

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том 5 номер 4 год 1993

*ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ*

## МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ С БОЛЬШИМИ ГРАДИЕНТАМИ

© *В.И.Мажукин, А.А.Самарский, Орландо Кастельянос, А.В.Шапранов*

Институт математического моделирования РАН

Рассматривается метод динамической адаптации расчетных сеток, предназначенный для нестационарных задач математической физики, численное решение которых традиционными методами может быть затруднено по ряду причин. В основу метода положена идея перехода к произвольной нестационарной системе координат. Показано, что оптимальную функцию преобразования, не содержащую свободных параметров, можно определить из условия квазистационарности процессов в новой системе координат. Возможности метода демонстрируются на примере численного решения нелинейного уравнения Бюргерса. При малой физической вязкости  $\mu = 10^{-4}$  в решении возникают большие градиенты, приводящие к неустрашимым осцилляциям. Математическое моделирование показало, что в рассматриваемых примерах численное решение, полученное на сетках с фиксированными узлами, содержит осцилляции при числе узлов  $N = 1000 \div 1500$ . Применение адаптирующихся сеток позволяет получать решения, свободные от осцилляций при общем числе узлов  $N = 15 \div 20$ .

## METHOD OF DYNAMICAL ADAPTATION FOR EVOLUTION - TYPE PROBLEMS WITH HIGH GRADIENTS

*V.I.Mazhukin, A.A.Samarskii, Orlando Kastelianos, A.V.Shapranov*

The method of the dynamic adaption of computational grids intended for evolution type problems of the mathematical physics, which are difficultly solved by means of traditional methods, is considered. The basic of the method is the idea of transition to arbitrary moving coordinate system. It is shown, that the free parameters of the transformation function can be determined from the condition of processes being quasistationary in the new coordinate system. The application of the method to the solution of the nonlinear

Burgers equation is considered. The large gradients of the solution appear when small value of physical viscosity  $\mu = 10^{-4}$  is used, leading to the unremovable oscillations. As it is shown by means of mathematical modelling, for this problem the fix grid solution has oscillations even when the grid nodes number is  $N = 1000 \div 1500$ . The application of the dynamically adapting grids make possible to get the solution without oscillation using grid with overall nodes number  $N = 15 \div 20$ .

### Введение

Проблеме построения расчетных сеток при решении задач математической физики в последние годы уделяется большое внимание [1-6]. Точность решения уравнений в частных производных зависит от того, насколько хорошо согласуется распределение узлов сетки с особенностями искомого решения. Из двух решений одной задачи, полученных на двух различных сетках с одинаковым числом фиксированных узлов, меньшая погрешность будет достигаться на сетке с более оптимальным распределением их по отношению к искомому решению. Принцип оптимального распределения узлов положен в основу методов построения адаптирующихся к решению сеток. К настоящему времени сформировалось несколько направлений построения адаптирующихся сеток [7-20]. Наибольшие различия в подходах к построению адаптирующихся сеток наблюдаются в методах для стационарных и нестационарных задач.

Для стационарных задач такие особенности решения как большие градиенты, поверхности разрывов и т.д., локализованы в пространстве. Проблема построения адаптирующихся сеток в этих случаях значительно облегчается. Для повышения точности расчетов достаточно сгустить сетки в областях локализации особенностей решения. Это направление адаптации в настоящее время является наиболее развитым [7-14].

Для нестационарных задач, описываемых уравнениями эволюционного типа, построение адаптирующихся сеток связано с рядом дополнительных трудностей. Вызваны они тем, что особенности решения эволюционных уравнений, такие, как большие градиенты, сильные и слабые разрывы, контактные и фазовые границы могут возникать, перемещаться и исчезать во всей области определения решения. В подобных ситуациях с оптимальным распределением узлов связана не только проблема повышения точности, но в ряде случаев и сама возможность качественного воспроизведения решения. Одним из наиболее важных требований, предъявляемых к методам адаптации в нестационарных уравнениях является требование оптимальной скорости движения узлов. При недостаточно быстром движении их сгущение может не успевать за перемещением особенностей решения, что приведет к увеличению погрешности аппроксимации и снижению эффективности адаптации.

Слишком высокая скорость движения узлов может приводить к осцилляциям решения, либо вызывать связанные колебания сетки и решения или вообще приводить к глобальной неустойчивости счета.

Еще одним принципиальным моментом в нестационарных адаптирующихся алгоритмах является степень согласованности процедуры определения численного решения с механизмом перестройки сетки. При их полном разделении пересчет сетки производится через определенное число временных шагов интегрирования [15,20]. Наиболее эффективны эти методы при выходе численного решения на асимптотику, когда переопределение сетки на каждом временном шаге становится неэкономичным. При тесной взаимосвязи узлы сетки переопределяются на каждом шаге интегрирования. Подобная согласованность типична для адаптивных сеток, динамически связанных с искомым решением [21-24]. При этом неизвестные значения сеточных функций и координаты узлов должны определяться из решения единой системы дифференциальных уравнений.

Данная работа посвящена дальнейшему развитию метода динамической адаптации [21-24], предназначенного для решения, в основном, нестационарных краевых задач математической физики. Несмотря на целый ряд успешных применений метода динамической адаптации вопрос о выборе оптимальной функции управления движением узлов до сих пор оставался открытым. В этой работе на примере решения нелинейного уравнения Бюргерса, описывающего конвективно-диффузионные процессы, рассматривается способ определения оптимальной функции преобразования координат. Оптимальность функции преобразования подтверждается анализом дифференциальных приближений и численными примерами.

Сложности решения модельных задач типа Бюргерса хорошо известны [25-28] и связаны в основном с низкой точностью расчетов при использовании традиционных методов решения. Использование разностных схем с первым порядком точности при недостаточно мелких сетках приводит к росту схемной вязкости в областях больших градиентов и, как следствие, к сильному разглаживанию решения. Применение разностных схем со вторым порядком вызывает сильные колебания решения. Преодоление этих трудностей достигается путем применения динамической адаптации.

## § 1. Идея метода

В основу метода положена идея перехода к произвольной нестационарной системе координат, в которой неизвестными являются не только сеточные функции, но и координаты узлов сетки. Преобразование координат осуществляется автоматически с помощью искомого решения. Обратное преобразование задается в виде дифференциального уравнения в частных производ-

ных, из решения которого определяются координаты узлов. Уравнение составляется таким образом, что скорость движения узлов зависит от эволюции решения уравнений, описывающих физические процессы.

Ранее [1] нестационарные системы координат использовались в основном для слежения за подвижными границами, особыми линиями или поверхностями раздела внутри течений. Сетки адаптировались при этом к таким выделенным особенностям решения как ударные волны [17, 29], межфазные [30] и свободные границы [31,32], но не к градиентам функций. Хорошо известным примером использования нестационарной системы координат в гидро – газодинамических задачах могут служить классические лагранжевы переменные, в которых скорость движения координат определяется гидродинамической скоростью течения. Лагранжевы подходы в последнее время используются и для адаптации к градиентам решения [20, 22]. В указанных работах процедура движения узлов уже была связана с требованием равномерного распределения второй производной искомого решения.

Переход к произвольной нестационарной системе координат, рассматриваемый в данной работе, позволяет адаптировать сетки к разнообразным особенностям решения, в том числе к большим градиентам [22,24,33], подвижным границам [21,34] и разрывным решениям [23,35].

Рассмотрим более подробно предлагаемый способ адаптации. Пусть  $(x, t)$  – исходные независимые переменные. Переход к произвольной нестационарной системе координат осуществляется с помощью замены переменных общего вида  $x = f(q, \tau)$ ,  $t = \tau$ , имеющей обратное невырожденное преобразование  $q = v(x, t)$ ,  $\tau = t$ . Частные производные зависимых переменных выражаются при этом следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial \tau} + Q \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \quad (2)$$

где  $\Psi = \partial x / \partial q$  – метрический коэффициент,  $\partial x / \partial \tau$  – скорость движения системы координат, подлежащая в дальнейшем определению. Связав движение системы координат с особенностями решения, задаваемых в виде некоторой функции  $Q$ , получим уравнение обратного преобразования:

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = -Q \quad (3)$$

Функция  $Q$  фактически является параметром управления движения узлов. Отметим, что в ряде случаев более удобной формой уравнения обратного преобразования является запись

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial Q}{\partial q}$$

которое можно получить дифференцированием уравнения (3) по  $\partial/\partial q$ .

## § 2. Выбор функции $Q$

Ключевой проблемой любого метода с динамической адаптацией сетки, является выбор численной характеристики искомого решения используемой для управления движением узлов. Обычно в качестве такой характеристики используют погрешность аппроксимации, само искомое решение или его производные. Решение этой проблемы в излагаемом методе рассмотрим на примере решения уравнения Бюргерса.

Полное нелинейное уравнение Бюргерса является уравнением в частных производных параболического типа. В вычислительной практике широко используется в качестве модельного для уравнений пограничного слоя, параболизированных и полных уравнений Навье-Стокса. С учетом начальных и граничных условий проблема может быть сформулирована следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4)$$

$$x_0 < x < x_R, t > 0$$

$$t = 0: u(x, 0) = u^0(x), x_0 < x < x_R \quad (5)$$

$$x = x_0: g_0 \left[ x, t, u(x), \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0, t > 0 \quad (6)$$

$$x = x_R: g_R \left[ x, t, u(x), \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0, t > 0 \quad (7)$$

где коэффициент  $\mu$  имеет смысл вязкости,  $u^0(x)$ ,  $g_0[x, t, u(x), \partial u/\partial x]$ ,  $g_R[x, t, u(x), \partial u/\partial x]$  – заданные функции.

Используя замену переменных общего вида и выражения для частных производных (1),(2) с учетом (3) запишем уравнение Бюргерса в переменных  $(q, \tau)$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{Q}{\Psi} \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{u^2}{2} \right) = \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\mu}{\Psi} \frac{\partial u}{\partial q} \right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = -Q, \quad \Psi = \frac{\partial x}{\partial q} \quad (9)$$

$$q_0 < q < q_R, \quad \tau > 0$$

$q_0, q_R$  – постоянные.

Как уже отмечалось, задание функции  $Q$  определяет конкретный вид преобразования координат и является параметром управления движением узлов сетки. Определим  $Q$  исходя из следующих соображений. Для полной согласованности механизма адаптации с искомым решением функция  $Q$  должна

зависеть от решения уравнения (8). Кроме того, при переходе к новой системе координат подразумевается, что будет выбрана такая нестационарная система координат в которой временные производные решения будут равны нулю или достаточно малы. Этот момент представляется наиболее важным, так как из анализа качества разностных схем известно, что временные производные играют важную роль в диссипативных и дисперсионных свойствах конечно-разностных схем. Предположим, что найдена система координат в которой  $\partial u / \partial \tau = 0$ . Тогда уравнение (8) принимает вид:

$$\frac{Q}{\Psi} \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{u^2}{2} \right) = \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\mu}{\Psi} \frac{\partial u}{\partial q} \right)$$

Отсюда находим функцию  $Q$ :

$$Q = - \left( u - \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\mu}{\Psi} \right) - \frac{\mu}{\Psi} \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} / \frac{\partial u}{\partial q} \right) \quad (10)$$

Полученное выражение для функции  $Q$  и эффективность его применения подлежит аналитическому и численному анализу. Покажем, что найденная функция будет оптимальной в смысле качества решения при минимальном числе узлов сетки.

### § 3. Анализ дифференциального приближения

Введем дискретное пространство  $\omega_h^{\Delta \tau}$ :

$$\omega_h^{\Delta \tau} = \left\{ (q_i, \tau^j); \quad q_{i+1} = q_i + h, \quad \tau^{j+1} = \tau^j + \Delta \tau \right. \\ \left. i = 0, 1 \dots N, \quad j = 0, 1 \dots J \right\}$$

в котором система уравнений (8),(9) аппроксимируется семейством конечно-разностных схем.

Рассмотрим три семейства трехточечных двухслойных схем для уравнения Бюргерса в переменных  $(q, \tau)$ , [36]:

1). Семейство схем с центральными разностями

$$u_\tau = - \left[ \frac{Q^{(\sigma_2)}}{\Psi^{(\sigma_3)}} u_{\hat{q}}^{(\sigma_1)} + \frac{1}{2\Psi^{(\sigma_3)}} (u^2)_{\hat{q}}^{(\sigma_1)} - \frac{\mu}{\Psi^{(\sigma_3)}} \left( \frac{1}{\Psi^{(\sigma_3)}} u_{\hat{q}}^{(\sigma_1)} \right)_q \right] \quad (11)$$

2). Семейство схем с конечными разностями вперед

$$u_\tau = - \left[ \frac{Q^{(\sigma_2)}}{\Psi^{(\sigma_3)}} u_q^{(\sigma_1)} + \frac{1}{2\Psi^{(\sigma_3)}} (u^2)_q^{(\sigma_1)} - \frac{\mu}{\Psi^{(\sigma_3)}} \left( \frac{1}{\Psi^{(\sigma_3)}} u_q^{(\sigma_1)} \right)_q \right] \quad (12)$$

3). Семейство схем с конечными разностями назад

$$u_\tau = - \left[ \frac{Q^{(\sigma_2)}}{\Psi^{(\sigma_3)}} u_{\bar{q}}^{(\sigma_1)} + \frac{1}{2\Psi^{(\sigma_3)}} (u^2)_{\bar{q}}^{(\sigma_1)} - \frac{\mu}{\Psi^{(\sigma_3)}} \left( \frac{1}{\Psi^{(\sigma_3)}} u_{\bar{q}}^{(\sigma_1)} \right)_q \right] \quad (13)$$

где приняты обозначения:

$$u_\tau = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta\tau^j}, \quad fu_{\bar{q}} = f_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad fu_q = f_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

$$fu_{\bar{q}} = f_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad f^{(\sigma)} = (1 - \sigma)f^j + \sigma f^{j+1}, \quad 0 < \sigma < 1$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – весовые множители, определяющие степень неявности разностной схемы. При  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$  имеем полностью явные схемы с погрешностью аппроксимации  $O(\Delta\tau + h^2)$  для семейства (11) и  $O(\Delta\tau + h)$  для (12), (13). При  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$  получаем полностью неявные схемы с тем же порядком аппроксимации. Значению  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.5$  соответствуют симметричные схемы Кранка - Николсона с аппроксимацией  $O(\Delta\tau^2 + h^2)$  для (11) и  $O(\Delta\tau^2 + h)$  для (12), (13).

Каждое семейство разностных схем (11) – (13) представляет собой конечное число систем нелинейных разностных уравнений, которые с разной степенью точности аппроксимируют дифференциальное уравнение (8).

С учетом предположения о выполнении условия

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$$

разностные схемы (11) – (13) оказываются не зависящими от шага интегрирования  $\Delta\tau^j$ , временного слоя  $t^j$  и параметра  $\sigma$ :

$$\frac{Q}{\Psi} q_{\bar{q}} + \frac{1}{2\Psi} (u^2)_{\bar{q}} - \frac{\mu}{\Psi} \left( \frac{1}{\Psi} u_{\bar{q}} \right)_q = 0 \quad (14)$$

$$\frac{Q}{\Psi} u_q + \frac{1}{2\Psi} (u^2)_q - \frac{\mu}{\Psi} \left( \frac{1}{\Psi} u_{\bar{q}} \right)_q = 0 \quad (15)$$

$$\frac{Q}{\Psi} u_{\bar{q}} + \frac{1}{2\Psi} (u^2)_{\bar{q}} - \frac{\mu}{\Psi} \left( \frac{1}{\Psi} u_{\bar{q}} \right)_q = 0 \quad (16)$$

Независимость разностных схем (14)-(16) от  $t^j$ ,  $\Delta\tau^j$  и  $\sigma$  свидетельствует о том, что с точки зрения адаптации явные и неявные схемы оказываются равнозначными. Однако аналитическое исследование качества разностных схем в этом случае значительно упрощается.

Каждая из выписанных разностных схем представляет собой конечное число алгебраических уравнений для сеточных функций, которые с разной степенью точности аппроксимируют дифференциальное уравнение (8). Различия, возникающие между дифференциальной моделью и ее конечно – разностным аналогом при определенных условиях могут стать значительными

и, в общем случае, требуют дополнительного анализа. Выполним этот анализ с помощью так называемого дифференциального приближения [37,38].

Запишем для каждой разностной схемы (14) - (16) ее дифференциальное приближение. Для получения дифференциальных приближений воспользуемся стандартной процедурой разложения сеточных функций в окрестности точки  $(i, j)$  в ряд Тейлора. Опуская несложные, но громоздкие преобразования, запишем дифференциальные приближения в окончательном виде.

Для схемы с центральными разностями (14)

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\Psi} \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{u^2}{2} \right) - \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\mu}{\Psi} \frac{\partial u}{\partial q} \right) = \\ = \frac{1}{\Psi} \left[ \alpha_1 \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \beta_1 \frac{\partial^3 u}{\partial q^3} + \gamma_1 \frac{\partial^4 u}{\partial q^4} + \delta_1 \frac{\partial^3}{\partial q^3} \left( \frac{1}{\Psi} \right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

где:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{h^2}{8} \left( 4 \frac{\partial u}{\partial q} - \mu \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left( \frac{1}{\Psi} \right) \right) \\ \beta_1 &= \frac{h^2}{6} \left( \mu \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\Psi} \right) - u - Q \right) \\ \gamma_1 &= \mu \frac{h^2}{12} \frac{1}{\Psi}, \quad \delta_1 = \mu \frac{h^2}{24} \frac{\partial u}{\partial q} \end{aligned}$$

Для схем с разностями вперед (15) и назад (16) дифференциальные приближения отличаются только знаками в правых частях

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\Psi} \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{u^2}{2} \right) - \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\mu}{\Psi} \frac{\partial u}{\partial q} \right) = \\ = \frac{1}{\Psi} \left[ \alpha_{2,3} \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \beta_{2,3} \frac{\partial^3 u}{\partial q^3} + \gamma_{2,3} \frac{\partial^4 u}{\partial q^4} + \delta_{2,3} \frac{\partial^3}{\partial q^3} \left( \frac{1}{\Psi} \right) + \epsilon_{2,3} \left( \frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{2,3} &= \alpha_0 + \alpha_1, \quad \alpha_0 = \mp \frac{h}{2} (Q + u), \\ \beta_{2,3} &= \beta_1, \quad \gamma_{2,3} = \gamma_1, \quad \delta_{2,3} = \delta_1, \quad \epsilon_{2,3} = \mp \frac{h}{2} \end{aligned}$$

В этих выражениях индекс 2 соответствует уравнению для схемы (15), а индекс 3 дифференциальному приближению для схемы (16). Верхний знак в коэффициентах  $\alpha_{2,3}$  и  $\epsilon_{2,3}$  относится к первому индексу, а нижний ко второму.

Из анализа дифференциальных приближений известно [28,39], что наиболее важную роль играют члены в правой части со второй и третьей



производными, характеризующие соответственно диссипацию и дисперсию разностной схемы. Проанализируем коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ , стоящие перед второй и третьей производными. Отметим, что оба коэффициента зависят от параметров адаптации. Это означает, что диссипация и дисперсия разностных схем зависят от способа адаптации и могут быть изменены в нужную сторону. При этом коэффициент  $\beta$  имеет один и тот же вид для всех семейств разностных схем. И, что самое важное, соответствующим выбором функции  $Q$  его можно обратить в нуль. Тем самым можно полностью избавиться от внутренней дисперсии разностной схемы. Коэффициенты  $\beta_{1,2,3}$  обращаются в нуль, как не сложно заметить, если функцию  $Q$  положить равной

$$Q = - \left( u - \mu \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\Psi} \right) \right) \quad (19)$$

Заметим, что выражение (19) содержит на одно слагаемое меньше чем выражение (10).

Проанализируем, с учетом поведения дисперсионной составляющей, диссипативные свойства разностных схем (14) - (16). Из трех разностных схем наименьшую диссипацию имеет схема с центральными разностями (14). В соответствующем ей дифференциальном приближении (17) коэффициент перед диссипативным членом  $\alpha_1$  пропорционален  $h^2$ . С учетом выбора функции  $Q$  в виде (19), разностная схема (14) по формальным признакам обладает наиболее высокими качествами: малой схемной вязкостью и отсутствием дисперсии. В разностных схемах с фиксированными узлами для уравнения Бюргера малость диссипации играет отрицательную роль, так как из-за нескомпенсированности дисперсионной составляющей недостаточно большая схемная вязкость не в состоянии подавлять паразитные колебания решения. В схемах первого порядка по  $h$  (15), (16) диссипативная составляющая пропорциональна  $h$ , так как  $\alpha_{2,3} \sim h$ . Однако и в этих случаях схемная вязкость не будет большой и не будет играть столь значительную роль, как в схемах с фиксированными узлами. Коэффициенты  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  в уравнении (18) представляют собой сумму, состоящую из  $\alpha_1 \sim h^2$  и некоторой добавки  $\alpha_0 = \mp h/2(Q + u)$ , зависящей от функции преобразования  $Q$ . В случае задания  $Q$  согласно (19), коэффициент  $\alpha_0$  пропорционален коэффициенту физической вязкости  $\mu$

$$\alpha_0 = \mp \frac{h}{2} \mu \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\Psi} \right)$$

В наиболее интересных случаях, когда  $\mu$  очень мало добавка  $\alpha_0$  будет исчезающе мала и разностные схемы (15), (16) по своим качествам будут аналогичны схемам (14). При больших  $\mu$  схемная вязкость не играет большой роли, так как при этом решение не содержит крутых градиентов из-за большой физической вязкости.

Выполненный анализ позволяет сделать следующие выводы:

1. Оптимальную функцию преобразования  $Q$  можно определить из условия стационарности процессов в новой нестационарной системе координат.

2. Разностные схемы для стационарных уравнений не зависят от временного слоя и шага интегрирования  $\Delta\tau$ , что означает, что динамическая адаптация может с одинаковым успехом применяться как к полностью явным так и полностью неявным схемам.

3. Динамическая адаптация существенно снижает требования к качеству разностных схем. С ее помощью для широкого класса схем можно полностью устранять дисперсию при одновременном уменьшении их диссипативных свойств.

Выводы теоретического анализа подтверждаются вычислительными экспериментами, результаты которых приводятся ниже.

#### § 4. Результаты моделирования

Возможности метода динамической адаптации продемонстрируем на примере численного решения двух эволюционных задач, описывающих конвективно-диффузионные процессы в приближении уравнения Бюргерса. Результаты моделирования сравним с теоретическими предпосылками и результатами расчетов на сетках с фиксированными узлами.

В расчетном пространстве  $\Omega_{q,\tau}$  представим уравнение Бюргерса в дивергентном виде (20) и запишем его совместно с уравнением обратного преобразования (21):

$$\frac{\partial(\Psi u)}{\partial\tau} = -\frac{\partial P(u)}{\partial q} - \frac{\partial(Qu)}{\partial q} \quad (20)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = -\frac{\partial Q}{\partial q}, \quad q_0 < q < q_R, \tau > 0 \quad (21)$$

где

$$P(u) = -\frac{u^2}{2} - \frac{\mu}{\Psi} \frac{\partial u}{\partial q}, \quad \Psi = \frac{\partial x}{\partial q}$$

Функция  $Q$  задавалась в виде (19)

$$Q = -\left(u - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\mu}{\Psi}\right)\right)$$

или согласно выражению (10)

$$Q = -\left(u - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\mu}{\Psi}\right) - \frac{\mu}{\Psi} \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} / \frac{\partial u}{\partial q}\right)$$

В пространстве  $\Omega_{q,\tau}$  введем расчетную сетку  $\omega_h^{\Delta\tau}$ , в которой для удобства используются узлы с целыми и полуцелыми индексами:

$$\omega_h^{\Delta\tau} = \left\{ (q_i, \tau^j), (q_{i+\frac{1}{2}}, \tau^j) : q_{i+1} = q_i + h, q_{i+\frac{1}{2}} = q_i + 0.5h, \right. \\ \left. i = 0, 1 \dots N, \tau^{j+1} = \tau^j + \Delta\tau, j = 0, 1 \dots J \right\}$$

К целым узлам будем относить функции  $x_i^j, u_i^j, Q_i^j$  к полуцелым  $(q_{i+1/2}, \tau^j)$  — сеточные функции  $\Psi_{i+1/2}^j, P_{i+1/2}^j$ . Выпишем для системы уравнений (20), (21) семейство разностных схем [36]:

$$(\Psi u)_i^{j+1} = (\Psi u)_i^j - \\ - \frac{\Delta\tau^j}{h} \left\{ (1-\sigma) [P_{i+\frac{1}{2}} - P_{i-\frac{1}{2}} + (uQ)_{i+\frac{1}{2}} - (uQ)_{i-\frac{1}{2}}]^j + \right. \\ \left. + \sigma [P_{i+\frac{1}{2}} - P_{i-\frac{1}{2}} + (uQ)_{i+\frac{1}{2}} - (uQ)_{i-\frac{1}{2}}]^{j+1} \right\} \quad (22)$$

$$\Psi_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} = \Psi_{i+\frac{1}{2}}^j - \frac{\Delta\tau^j}{h} \left( (1-\sigma) [Q_{i+1} - Q_i]^j + \sigma [Q_{i+1} - Q_i]^{j+1} \right),$$

$$P_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^2}{2} - \frac{\mu}{\Psi_{i+\frac{1}{2}}} \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad i = 1, 2 \dots N-1$$

$$Q_i = - \left[ u_i - \frac{\mu}{h} \left( \frac{1}{\Psi_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\Psi_{i-\frac{1}{2}}} \right) \right]$$

$$\Psi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}{h}$$

Семейство схем (22) аппроксимирует дифференциальную систему с порядком  $O(\Delta\tau + h^2)$  при  $\sigma = 0, 1$  и  $O(\Delta\tau^2 + h^2)$  при  $\sigma = 0.5$ . Разностная система уравнений (22) решалась итерационным методом Ньютона. На каждой итерации система линейных алгебраических уравнений решалась с помощью матричной прогонки. Шаг интегрирования  $\Delta\tau^j$  выбирался автоматически, исходя из заданной точности и максимального числа итераций.

Рассмотрим две типичные постановки задач, наиболее часто встречающиеся при решении уравнения Бюргера [19,40]. В обеих задачах из-за малой физической вязкости  $\mu = 10^{-4}$  решение с течением времени стремится к разрывному. Из-за специального выбора начального пространственного профиля  $u^0(x)$  в первом случае квазиразрывное решение возникает в середине области, а во втором на ее границе.

**Задача 1.** Выберем начальное распределение функции  $u^0(x)$  на отрезке  $[0, 1]$  в виде асимметричной синусоиды

$$u^0(x) = u(x, 0) = \sin(2\pi x) + 0.5 \sin(\pi x) \quad (23)$$

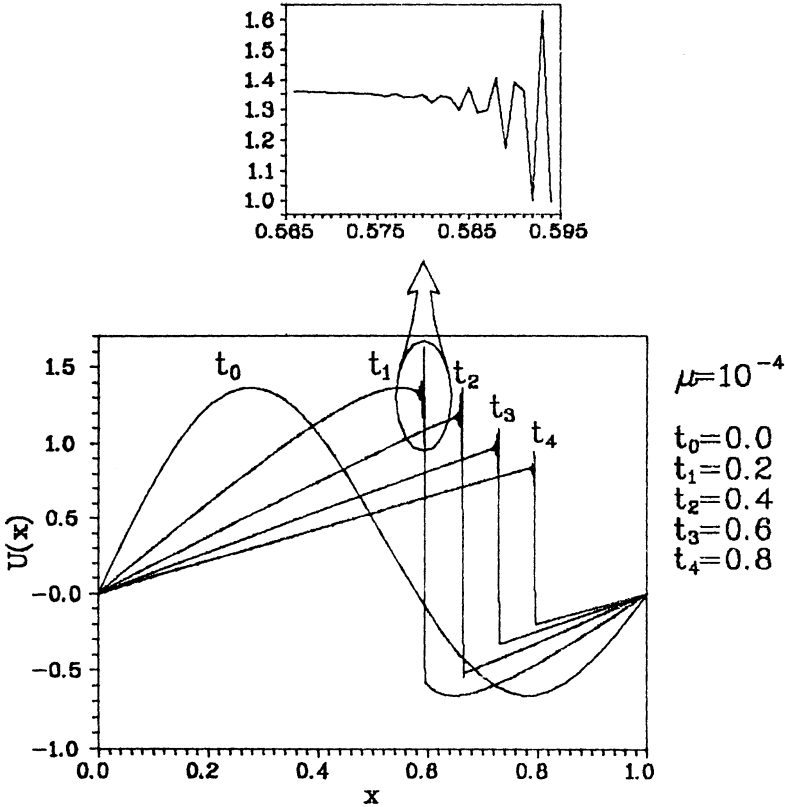


Рис.1 Расчеты асимметричной синусоиды на сетке с фиксированными узлами

В граничных точках  $x = 0$  и  $x = 1$  функция  $u$  полагалась равной нулю:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \tag{24}$$

В переменных  $(q, \tau)$  условия (23),(24) необходимо дополнить начальным и граничными условиями для уравнения (21):

$$\Psi(q, 0) = 1 \tag{25}$$

$$Q(0, \tau) = Q(1, \tau) = 0 \tag{26}$$

Вначале решалась задача (4),(23),(24) на сетке с фиксированными узлами. Расчеты показали, что на сетках с числом узлов менее 100 численное решение фактически неустойчиво. На рис.1 представлено решение полученное на сетке с  $10^3$  узлами. Движущиеся навстречу две полуволны синусоиды быстро формируют крутой фронт на котором возникают паразитные осцилляции. При числе узлов менее 500 подобные осцилляции наблюдаются

и на отрицательной стороне фронта. Увеличение числа узлов до  $10^4$  позволяет уменьшить амплитуду колебаний, но не избавиться от них полностью. Наблюдаемый эффект свидетельствует о чрезвычайно сильной дисперсии используемых разностных схем.

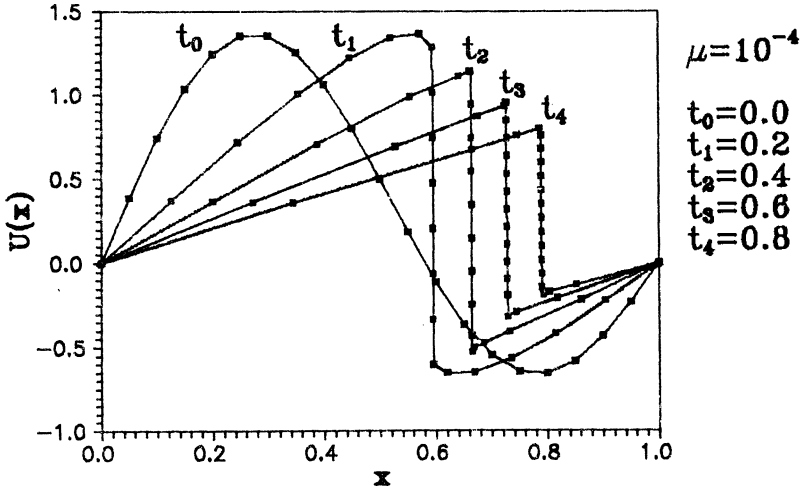


Рис.2 Расчеты асимметричной синусоиды на адаптирующей сетке с 20 узлами

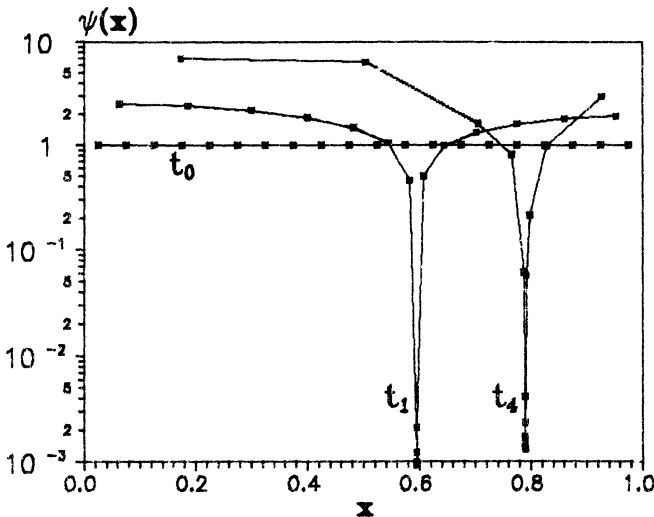


Рис.3 Распределение узлов сетки для асимметричной синусоиды

Применение динамической адаптации к решению задачи (20),(21),(23)-(24), позволило получать решения, свободные от осцилляций при числе узлов  $N > 15$ . На рис. 2 представлено решение, полученное на адаптивной сетке с общим числом узлов  $N = 20$ , на те же моменты времени, что и на рис.1. Полное отсутствие колебаний достигается за счет согласованного с решением движения узлов, которое, как было показано в предыдущем разделе может приводить к полному исчезновению внутренней дисперсии разностных схем. Благодаря этому свойству сетки с динамической адаптацией позволяют использовать в расчетах необычно малое число узлов. Как и ожидалось, схемы с  $O(\Delta\tau + h^2)$  и схемы с  $O(\Delta\tau^2 + h^2)$  дают близкие результаты. Единственное отличие, состояло в том, что при прочих равных условиях, схемы второго порядка допускают примерно в два раза больший шаг интегрирования по  $\tau$ . Динамику движения узлов сетки удобно характеризовать с помощью функции  $\Psi$ , показывающей, во сколько раз измеряются линейные размеры элемента  $\Delta x$ , в физическом пространстве  $\Omega_{x,t}$ , рис.3. Положение узлов на графиках рис.2,3 отмечено маркерами. На рис.4 показаны траектории движения узлов, свидетельствующие об их концентрации в области наибольших градиентов, где размеры элемента  $\Delta x$ , уменьшаются примерно в  $10^3$  раз. В тоже время в области малых градиентов значения пространственных шагов могут возрастать в десятки раз.

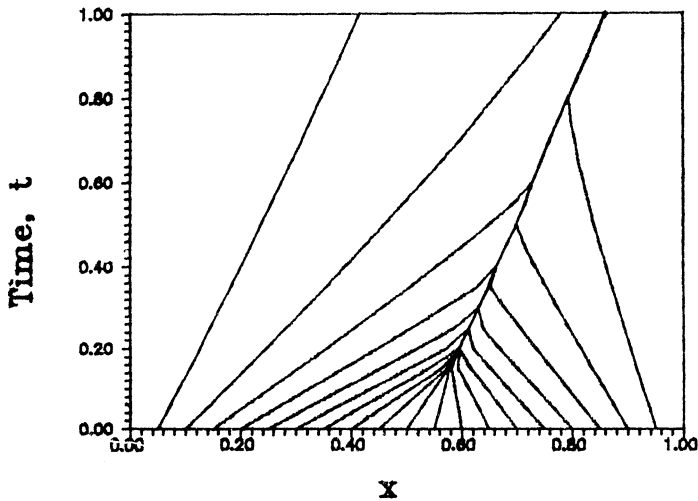


Рис.4 Траектории движения узлов сетки для асимметричной синусоиды

**Задача 2.** Рассмотрим два примера, в которых решение неограничено распространяется вдоль пространственной оси  $x > 0$ . В первом случае в ка-

честве начального  $u^0(x)$  приближения выбиралась положительная полуволна синусоиды:

$$u^0(x) = \begin{cases} \sin(5\pi x) & 0 \leq x \leq 0.2 \\ 0 & 0.2 < x < \infty \end{cases} \quad (27)$$

Во втором примере начальное распределение функции  $u^0(x)$  задается в виде ступеньки, форма которой близка к прямоугольной.

$$u^0(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 0.28] \\ \frac{0.3-x}{0.02} & x \in [0.28, 0.3] \\ 0 & x \geq 0.3 \end{cases} \quad (28)$$

Граничные условия имеют вид:

$$u(0, t) = u(\infty, t) = 0 \quad (29)$$

В переменных  $(q, \tau)$  условия (27)-(29) дополняются начальными и граничными условиями для уравнения (21):

$$\begin{aligned} \Psi(q, 0) &= 1 \\ Q(0, \tau) &= Q(\infty, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Во втором примере квазиразрывное решение существует в начальный момент времени, а в первом при  $\mu = 10^{-4}$  за довольно короткое время решение, являясь непрерывной функцией, приобретает форму прямоугольного треугольника. Таким образом в обоих примерах правая граница распространяется в виде фронта по нулевому фону. Как показывает опыт применения динамически адаптирующихся сеток для расчетов распространяющихся слабых разрывов, в виде температурных волн [24,33], и сильных разрывов, в виде ударных волн в газодинамических процессах [23,35], задачу с подвижным фронтом целесообразно представлять как задачу со свободной границей. Подвижная граница помещается при этом в точку соединения фронта с фоновым значением и для нее выписывается соответствующее граничное условие. В нестационарной системе координат, в отличие от неподвижной, подобная формулировка задачи выглядит естественно и не вызывает дополнительных математических трудностей. Записать граничное условие на подвижной границе, если оно неизвестно, в общем случае можно с помощью исходного дифференциального уравнения. Так в рассматриваемых примерах, с учетом требования  $\partial u / \partial \tau = 0$  граничное условие представлялось в виде следующего дифференциального соотношения:

$$q = q_N = 0.3 : \frac{\partial P(u)}{\partial q} + \frac{\partial(Qu)}{\partial q} = 0 \quad (31)$$

из которого после разностной аппроксимации получаем уравнение для определения скорости движения фронта  $Q_N$ .

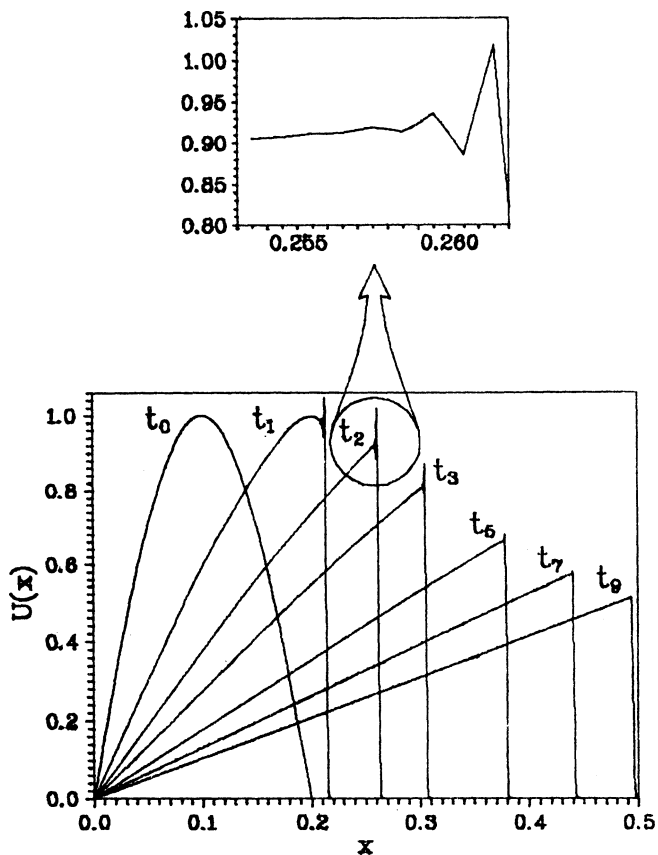


Рис.5 Расчеты полуволны синусоиды на эйлеровой сетке с 1500 узлами

Как и в предыдущей задаче уравнение Бюргера вначале решалось в переменных  $(x, t)$  с условиями (27),(29). На рис. 5, 6 представлены решения, полученные в различные моменты времени на сетке со 1500 фиксированными узлами. Полусинусоида за короткое время приобретает форму прямоугольно-треугольника с основанием пропорциональным  $l \sim t^{1/2}$  и высотой  $h \sim t^{-1/2}$

Для ступеньки, рис.6, решение быстро выходит на стационарный уровень и распространяется в виде прямоугольника. На подвижном фронте у обоих решений возникают значительные колебания от которых, как и в предыдущем случае, не удастся избавиться простым увеличением числа узлов. Решение системы (20),(21) с краевыми условиями (27)-(31), описывающей те же процессы в переменных  $(q, \tau)$ , позволило получить решение, свободное от осцилляций на адаптирующейся сетке с 15 узлами, рис.7,8. Таким образом и в рассматриваемой проблеме можно говорить о полной компенсации дисперсии разностных схем за счет движения узлов сетки согласованного с решением.



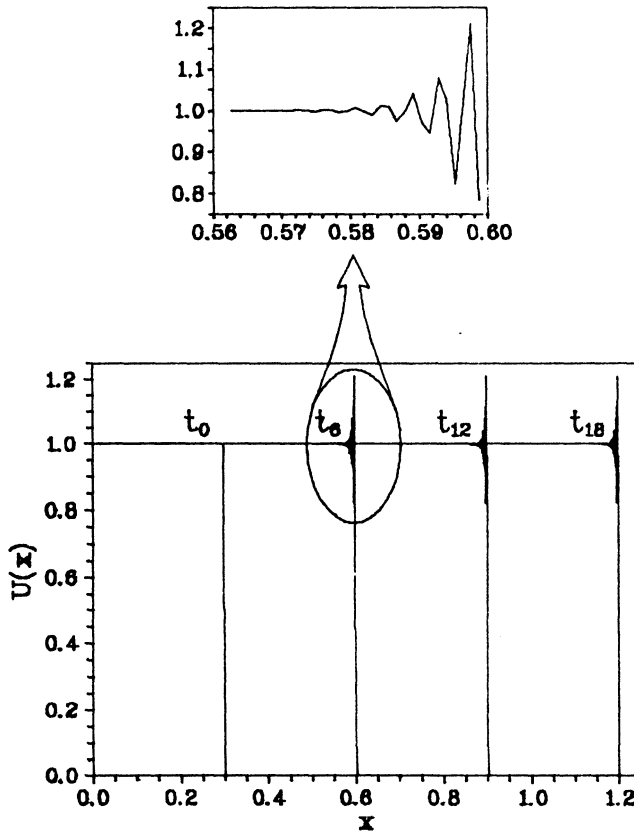


Рис.6 Расчеты полуволны синусоиды на адаптирующейся сетке с 15 узлами

На рис.9 представлены траектории движения узлов, характеризующие динамику узлов сетки. Из их рассмотрения явствует, что в решении обоих примеров можно выделить две области. В одной из них решение либо постоянно и градиенты в нем отсутствуют, либо решение меняется слабо и содержит небольшие градиенты. Во второй области градиенты решения чрезмерно велики. На рис.10 показаны пространственные профили функции  $\Psi(x)$  для прямоугольной ступеньки в различные моменты времени, свидетельствующие о чрезвычайно сильной концентрации узлов на фронте. Это может приводить не только к слишком неравномерному распределению узлов, но и к полному их исчезновению из области малых градиентов. Преодолеть этот нежелательный эффект можно двумя довольно простыми способами. Учитывая, что в узкой области квазиразрывности решения концентрируется избыточное число узлов, при почти полном отсутствии их в остальной области, рис.10, можно для их более равномерного распределения ввести процедуру конвергенции.

При выполнении определенных условий из области наибольшей концентрации удаляется узел с минимальным значением  $\Psi$ , и помещается в область, где  $\lg(\Psi_{i+1}/\Psi_i)$  максимально.

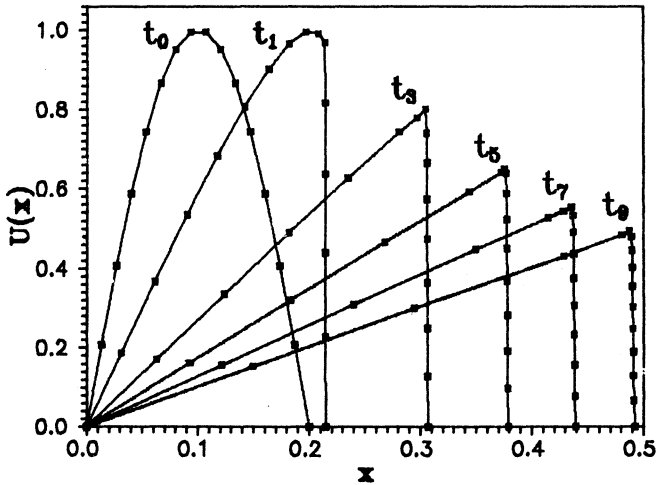


Рис.7 Расчет полуволны синусоиды на адаптирующей сетке с 15 узлами

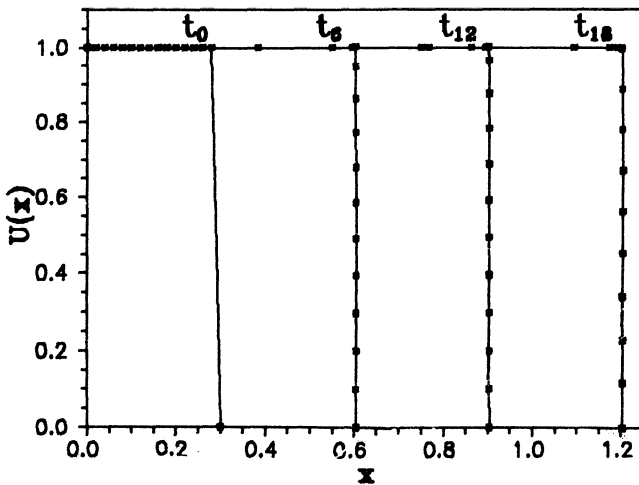


Рис.8 Расчет прямоугольной ступеньки на адаптирующей сетке с 15 узлами

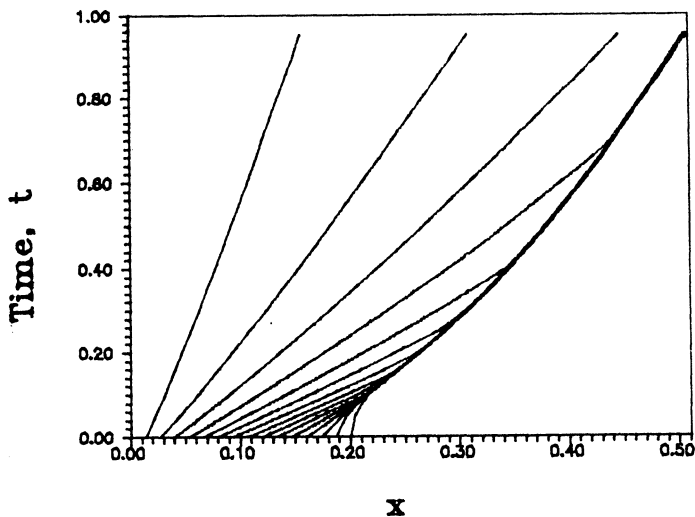


Рис.9 Траектории движения узлов сетки в задаче о распространении прямоугольной ступеньки

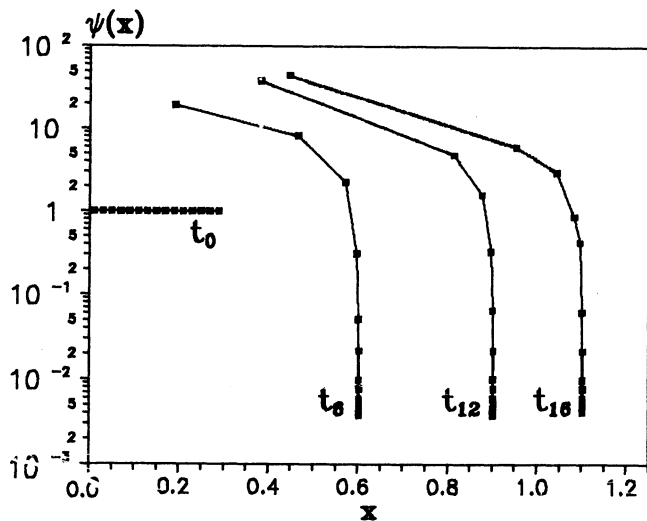


Рис.10 Распределение узлов сетки на различные моменты времени для прямоугольной ступеньки

В рассматриваемых примерах условие конвергенции формулировалось в виде

$$\lg\left(\frac{\Psi_{i+1}}{\Psi_i}\right) > 1 \div 2$$

Второй способ состоит во введении дополнительной функции  $Q_1$  замедляющего действия. Для этих целей можно использовать функцию вида [21]

$$Q_1 = -D \frac{\partial \Psi}{\partial q}$$

где  $D$  – свободный параметр, регулирующий степень замедления движения узлов.

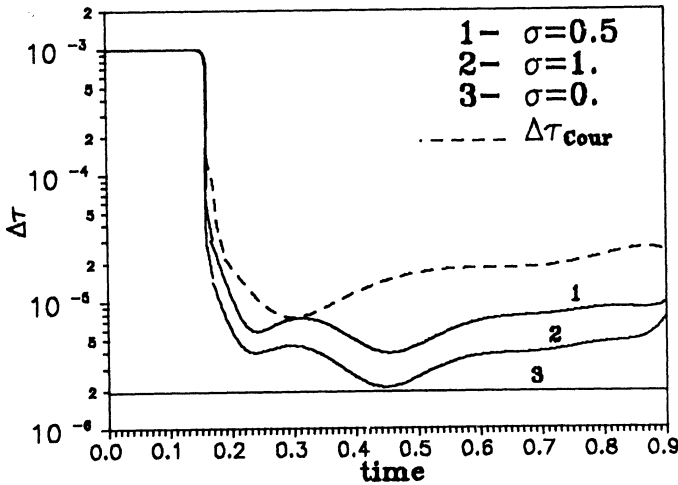


Рис.11 Сравнение шагов интегрирования  $\Delta\tau$  для неявной схемы с  $\sigma = 0.5$  – кривая 2, и явных схем с  $\sigma = 0$  – кривая 3, с критерием Куранта – пунктирная линия

Для обоих примеров проводились серии вспомогательных расчетов с целью определения чувствительности метода к виду функции  $Q$  и влияния порядка аппроксимации разностных схем на качество численного решения.

Вычислительные эксперименты показали невысокую чувствительность способа адаптации к виду функции преобразования  $Q$ . Так, применение формулы (10) позволяет узлам двигаться более плавно в областях быстрого изменения первой и второй производных решения. В тоже время функция  $Q$  в виде (19) много проще в использовании и обеспечивает практически такую же точность, поэтому ей отдавалось предпочтение.

Расчеты также подтвердили теоретические предпосылки о том, что динамическая адаптация с одинаковым успехом может использоваться как для явных, так и неявных разностных схем. Основное различие замечается только в величине шага интегрирования  $\Delta\tau$ . На рис.11 приведены зависимости  $\Delta\tau$  для различных разностных схем, которые сравниваются между собой и с  $\Delta\tau_c$ , даваемое известным соотношением Куранта. Из сравнения кривых явствует, что явная схема требует в несколько раз более мелкого шага интегрирования, чем полностью неявные схемы. Неявные схемы с  $O(\Delta\tau + h)$  и симметричные схемы с  $\Delta\tau^2 + h^2$  дают практически одинаковые результаты. Но схемы с  $\Delta\tau^2 + h^2$  позволяют вести расчеты с шагом  $\Delta\tau$  примерно в два раза большим чем схемы с первым порядком. Однако и число арифметических операций в этой схеме также примерно в два раза больше. Ограничения на шаг  $\Delta\tau$  в случае  $\sigma = 1$  и  $\sigma = 0.5$  связаны с сильной нелинейностью решаемой задачи и требованием достижения требуемой точности  $\epsilon = 10^{-5}$

## § 5. Заключение

Выполненное исследование свидетельствует о том, что метод динамической адаптации, в основу которого положена идея перехода к произвольной нестационарной системе координат, обладает рядом достоинств среди которых можно выделить следующие:

1. Процедура динамической адаптации в рассматриваемом методе формулируется на дифференциальном уровне, что делает метод не чувствительным к способу дискретизации дифференциальных операторов - конечными разностями или конечными элементами.

2. Оптимальный закон движения узлов может быть определен из условия квазистационарности процессов в новой нестационарной системе координат. Численное моделирование свидетельствует о невысокой чувствительности метода к точному виду функции преобразования  $Q$ . К успеху приводит любое преобразование, вызывающее уменьшение временных производных в новой системе координат. Однако в этих случаях в функции преобразования появляются один или несколько свободных параметров, играющих роль подгоночных коэффициентов [21-24]

3. Положение узлов сетки переопределяется на каждом временном шаге. Выполненное моделирование свидетельствует об эффективности метода достаточной для практического применения.

4. Аналитический и численный анализ выполненный на примере задач, описывающих конвективно-диффузионные процессы, показал, что предлагаемый метод построения адаптирующихся сеток существенно повышает качество разностных схем и применим как к явным, так и неявным схемам.

5. Согласованное с решением движение узлов приводит к снижению внутренней дисперсии и диссипации разностных схем, что позволяет на 2-3 порядка уменьшить число узлов сетки.

6. Идея метода носит весьма общий характер. На ней могут основываться методы построения адаптирующихся сеток для всех типов нестационарных задач, в том числе и для многомерных постановок [41].

### Список литературы

1. Numerical Grid Generation / Edited by J.F. Thompson. – North - Holland, Amsterdam, 1982, 909 p.
2. J.F. Thompson. Grid Generation Techniques in Computational Fluid Dynamics // AIAA J. 1984, V. 22, N 11, pp.1505 – 1523.
3. В.Д. Лусейкин. Технология конструирования трехмерных сеток для задач аэродинамики. Обзор. // ВАИТ, серия: "Математическое моделирование физических процессов. 1991, вып. 3, с. 31 – 45.
4. M.J. Berger, P. Colella. Local Adaptive Mesh Refinement for Shock Hydrodynamics // J. Comput. Phys., 1989, V. 82, pp. 64 – 84.
5. S. Acharja and F.H. Moukalled. An Adaptive Grid Solution Procedure for Convection – Diffusion Problem // J. Comput. Phys., 1990, V. 91, pp. 32 – 54.
6. R. Biswas, J.E. Flaherty, D.C. Arney. An Adaptive Mesh – Moving and Refinement Procedure for One – Dimensional Conservation Laws // Appl. Numeric. Mathematics, 1993, V. 11, pp. 259 – 282.
7. J.F. Thompson, Z.U.A. Warsi, C.W. Mastin. Boundary Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations. A review // J. Comput. Phys., 1982, V. 47, pp. 1 – 108.
8. J.U. Brackbill and J. Saltzman. Adaptive Zoning for Singular Problems in Two Dimensions // J. Comput. Phys., 1982, V. 46, pp. 342 – 368.

9. *R.I. Kreis, F.C. Thames, H.A. Hassan.* Application of a Variational Method for Generating Adaptive Grids // AIAA J., 1986, N 3, pp. 404 – 410.
10. *В.М. Ковеня, Н.Н. Яненко.* Разностная схема на подвижных сетках для решения уравнений вязкого газа // ЖВМФ, 1979, т. 19, N 1, с. 174 – 188.
11. *Л.М. Дегтярев, В.В. Дроздов.* Адаптирующиеся к решению сетки в эллиптических задачах на плоскости // Дифференциальные уравнения, 1984, т. 20, N 7, с. 1194 – 1203.
12. *D.A. Anderson.* Equidistribution Schemes, Poisson Generators, and Adaptive Grids // Appl. Mathem. Comput., 1987, V. 24, pp. 211 – 227.
13. *K. Matsuno, H.A. Dwyer.* Adaptive Methods for Elliptic Grid Generation // J. Comput. Phys., 1988, V. 77, pp.40 – 52.
14. *J.B. Bell, G.R. Shubin.* An Adaptive Grid Finite Difference Method for Conservation Laws // J. Comput. Phys., 1983, V. 52, pp 569 – 591.
15. *H.A. Dwyer, R.J. Kee, B.R. Sanders.* Adaptive Grid Method for Problems in Fluid Mechanics and Heat Transfer // AIAA J., 1980, V. 18, N 10, pp. 1205 – 1212.
16. *M.M. Rai, D.A. Anderson.* Application of Adaptive Grids to Fluid – Flow Problems with Asymptotic Solutions // AIAA J., 1982, V. 20, N 4, pp 486 – 502.
17. *K. Nakahashi and G.S. Deiwert.* Automatic Method for Adaptive Grids Generation and its Application to Problems of Profile Streamlining // AIAA J., 1987, V. 25, N 4, pp. 513 – 520.
18. *K. Nakahashi and G.S. Deiwert.* Three – Dimensional Adaptive Grid Method //AIAA J., 1986, V. 24, N 6, pp. 948 – 954.
19. *K. Miller, R. Miller.* Moving Finite Elements. I,II // SIAM J. Num. Anal., 1981, V. 18, N 6, pp. 1019 – 1057.
20. *J.G. Verwer, J.G. Blom, J.M. Sanz – Serna.* An Adaptive Moving Grid Method for One – Dimensional Systems of Partial Differential Equations // J. Comput. Phys., 1989, V. 82, pp. 454 – 486.
21. *Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин.* Математическое моделирование задачи Стефана на адаптивных сетках // Диф. уравнения, 1987, т. 23, N 7, с. 1154 – 1160.
22. *Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин.* Об одном подходе к построению адаптивных разностных сеток // ДАН СССР, 1988, т.298, N 1, с. 64 – 68.
23. *Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин, А.А. Самарский.* Конечно – разностный метод решения одномерных уравнений газовой динамики на адаптивных сетках // ДАН СССР, 1988, т. 302, N 5, с. 1078 – 1081.

24. *В.И. Мажукин, Л.Ю. Тахоева.* Принципы построения динамически адаптирующихся к решению сеток в одномерных краевых задачах // *Мат. моделирование*, 1990, т. 2, N 3, с.101 – 118.
25. *A.E. Cook, R. Duncan.* A Node – Moving Algorithm with Application to Burgers' Equation and the Moltze Problem // *Appl. Math. Modell.*, 1982, V. 6, pp. 463 – 466.
26. *J. Caldwell, P. Wanless, A.E. Cook.* A Finite Element Approach to Burgers' Equation // *Appl. Math. Modell.*, 1981, V. 5, pp. 189 – 193.
27. *A.J. Wathen.* Optimal Moving Grids for Time – Dependent Partial Differential Equation // *J. Comput. Phys.*, 1992, V. 101, pp. 51 – 54.
28. *D.A. Anderson, J.C. Tannehill, R.H. Pletcher.* *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer.* – New York, 1984, 384 p.
29. *P.A. Gnoffo.* A Vectorized, Finite – Volume, Adaptive Grid Algorithm Applied to Planetary Entry problems // *AIAA J.*, 1983, V. 21, pp. 1249 – 1257.
30. *M. Lacroix, A. Garon.* Numerical Solution of Phase Change Problems: An Eulerians – Lagrangian Approach // *Numerical Heat Transfer, Part B*, 1992, V. 19, pp. 57 – 78.
31. *M.B. Aston, J.W. Thomas.* An Implicit Scheme for Water Wave problems // *Numerical Grid Generation*, edited by J.F.Thompson. – North – Holland, Amsterdam, 1982.
32. *R.W. Yeung.* Numerical Methods in Free Surface Flows // *Annual Review on Fluid Mechanics*, 1982, V. 21, pp. 395 – 442.
33. *В.Ф. Василевский, В.И. Мажукин.* Численные расчеты температурных волн со слабыми разрывами на сетках с динамической адаптацией // *Дифференциальные уравнения*. 1989, т.25, N 7, с.1188 – 1193.
34. *П.В. Бреславский, В.И. Мажукин.* Математическое моделирование процессов импульсного плавления и испарения металла с явным выделением фазовых границ // *ИФЖ*, 1989, т. 57, N 1, с. 107 – 114.
35. *В.Ф. Василевский, В.И. Мажукин.* Расчет ударных волн на сетках с динамической адаптацией. Препринт N 37. – М.ИИМатем. АН СССР, 1990 11 с.
36. *А.А. Самарский.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989, 616 с.
37. *R.E. Warming, B.J. Hyett.* The Modified Equation Approach to the Stability and Accuracy Analysis of Finite –difference Methods // *J. Comput. Phys.*, 1974, V. 14, pp. 159 – 179.
38. *Ю.И. Шокин.* Первое дифференциальное приближение. – Новосибирск: Наука, 1979, 224 с.



39. *А.А. Самарский, Ю.П. Попов.* Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992, 423 с.
40. *R.J. Gelinias, S.K. Doss, K. Miller.* The Moving Finite Element Method: Application to General Partial Differential Equations with Multiple Large Gradients // *J. Comput. Phys.*, 1981, V. 40, pp. 202 – 249.
41. *Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин.* Математическое моделирование нестационарных двумерных краевых задач на сетках с динамической адаптацией // *Мат. моделирование*, 1989, т. 1, N 3, с. 29 – 43.

Институт Математического  
Моделирования РАН

Поступила в редакцию  
24.06.93