержащую на фронте слабый разрыв производной. На этом этапе известно точное решение задачи [8]. По мере ускорения поршня величина разрыва растет до наступления градиентной катастрофы, в результате которой слабый разрыв переходит в сильный, то есть образуется ударная волна.

При численном моделировании в начальный момент задавалась

равномерная сетка $N = 10$ на интервале $[0, 1]$ пространства φ . В процессе решения развивающееся возмущение начало двигать правую границу сетки. Спустя короткий промежуток времени траектория движения фронта волны практически сливалась с траекторией движения граничного узла сетки. Наступление градиентной катастрофы не ощущалось в процессе вычислений. На рис. 1 приведен график движения узлов сетки. Пунктиром отмечена траектория движения фронта точного решения. На рис. 2 приведены профили скорости u на последовательные моменты времени. Точное решение показано сплошными линиями, численное - пунктиром. Маркерами отмечены значения v в узлах сетки. Из графиков отчетливо видно как начинает сжиматься ближайшая к фронту ячейка сетки под влиянием растущих градиентов после образования ударной волны. Это позволяет хорошо передавать поведение решения и после образования сильного разрыва без явного учета условий Гюнио. При этом разрывное решение аппроксимируется непрерывным на предельно малом шаге сетки.

ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ПО "ХОЛОДНОМУ" ФОНУ. Если фон имеет нулевое давление, то ударная волна образуется с самого начала расчета. Эта задача имеет автомодельное решение [9].

При численном моделировании фон давления задавался близким к нулю. Исходная сетка задавалась на малом интервале, так что процесс формирования ударной волны, идентичный по сути описанному выше, занимал пренебрежимо малый по отношению ко всему расчету промежуток времени. Картина движения узлов сетки показана на рис. 3. На рис. 4 пунктиром показаны численные профили скорости u . Маркерами отмечены значения v в узлах сетки.

На рис. 3 траектории граничного и приграничного узлов практически сливаются и зрительно неразличимы. Размазывание фронта является минимальным. Сравнение численного решения с автомодельным показало отличие в третьем знаке.

4. Таким образом, выполненные расчеты формирования и распространения ударных волн свидетельствуют о высокой эффективности алгоритма динамически адаптирующихся сеток с использованием граничных условий нестационарного вида.

РИС. 2

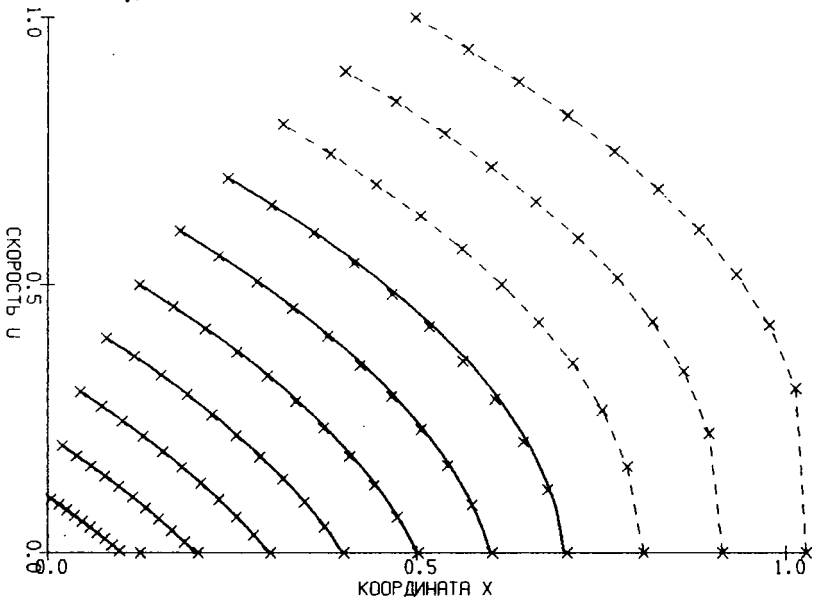
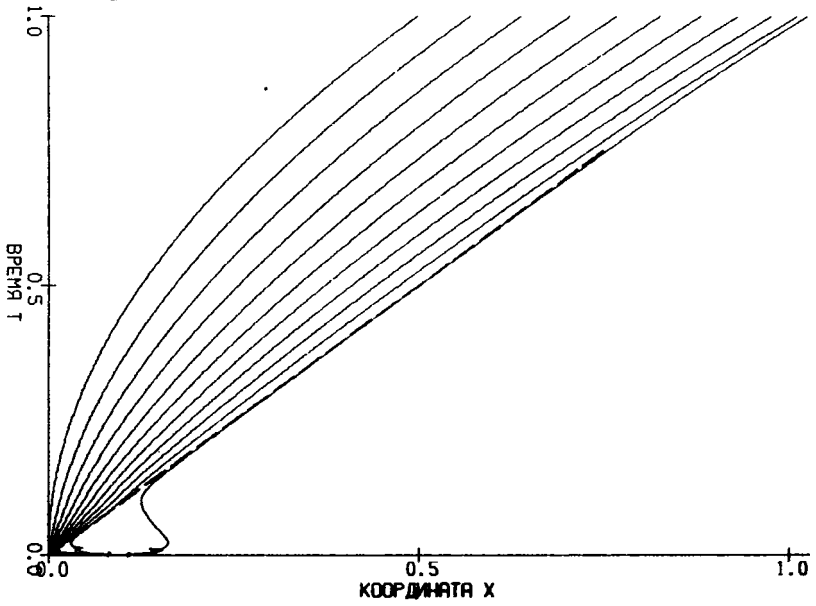


РИС. 1.



1С

РИС. 4

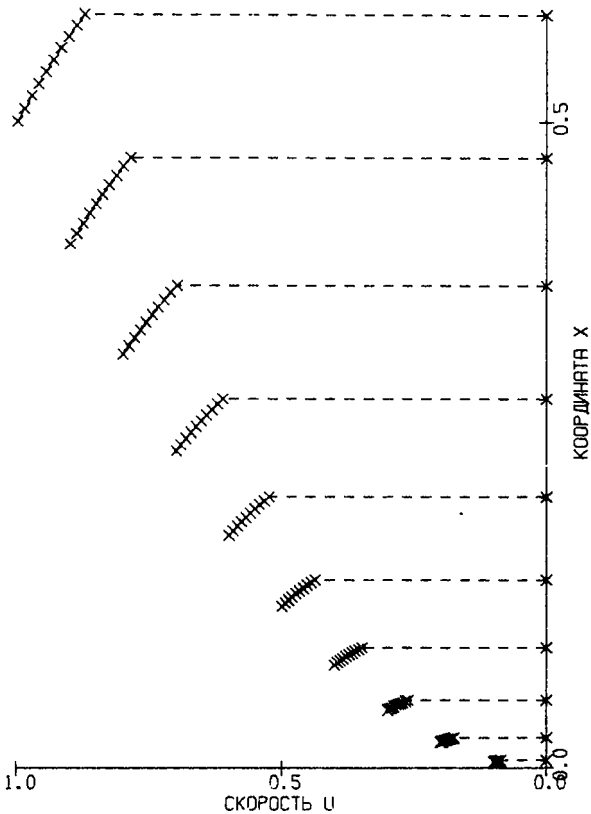
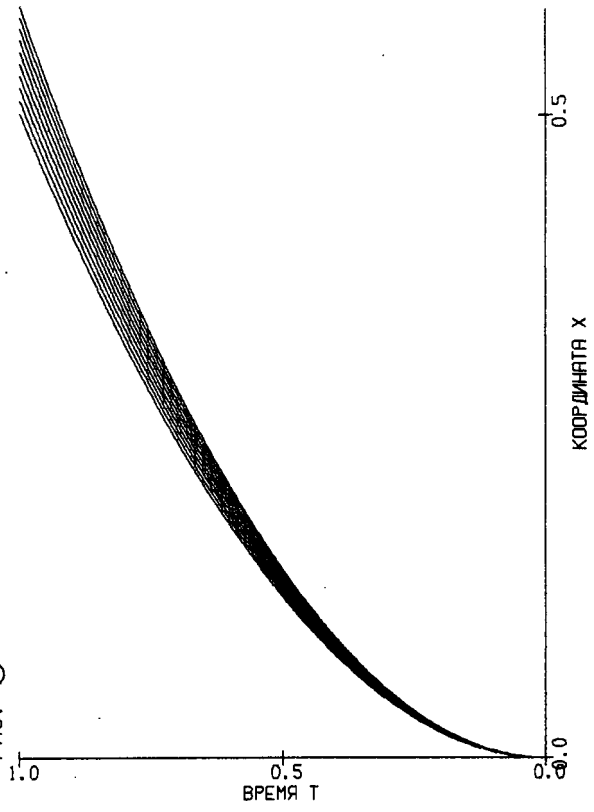


РИС. 3



Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Дарьин Н. А. , Мажукин В.И. Об одном подходе к построению адаптивных разностных сеток. ДАН СССР, 1988, т.298, N1, с.64-68.
2. Дарьин Н. А. , Мажукин В.И. , Самарский А. А. Конечно-разностный метод решения одномерных уравнений газовой динамики на адаптивных сетках. ДАН СССР, 1988, т.302, N5, с.1078-1081.
3. Дарьин Н. А. . Мажукин В.И. , Самарский А. А. Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с использованием адаптивных сеток, динамически связанных с решением. ЖВМ и МФ, 1988, т.28, N8. с.1210-1225.
4. Васильевский В.Ф. , Мажукин В.И. Численное решение нестационарной задачи теплопроводности на адаптивной сетке с явным выделением области слабого разрыва. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1989, N14.
5. Мажукин В.И. . Такоева Л.Ю. Численное решение задачи горения на сетках, динамически адаптирующихся к решению. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1989, N74.
6. Anderson D. A. Equidistribution schemes, Poisson generators, and adaptive grids. Appl. math. and comp. 1987, v.24, pp.211-227.
7. Дегтярев Л. М. , Дроздов В. В. , Иванова Т. С. Метод адаптивных к решению сеток в одномерных краевых задачах с пограничным слоем. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1986, N164.
8. Ландау Л. Л. , Лифшиц Е. М. Гидродинамика. - М: Наука, 1986.
9. Самарский А. А. , Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. - М: Наука, 1980.