

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том 5 номер 5 год 1993

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

ВЛИЯНИЕ МЕТАСТАБИЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ НА ПРОЦЕСС ИМПУЛЬСНОЙ ЛАЗЕРНОЙ ОБРАБОТКИ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ КЕРАМИКИ

© В.И.Мажукин, И.В.Гусев, А.В.Шапранов

Институт математического моделирования РАН

На основе совмещенного варианта задачи Стефана с помощью математического моделирования исследуются механизмы лазерного плавления и испарения сверхпроводящей керамики. Численное решение осуществляется с помощью метода динамической адаптации. Исследования выполнены для широкого диапазона длин волн излучения $\lambda \approx 0.3 \div 1.06$ мкм. Показано, что при объемном поглощении энергии в результате плавления и испарения возникают сильно перегретые метастабильные области твердой и жидкой фаз. Метастабильные состояния приводят к увеличению скорости движения фронта плавления и ослаблению скорости испарения. С ростом длины волны излучения до $\lambda \approx 1.06$ мкм влияние метастабильности усиливается, что может привести к неустойчивости ряда процессов, в том числе испарительного.

INFLUENCE OF METASTABLE STATES ON PROCESS OF PULSE LASER
TREATMENT OF SUPERCONDUCTING CERAMICS

V.I.Mazhukin, I.V.Gusev, A.V.Shapranov

The mechanisms of the laser-induced melting and evaporation of superconducting ceramics is investigated on the basis of the combined version of Stephan problem. Numerical integration are carried out by means of the dynamical adaptation method. The investigations are performed for the wide range of wavelengths $\lambda \approx 0.3 \div 1.06$ μm . It is shown, that the overheated metastable states in solid and liquid phases are appeared during melting and evaporation if the radiation energy release is of volumetric type. The presence of the metastable states lead to the increasing of the melting velocity and to the decreasing of the velocity of evaporation. The influence of metastable states increase while the radiation wavelength is increased up to $\lambda \approx 1.06$ μm , and can lead to the instability of some processes, e.g. of the evaporation process.

Введение

Физика импульсного лазерного воздействия на сильно поглощающие конденсированные среды вызывает в последнее время повышенный интерес. Активно ведущиеся в этой области фундаментальные исследования стимулируются потребностями лазерных технологий. Одной из наиболее перспективных считается технология лазерного нанесения тонкопленочных покрытий [1, 2]. Идеально нанесенные пленки должны иметь равномерную толщину, обладать высокой сплошностью и адгезией. Как показали опыты [1, 2], качество покрытий зависит от устойчивости процесса лазерного распыления мишени, которая в свою очередь зависит от параметров воздействия: интенсивности, длительности импульса, длины волны излучения, а также от толщины напыляемых пленок, теплофизических и оптических свойств распыляемых материалов.

Наиболее чувствительным к параметрам воздействия оказался процесс распыления сверхпроводящих керамик [3 – 5]. Исследование их поведения является одной из наиболее сложных проблем лазерного воздействия на конденсированные среды. В основе физического процесса лазерного распыления металлов и керамик лежат фазовые переходы первого рода (плавление, испарение), динамика которых оказывает существенное влияние на устойчивость процесса. В то же время механизм формирования температурных полей в сверхпроводящих керамиках имеет свои особенности, связанные во многом с объемным характером выделения энергии лазерного излучения.

При теоретическом анализе лазерного распыления керамик возникает необходимость одновременного рассмотрения различных физических процессов с учетом их взаимного влияния. Среди них наиболее важной и наименее изученной проблемой является взаимосвязь фазовых превращений с метастабильными состояниями вещества. Известно, что быстрые фазовые превращения всегда сопровождаются возникновением метастабильных состояний. К настоящему времени накоплен значительный экспериментальный и теоретический материал по явлениям перегрева и переохлаждения жидкой и газовой фаз при испарении, кристаллизации и конденсации [6 – 11]. Менее изученной и более дискуссионной является проблема возникновения перегретых состояний в твердых телах, связанных с лазерным плавлением [12 – 15] и сублимацией [16 – 18]. Теоретический анализ, выполненный в более ранних работах [19, 20] либо исключал возможность перегрева твердотельных материалов, либо указывал на его незначительность. Ситуация принципиально изменилась с появлением мощных импульсных источников энергии, применение которых [21, 22] позволило реализовать режимы, в которых время подвода энергии оказалось соизмеримым с временами фазовых трансформаций.

Различные аспекты лазерного испарения при объемном нагреве диэлектрических жидкостей (вода, ацетон, этанол) исследовались в значительном

числе экспериментальных и теоретических работ (например, [23-25]). Из-за относительной малости коэффициентов температуропроводности α и поглощения κ условие объемного нагрева жидкости при лазерном испарении $u_{lv}/\alpha\kappa \geq 1$ реализуется уже при сравнительно малых скоростях испарения $u_{lv} \sim 1$ [см/с] [23]. Влияние перегретой метастабильной области жидкости проявлялось в конкурирующем характере механизмов поверхностного испарения и объемного вскипания жидкой фазы.

Исследованию условий возникновения перегретых метастабильных состояний в твердой фазе, сопровождающих лазерное плавление, посвящено значительно меньшее число работ [21, 22]. В целом полное исследование влияния сильного перегрева твердой фазы на процесс плавления к настоящему моменту отсутствует.

В настоящей работе рассматриваются процессы импульсного плавления и испарения сверхпроводящей керамики типа $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ лазерным излучением с интенсивностью, типичной для нанесения сверхпроводящих пленок в наносекундном диапазоне воздействия. С помощью методов математического моделирования исследуются:

- а) формирование температурных полей с учетом динамики фазовых превращений и объемного выделения энергии.
- б) роль и влияние перегретых метастабильных состояний твердой и жидкой фаз на процессы плавления и испарения.
- в) основные закономерности процесса распыления керамики в зависимости от оптических свойств материала.

§ 1. Математическая модель и метод численного моделирования

Теоретический анализ импульсного лазерного воздействия на керамику с учетом фазовых превращений является весьма сложной задачей. Поэтому при ее решении приходится принимать различные упрощающие предположения. Сформулируем основные из них:

1. Свойства перегретых жидкостей и твердых тел существенно зависят от глубины захода в метастабильную область. При реализации глубокого захода в теплофизических характеристиках вещества вблизи спинодали могут появляться сингулярности [26] в виде, например, неограниченного возрастания теплоемкости C_p и стремления к нулю температуропроводности α . При неглубоких (относительно бинодали) заходах в метастабильную область в перегретых жидкостях никаких особенностей не отмечается [27]. При лазерном испарении сильнопоглощающих конденсированных сред, типа металлов, метастабильность перегретой фазы может не сказываться до сравнительно высоких температур $T \approx 0,85 T_c$ [23], где T_c – температура вещества в критической точке.

На основании этих данных, можно предположить, что метастабильные состояния, сопровождающие фазовые превращения в керамиках, никак себя не проявят, т.е. не будут сказываться на теплофизических и оптических характеристиках и параметрах вещества.

2. Одним из основных свойств метастабильных состояний является их конечное время жизни. Распад метастабильных состояний, как правило, обусловлен процессами зародышеобразования конкурирующей фазы. Проблемы термодинамической устойчивости и динамики распада метастабильных состояний представляют самостоятельный интерес и требуют отдельного анализа. В процессе лазерного воздействия на конденсированные среды эти проблемы сводятся к определению относительной роли поверхностных и объемных механизмов испарения и плавления. В математических моделях, рассматриваемых в данной статье, предполагается, что перегретые метастабильные состояния в течении времени воздействия ведут себя устойчиво и процессы поверхностного плавления и испарения являются основными механизмами фазовых превращений твердое тело – жидкость и жидкость + пар. Тем самым из рассмотрения исключаются процессы зародышеобразования и, связанные с ними, процессы объемного плавления и испарения. Это позволяет существенно упростить формулировку проблемы, так как в противном случае пришлось бы учитывать взрывной распад метастабильных фаз. В настоящее время пока отсутствуют теоретические модели, на основе которых можно было бы провести количественный анализ подобных явлений.

3. Керамики являются гетерогенными материалами. Теплофизические характеристики их изучены недостаточно полно. Дополнительные осложнения возникают в области высоких температур, где теплофизические свойства керамик практически неизвестны.

Поэтому при описании лазерного воздействия керамика рассматривается как гомогенный материал, характеризующийся осредненными теплофизическими параметрами.

4. Все процессы в зоне облучения рассматриваются в одномерном по пространству приближении. Необходимым условием применимости такого приближения, как известно, является малость длины температурного влияния по сравнению с диаметром пятна облучения.

Теоретическое рассмотрение динамики фазовых превращений первого рода приводит к различным вариантам задачи Стефана [28], под которой в математической физике подразумевается широкий класс задач с подвижными границами, описывающийся уравнениями параболического или эллиптического типа. В достаточно общей постановке задачу Стефана можно свести к краевой задаче для квазилинейного параболического уравнения с кусочно – непрерывными коэффициентами, имеющими разрывы первого рода на заранее неизвестных подвижных поверхностях.

Математическое описание процессов лазерного нагрева, плавления и испарения сверхпроводящей керамики производится в рамках совмещенного варианта задачи Стефана, объединяющего классическую и однофазную постановки. Математическая модель совмещенного варианта представляет собой краевую задачу для уравнения теплопроводности с двумя подвижными фазовыми границами $\Gamma_{sl}(t)$ и $\Gamma_{lv}(t)$. Учет объемного нагрева твердой и жидкой фаз производится с помощью члена $\partial G/\partial x$ в уравнении теплопроводности и уравнения переноса излучения

$$\left[C_p \rho \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial x} \right]_k \quad (1)$$

$$\left[\frac{\partial G}{\partial x} + \kappa G = 0 \right]_k, \quad k = s, l \quad (2)$$

$$x_0 < x < \Gamma_{sl}(t)$$

$$\Gamma_{sl}(t) < x < \Gamma_{lv}(t), \quad t > 0$$

В классическом варианте задачи Стефана для описания фазовых переходов типа плавления – кристаллизации на межфазной границе $\Gamma(t)$ используется дифференциальное условие

$$x = \Gamma_{sl}(t) : \quad \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial x} = \rho_s L_m v_{sl} \quad (3)$$

из которого определяется скорость движения фронта $v_{sl}(t)$. Кроме условия (3) на межфазной границе необходимо задавать еще одно условие, в общем случае связанное с кинетикой фазового перехода. В классическом варианте задачи Стефана полагается, что на границе раздела фаз температура T_{sl} непрерывна и равна равновесной температуре перехода T_m

$$T_{sl} = T_s = T_{sl} = T_m \quad (4)$$

Равновесную температуру фазового перехода T_m во многих случаях можно считать постоянной величиной. Таким образом, феноменологическое условие (4) не содержит в явном виде неравновесность фазового перехода и его использование предполагает, что плавление начинается сразу после достижения температуры перехода T_m . Тем самым из рассмотрения исключается перегрев поверхности твердого тела. Такой подход можно считать традиционным. Например, в известной монографии [29] указывается, что перегрев свободной поверхности твердого тела, вообще говоря, не реализуется.

Неравновесность фазового превращения в явном виде учитывается в так называемом кинетическом условии, связывающем скорость движения межфазной границы v_{sl} с ее температурой T_{sl} . Согласно классической теории [10,12,13,30] это условие в упрощенном виде может быть записано

$$v_{sl}(T_{sl}) = C_1 \exp\left(-\frac{U}{kT_{sl}}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{L_m \Delta T}{kT_m T_{sl}}\right)\right] \quad (5)$$

где C_1 – константа, зависящая от материала, U – энергия активации. Использование вместо равенства (4) кинетического условия (5), в котором неравновесность фазового перехода присутствует в явном виде, предполагает движение фазовой границы в процессах плавления – кристаллизации только при наличии перегрева или переохлаждения.

Заметим, что для формулировки кинетического условия используются и другие подходы [14,31]. Однако к настоящему времени нет устоявшегося мнения об области применимости того или иного подхода. По-прежнему дискуссионным остается и вопрос об использовании равновесной (1 – 4) или неравновесной (1 – 3, 5) математических моделей для описания импульсных режимов воздействия.

В настоящей работе для моделирования процессов плавления – кристаллизации используется математическая модель (1 – 3) с равновесным условием (4). Как уже отмечалось применение феноменологического условия (4) равносильно запрету на перегрев поверхности твердой фазы при плавлении и на переохлаждение поверхности жидкой фазы при кристаллизации. Вместе с тем при объемном нагреве наличие перегрева твердой фазы является необходимым условием применимости задачи Стефана для описания процесса плавления.

Для математического описания процесса развитого поверхностного испарения используется однофазный вариант задачи Стефана, в котором температура плоской границы T_{sr} слабо (логарифмически) зависит от скорости движения фронта [32]. Интенсивное испарение приводит к возникновению на границе раздела сильно неравновесного кнудсеновского слоя. Обычно в задачах испарения кнудсеновский слой представляется в виде газодинамического разрыва, на котором выписываются три закона сохранения и два дополнительных соотношения, характеризующих степень неравновесности фазового перехода. Существует несколько способов аппроксимации кнудсеновского слоя [23, 33 – 36]. В предположении, что испарение ведется в вакуум или в среду, давление которой p_0 много меньше давления насыщенного пара $p_H(T_{sr}) \gg p_0$, использование любой из указанных моделей не носит принципиального значения. В настоящей работе использовались соотношения, полученные в [35]. В случае объемного нагрева конденсированной среды граничные условия на испаряющейся поверхности имеют вид:

$$x = \Gamma_{lv} : \quad -\lambda_{sr} \frac{\partial T_{sr}}{\partial x} = \rho_{sr} L_v v_{lv} + \sigma T_{sr}^4 \quad (6)$$

$$\rho_{sr} v_{lv} = \rho_v (v_{lv} - u) \quad (7)$$

$$P_{sr} + \rho_{sr} v_{lv}^2 = P_v + \rho_v (v_{lv} - u)^2 \quad (8)$$

$$T_v = T_{sr} \left\{ \left[1 + f^2 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) M^2 \right]^{1/2} - f \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) M \right\}^2 \quad (9)$$

$$\rho_v = \frac{1}{2} \rho_H \left\{ \left(\frac{T_{sr}}{T_v} \right)^{1/2} \left[(\gamma M^2 + 1) \exp(b^2 M^2) \operatorname{erfc}(bM) - \frac{4f}{\pi} M \right] + \frac{T_{sr}}{T_v} \left[1 - 2fM \exp(b^2 M^2) \operatorname{erfc}(bM) \right] \right\} \quad (10)$$

$$M = \frac{u}{u_c}, \quad u_c = (\gamma R T_{sr})^{1/2}, \quad b = \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{1/2}, \quad f = \left(\frac{\pi \gamma}{8} \right)^{1/2}$$

$$\rho_H = \frac{P_H}{R T_{sr}}, \quad P_H = p_b \exp \left[\frac{L_v}{R T_{sr}} \left(1 - \frac{T_b}{T_{sr}} \right) \right]$$

В случае поверхностного нагрева на облучаемой поверхности баланс энергии записывается в виде

$$-\lambda_{sr} \frac{\partial T_{sr}}{\partial x} = \rho_{sr} L_v u_{lv} - G_{sr} + \sigma T_{sr}^4 \quad (11)$$

где:

$$G_{sr} = A(T_{sr}) G$$

Остальные условия остаются без изменений.

Основная сложность численного решения задач типа Стефана связана с наличием подвижных межфазных границ, положение которых заранее неизвестно и должно определяться в ходе решения. В связи с тем, что область решения заранее неизвестна и меняется с течением времени, возникают трудности с построением пространственных расчетных сеток. Преодолеть эти трудности можно с помощью метода динамической адаптации [37 – 39]. В методе динамической адаптации проблема построения расчетных сеток формулируется на дифференциальном уровне. Это означает, что в математической модели часть дифференциальных уравнений описывает физические процессы, а другая – поведение узлов сетки [38]. В основу метода динамической адаптации положена процедура перехода к произвольной нестационарной системе координат. Переход осуществляется посредством их автоматического преобразования с помощью искомого решения. Переход к нестационарной системе координат позволяет избавиться от проблем, связанных с подвижными границами. Платой за это является увеличение числа неизвестных, так как в этом случае искомыми являются не только сеточные функции, но и координаты узлов сетки. Произвольность выбора нестационарной системы координат позволяет решать задачи с любым числом подвижных границ. Кроме того, она делает метод универсальным и простым, поскольку переход к нужной системе координат производится с помощью выбора конкретной функции преобразования Q , зависящей в общем случае от решения. С ее помощью можно легко осуществить желаемое, в зависимости от особенностей искомого решения, распределение узлов сетки. Среди особенностей можно выделить:

распространение больших градиентов, сильных разрывов, контактных и фазовых границ.

Запишем математические модели (1–4), (6–10) в произвольной нестационарной системе координат. Пусть (x, t) – исходные независимые переменные, а (q, τ) – независимые переменные в новой системе координат. Переход от одной системы координат к другой осуществляется с помощью замены переменных общего вида $x = f(q, \tau)$, $t = \tau$ имеющей обратное невырожденное преобразование $q = \Phi(x, t)$, $\tau = t$. Частные производные зависимых переменных выражаются при этом следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\rho}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{Q}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q}, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\rho}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q}, \\ \Psi &= \frac{\partial x}{\partial q} \rho, \quad \frac{Q}{\rho} = -\frac{\partial x}{\partial \tau}, \end{aligned}$$

где $\partial x / \partial \tau = -Q / \rho$ – скорость движения системы координат, Q – произвольная функция, в общем случае зависящая от искомого решения, Ψ – метрический коэффициент или коэффициент трансформации, показывающий во сколько раз с течением времени изменяется исходная область.

Используя приведенную замену частных производных, запишем математическую модель (1–4), (6–10) в переменных (q, τ) , представляя дифференциальные уравнения в дивергентной форме:

$$\left[\frac{\partial(H\Psi)}{\partial \tau} = \frac{\partial W}{\partial q} - \frac{\partial(Q\Psi)}{\partial q} - \frac{\partial G}{\partial q} \right]_k, \quad H = C_p T \quad (12)$$

$$\left[\frac{\partial G}{\partial q} + \kappa \Psi G = 0 \right]_k, \quad W = -\frac{\rho \lambda}{\Psi} \frac{\partial T}{\partial q} \quad (13)$$

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial Q}{\partial q} \right]_k, \quad \left[\frac{\Psi}{\rho} = \frac{\partial x}{\partial q} \right]_k, \quad k = s, l \quad (14)$$

$$x_0 < x < \Gamma_{sl}(t), \quad \Gamma_{sl}(t) < x < \Gamma_{lv}(t), \quad t > 0$$

Граничные условия:

$$q = q_0: \quad \frac{\lambda \rho}{\Psi} \frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad Q = 0 \quad (15)$$

$$q = \Gamma_{sl}: \quad T_{sl} = T_m, \quad Q_{sl} = -\rho_s v_{sl}, \quad Q_{sl} = \frac{W_s - W_l}{L_m} \quad (16)$$

$$q = \Gamma_{lv}: \quad \frac{\lambda_{sr} \rho_{sr}}{\Psi_{sr}} \frac{\partial T_{sr}}{\partial q} = -L_v Q_{lv} + \sigma T_{sr}^4 \quad (17)$$

$$\rho_{sr} v_{lv} = \rho_v (v_{lv} - u), \quad Q_{lv} = -\rho_{sr} v_{lv} \quad (18)$$

$$P_{sr} + \rho_{sr} v_{iv}^2 = P_v + \rho_v (v_{iv} - u)^2 \quad (19)$$

$$T_v = T_{sr} \left\{ \left[1 + f^2 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) M^2 \right]^{1/2} - f \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) M \right\}^2 \quad (20)$$

$$\rho_v = \frac{1}{2} \rho_H \left\{ \left(\frac{T_{sr}}{T_v} \right)^{1/2} \left[(\gamma M^2 + 1) \exp(b^2 M^2) \operatorname{erfc}(bm) - \frac{4f}{\pi} M \right] + \frac{T_{sr}}{T_v} \left[1 - 2fM \exp(b^2 M^2) \operatorname{erfc}(bM) \right] \right\} \quad (21)$$

$$P_H = R \rho_H T_{sr}, \quad P_H = p_b \exp \left[\frac{L_v}{RT_{sr}} \left(1 - \frac{T_b}{T_{sr}} \right) \right]$$

Уравнение (14) является уравнением обратного преобразования. Функция Q в этом уравнении, как уже отмечалось зависит от особенностей искомого решения, допускает большую свободу выбора и должна задаваться исследователем. Не останавливаясь подробно на способах задания функции Q (специальный анализ этого вопроса выполнен в работе [39]), отметим, что в задачах с подвижными границами наиболее подходящей является функция вида $Q = -D(\partial\Psi/\partial q)$. При достаточной величине коэффициента D указанная функция обеспечивает равномерное распределение узлов на каждый момент времени.

Численное решение математической модели (12-21), осуществлялось с помощью пакета прикладных программ LASTEC-1 [40-42]. При решении пространство функций непрерывного аргумента заменяется пространством функций дискретного аргумента (сеточные функции), а система дифференциальных уравнений (12-14) аппроксимируется конечно-разностными соотношениями, представляющими собой систему алгебраических уравнений. Для расчетов использовалась полностью неявная консервативная схема с порядком аппроксимации $O(\Delta\tau + h^2)$, где $\Delta\tau$, h - шаги по переменным τ и q .

§ 2. Результаты моделирования.

Анализ экспериментальных и теоретических данных [3,43-45] по теплофизическим λ , C_p и оптическим A , κ характеристикам керамики $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ показал их слабую зависимость от температуры. В то же время оптические характеристики сильно изменяются с изменением длины волны падающего излучения [3]. Согласно кривой $\kappa(\lambda_\nu)$, основанной на экспериментальных данных [3], коэффициент объемного поглощения κ меняется в пределах $\kappa \sim 8 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$ для излучения с длиной волны $\lambda_\nu \sim 0.2 \text{ мкм}$ до $\kappa \sim \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ для излучения с $\lambda_\nu \geq 1 \text{ мкм}$. Таким образом, в зависимости от длины волны λ_ν падающего излучения сверхпроводящие керамики могут

поглощать либо как металлы (поверхностный нагрев), либо как диэлектрики (объемный механизм выделения энергии). Очевидно, что смена механизма диссипации энергии лазерного излучения должна приводить к качественному изменению поведения основных процессов.

Выполним последовательно математическое моделирование импульсного лазерного воздействия для каждого из механизмов диссипации энергии лазерного излучения и проанализируем их особенности. С учетом изложенного математическое моделирование осуществлялось по двум моделям: для поверхностного (1, 3, 4, 7 – 11) и объемного (1 – 4, 6 – 10) нагрева. Режим лазерного воздействия во всех рассматриваемых вариантах полагался одним и тем же. Параметры его выбирались типичными для режимов формирования тонких сверхпроводящих пленок с помощью лазерного распыления массивной мишени. Полагалось, что лазерный импульс имеет гауссовскую форму по переменной t :

$$G(t) = G_0 \exp \left[\left(-\frac{t}{\tau} \right)^2 \right]$$

где $-\infty < t < +\infty$, τ – полуширина импульса на полувысоте, $\tau = 40$ нс, G_0 – максимальная интенсивность, $G_0 = 10^7$ Вт/см². Теплофизические и оптические характеристики твердой фазы полагались не зависящими от температуры и значения их выбирались согласно экспериментальным данным [43 – 45]:

$$A = 0.8, \quad T_m = 1300^\circ K, \quad T_v = 2000^\circ K, \quad C_{ps} = 0.5 \text{ Дж/г} \cdot K, \\ L_m = 2.5 \cdot 10^2 \text{ Дж/г}, \quad L_v = 6 \cdot 10^3 \text{ Дж/г}, \quad \lambda_s = 3 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/см} \cdot K$$

Учитывая, что теплофизические и оптические свойства сверхпроводящих керамик в области высоких температур практически не исследованы, предполагалось, что при переходе твердое тело – жидкость значения их не изменяются.

Поверхностный нагрев. Пространственное распределение температуры $T(x)$, как в твердой, так и в жидкой фазах, рис. 1, мало чем отличается от традиционного распределения в материалах с низкой теплопроводностью при воздействии поверхностного теплового источника. Низкая теплопроводность приводит к сильной пространственной локализации тепловых полей. К моменту плавления прогретый слой не превышает 0.1 мкм, что приводит к возникновению больших температурных градиентов в приповерхностных слоях. Наличие больших градиентов температуры обуславливает высокую начальную скорость плавления v_{sl} , рис. 2. Процессу плавления на кривой $v_{sl}(t)$ соответствует отрицательная ветвь, а кристаллизации – положительная. Скорость плавления за короткое время достигает своего максимального значения $v_{sl}^{max} \sim 6$ м/с, а затем под влиянием роста жидкой фазы начинает быстро уменьшаться. Однако, дальнейший спад скорости плавления

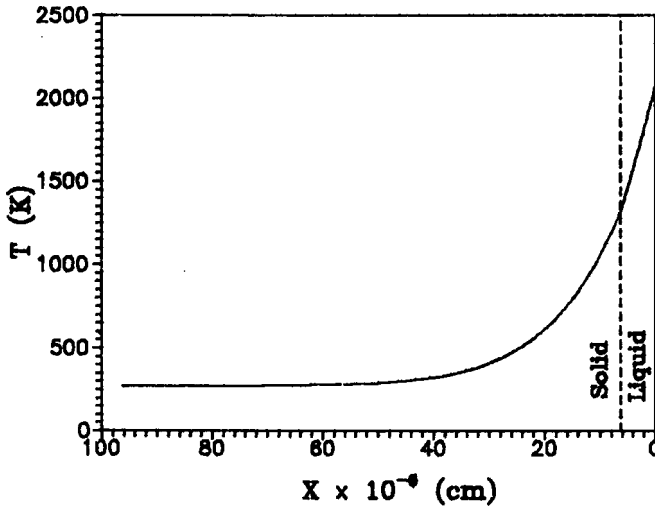


Рис.1 Пространственный профиль температуры при поверхностном механизме выделения энергии.

замедляется процессом интенсивного поверхностного испарения, максимальная скорость которого достигает величины $v_{iv}^{max} \sim 1.5$ м/с. Высокая скорость испарения замедляет прирост жидкой фазы $x_l(t)$ рис. 3, что сказывается на темпе уменьшения скорости $v_{sl}(t)$. Эффект взаимодействия фазовых фронтов особенно хорошо заметен на немонотонном поведении кривой $x_l(t)$, характеризующей динамику жидкой фазы. За время после прекращения развитого испарения толщина жидкой фазы увеличивается примерно в 1.5 раза. Максимальное значение достигается к моменту времени, когда интенсивность лазерного излучения уменьшается примерно на порядок. Процесс кристаллизации протекает также с достаточно высокой скоростью $v_{sl}^{max} \approx 2$ м/с, рис 2. Длительность его примерно равна длительности процесса плавления. На кривой $T_{sr}(t)$ (рис. 4) процессу кристаллизации соответствует плато с практически постоянной температурой. Таким образом, при поверхностном воздействии процесс плавление – кристаллизация описывается ассиметричной по амплитуде и почти симметричной по времени зависимостью $v_{sl}(t)$.

Процесс развитого испарения характеризуется сравнительно высокими значениями скорости $v_{iv}^{max} \approx 1.5$ м/с и давления реактивной отдачи на поверхности жидкости $P_{sr}^{max} \approx 40$ бар. При этом временные развертки $v_{iv}(t)$, рис. 2, и $P_{sr}(t)$, рис. 5, с небольшим сдвигом повторяют временной профиль интенсивности излучения $G(t)$. Как уже неоднократно отмечалось [23, 26],

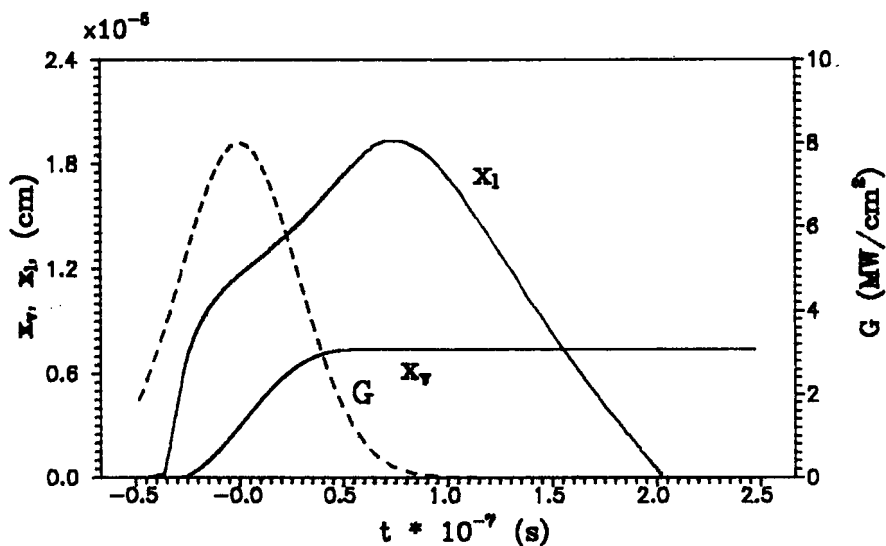
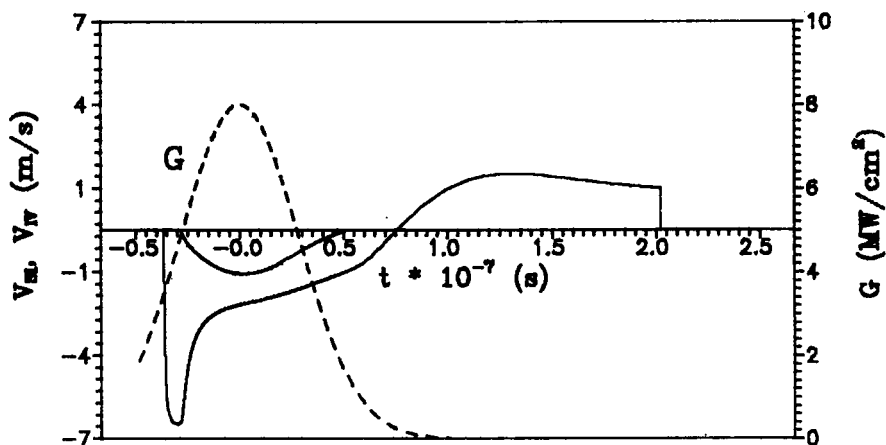


Рис.2,3 Временные зависимости интенсивности $G(t)$, скоростей плавления - кристаллизации $v_s(t)$, испарения $v_v(t)$, толщин расплава $x_l(t)$ и испаренного слоя $x_v(t)$ при поверхностном источнике энергии.

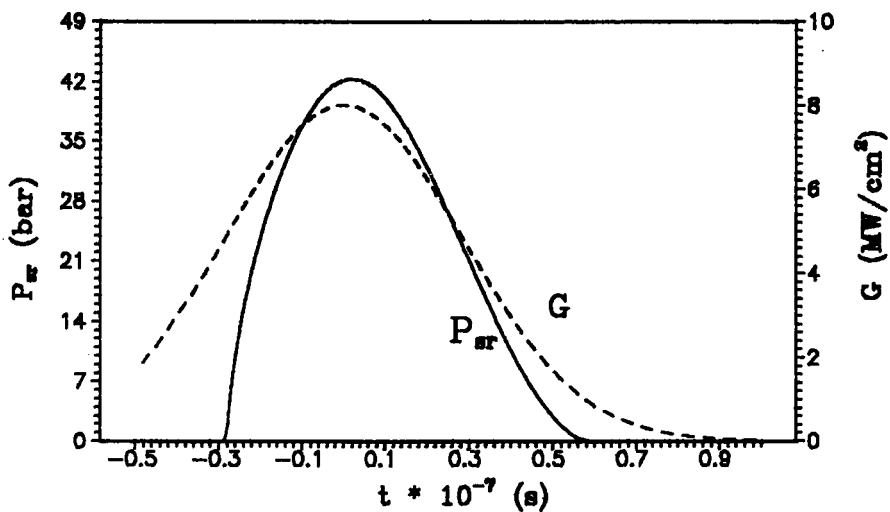
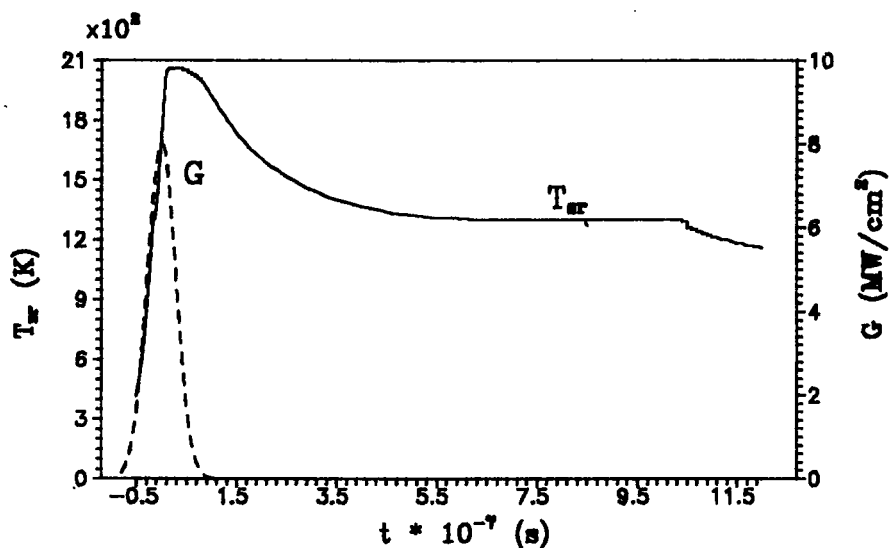


Рис.4.5 Временные зависимости температуры $T_{sr}(t)$ и давления $P_{sr}(t)$ на поверхности при поверхностном источнике энергии.

поверхность испаряющейся жидкости оказывается перегретой относительно давления насыщенного пара. При поверхностном воздействии это единственное проявление метастабильности.

Объемное выделение энергии. В случае выделения энергии лазерного излучения в объеме материала, начиная с некоторого значения длины свободного пробега кванта $l_\nu = \kappa^{-1}$, поведение процессов, в том числе и фазовых переходов, качественно изменяется. Рассмотрим влияние объемной диссипации энергии на основные характеристики воздействия.

Расчеты показали, что в случае диссипации энергии лазерного излучения на небольшой глубине $l_\nu \approx 100 \text{ \AA}$, характер основных процессов практически не отличается от воздействия поверхностного источника. Однако с увеличением длины пробега l_ν поведение процесса начинает качественно меняться. В целом изменения связаны с появлением новых метастабильных состояний в объемах твердой и жидкой фаз, роль которых возрастает с увеличением l_ν . Появление метастабильных состояний приводит к доминированию процесса плавления, ослаблению роли испарения, и, как следствие, к необычно длительному существованию жидкой фазы.

Наиболее заметны эти эффекты в области значения коэффициента поглощения $\kappa \sim 10^5 \div 10^4 \text{ см}^{-1}$ (что соответствует длинам пробега $10^3 \div 10^4 \text{ \AA}$), характерных для излучения неодимового лазера с длиной волны $\lambda_\nu = 1,06 \text{ мкм}$. Увеличение длины свободного пробега кванта до 3000 \AA приводит к заметной диссипации энергии излучения в объеме материала. Пространственный профиль температуры в этом случае имеет плоскую вершину вблизи поверхности с малым температурным градиентом, рис.6. При достижении на облучаемой поверхности температуры плавления T_m от поверхности вглубь материала начинает распространяться фронт плавления. Из-за невысоких пространственных градиентов температуры начальная скорость плавления оказывается на несколько порядков меньше начальной скорости плавления при поверхностном источнике. Затем под совместным воздействием процессов объемного нагрева и плавления в приповерхностных слоях материала начинает формироваться температурный максимум, рис.7. Его пространственно-временное положение и величина определяются режимом воздействия и параметрами материала κ и a . Наличие приповерхностного максимума температуры означает, что некоторый объем твердой фазы оказывается перегретым относительно равновесной температуры плавления T_m . Возникающие метастабильные состояния наиболее значительно сказываются на скорости движения фронта плавления. Появление максимума температуры на некотором расстоянии от границы Γ_{sl} вызывает изменение направления теплового потока W_s , идущего из твердой фазы. В результате тепловые потоки из твердой и жидкой фаз W_s и W_l на границе раздела складываются, а не вычитаются, как в традиционных ситуациях. Сложение потоков

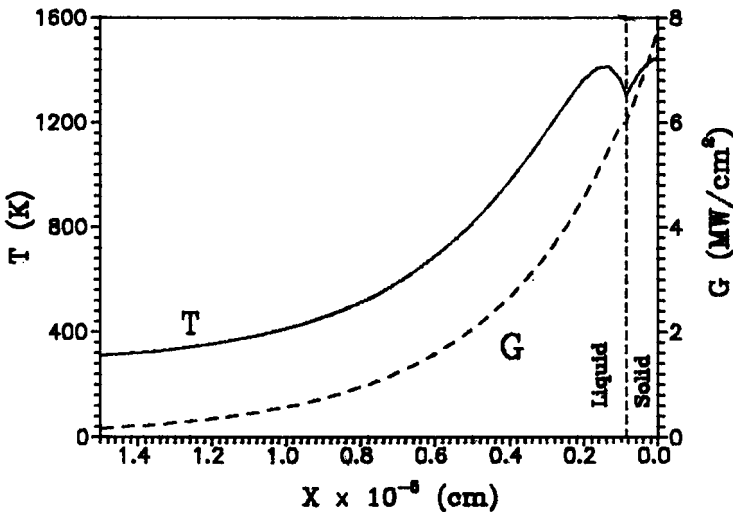
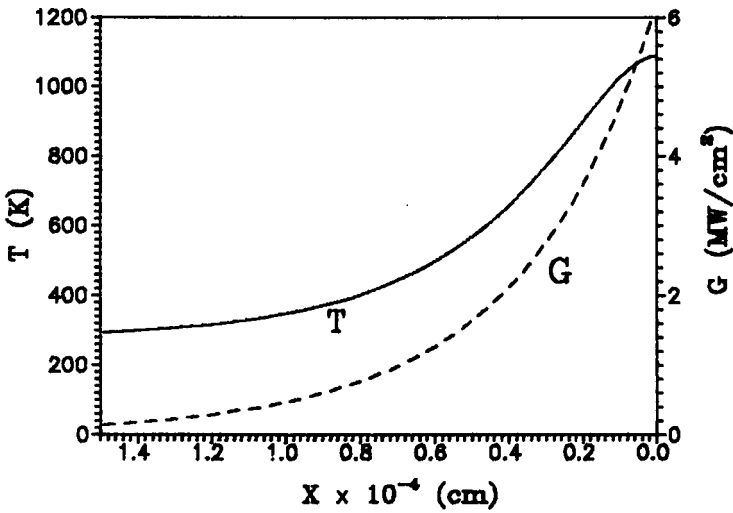


Рис.6,7 Пространственные профили интенсивности излучения $G(x)$ и температуры $T(x)$ в моменты до и после плавления, при объемном выделении энергии с $I_v = 3000 \text{ A}$

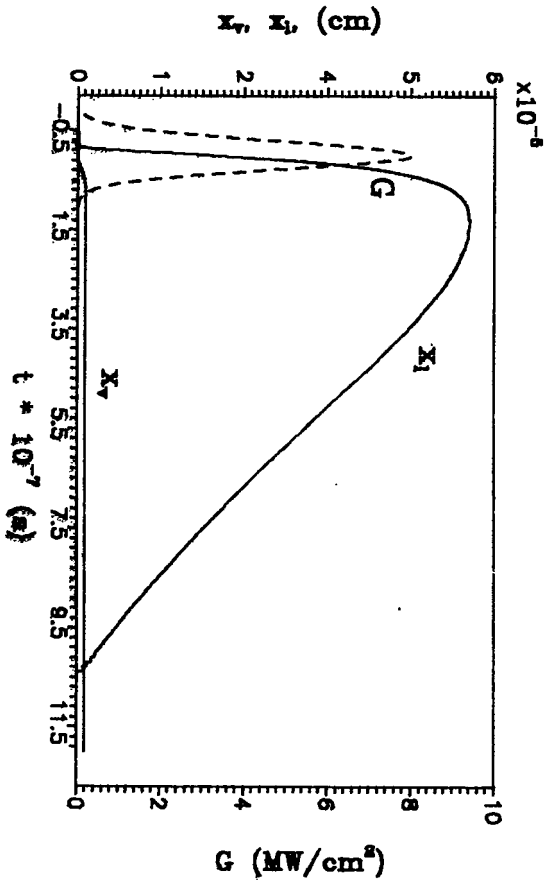
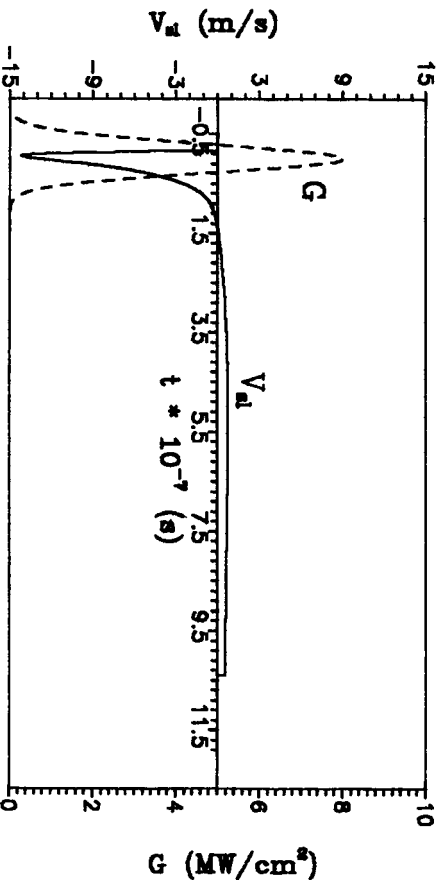


Рис.8,9 Временная развертка скорости v_1 ; (в) в толщине жидкой фазы при $I_0 = 3000$ А



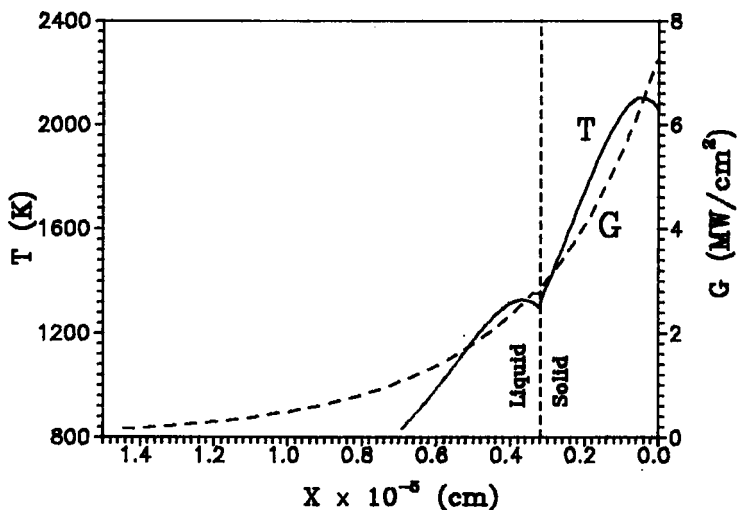


Рис.10 Пространственные профили интенсивности $G(x)$ и температуры $T(x)$ в момент развитого испарения.

W_s и W_l приводит к резкому увеличению скорости плавления, максимальное значение которой $|v_{sl}^{max}| \approx 14$ м/с, рис. 8, превосходит более чем в два раза соответствующее значение $|v_{sl}^{max}|$ в случае поверхностного источника, рис.2. Высокие значения v_{sl} приводят к быстрому росту жидкой фазы, рис.9, в которой поглощается все большая доля лазерного излучения. Перегрев твердой фазы при этом уменьшается вплоть до полного исчезновения.

Разогрев жидкой фазы вызывает интенсивное поверхностное испарение, под влиянием которого с учетом объемного выделения энергии в глубине жидкой фазы начинает формироваться второй температурный максимум, рис.10. При определенном соотношении параметров оба максимума могут наблюдаться одновременно, рис.10. Описание поверхностного испарения в рамках однофазного варианта задачи Стефана имеет свои особенности. Одна из них заключается в том, что при рассмотрении кинетики испарения температура на поверхности раздела фаз не фиксируется, поэтому в жидкой фазе перегретыми оказываются не только приповерхностный объем, но и облучаемая поверхность. Вторая особенность состоит в том, что метастабильность объема жидкости, в отличие от перегрева твердой фазы, не вызывает ускорения движения фронта испарения. Уменьшение скорости испарения при объемном перегреве (по сравнению с максимальной скоростью испарения при поверх-

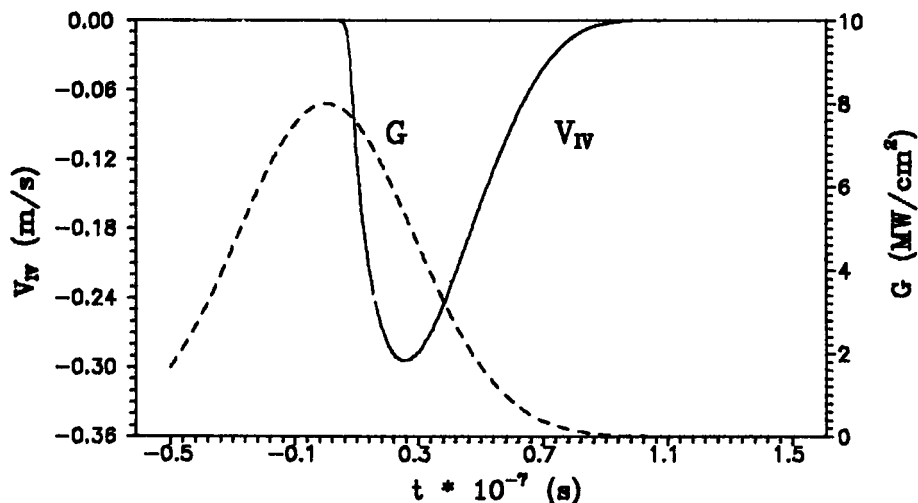


Рис.11 Временные зависимости интенсивности $G(t)$ и скорости испарения v_{iv} при $l_v = 3000 \text{ \AA}$.

ностном источнике энергии $|v_{iv}^{max}|$ ниже примерно на порядок, рис.11, и равна 0.2 м/с) связано с уменьшением температуры поверхности T_{sr} , рис.12, из-за распределения энергии излучения в объеме вещества, определяемого длиной свободного пробега кванта l_v . Уменьшение скорости испарения v_{iv} означает также уменьшение его влияния на процессы в целом, и ослабление взаимодействия с процессом плавления, в частности.

Вместе с тем, аккумуляция энергии в приповерхностном слое материала к сильно растянутому во времени процессам плавления – кристаллизации и испарения. Так, испарение начинается после прохождения максимума $G(t)$ и продолжается при уменьшении интенсивности $G(t)$ более чем на порядок. В результате профили скорости $v_{iv}(t)$, рис.11, и давления $P_{sr}(t)$, рис.13, сильно сдвинуты вправо относительно максимальной интенсивности. Процесс плавления продолжается еще длительное время после окончания лазерного импульса. Характерной особенностью процесса затвердевания является чрезвычайно низкая (по сравнению с режимом поверхностного воздействия) скорость распространения фазового фронта $v_{sl}^{max} \approx 0.55 \text{ м/с}$, рис.8. В итоге процесс плавления – кристаллизации характеризуется сильно асимметричной по амплитуде и времени кривой $v_{sl}(t)$, рис.8. По амплитуде кривая $v_{sl}(t)$ имеет почти униполярную форму. Низкие скорости плавления и кристалли-

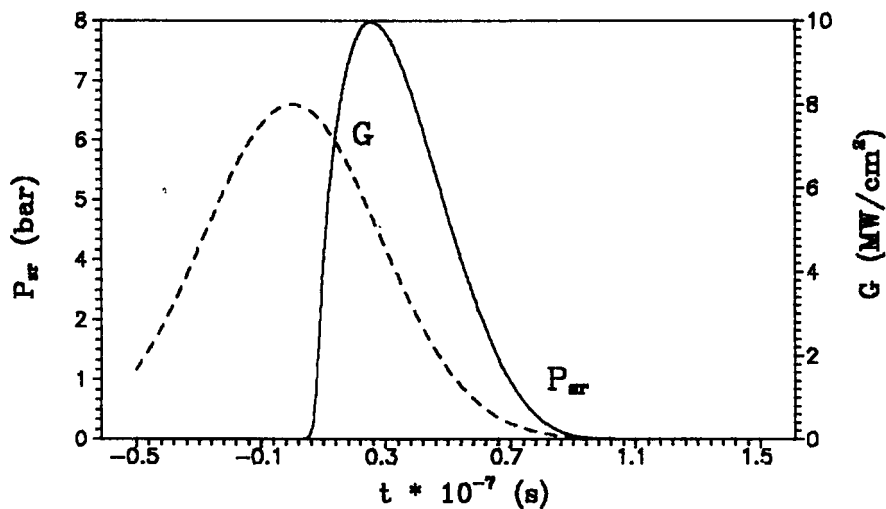
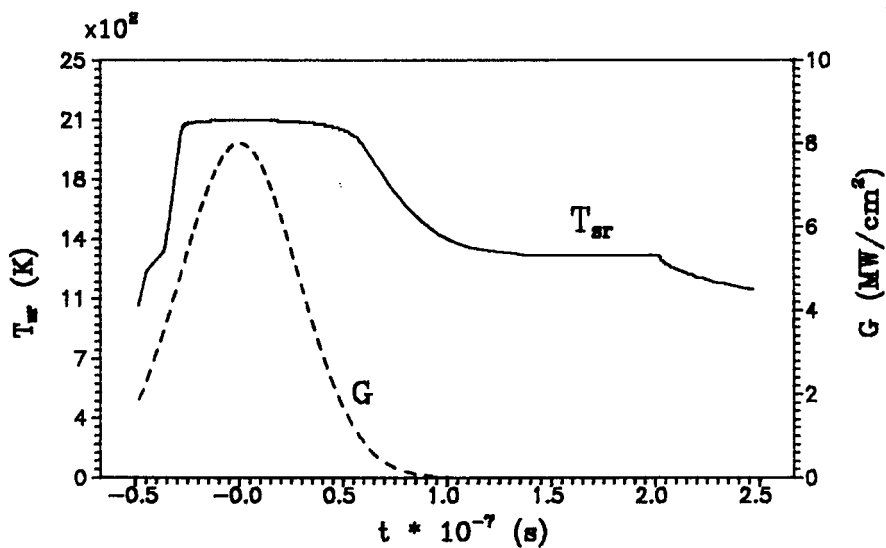


Рис.12,13 Временные зависимости $G(t)$, температуры $T_s(t)$ и давления $P_s(t)$ на поверхности.

зации обеспечивают необычайно длительное время существования жидкой фазы $\Delta t \sim 1 \text{ мкс}$.

Общие тенденции. Для выявления общих тенденций влияния метастабильных состояний на динамику фазовых переходов проанализируем воздействие лазерного излучения в широком диапазоне изменения длин свободного пробега l_ν . С этой целью была выполнена серия расчетов, в которых l_ν варьировалось от $l_\nu = 0$ до $l_\nu = 5 \cdot 10^3 \text{ А}$. Результаты моделирования представлены в графическом виде на рис. 14 – 25. Их анализ позволил установить следующие закономерности. Фазовые переходы при поверхностном воздействии $l_\nu = 0$ связаны только с одним метастабильным состоянием – перегревом испаряющейся поверхности. В этом режиме отмечаются наиболее высокие скорости испарения $|v_{iv}^{max}| \approx 1.5 \text{ м/с}$, рис. 14, кристаллизации $v_{sl}^{max} \approx 2 \text{ м/с}$, рис. 15, и наиболее сильный вынос вещества за счет испарения $x_v^{max} \approx 800 \text{ А}$, рис.16. Плавление имеет наиболее низкую скорость, рис.17. Соотношение этих скоростей определяет наименьшие толщины жидкой фазы, рис.18, и времена ее существования, рис.19.

Смена механизма диссипации энергии с поверхностного $l_\nu = 0$ на объемный $l_\nu > 0$ приводит к качественным изменениям поведения основных процессов в зоне облучения. Изменения эти определяются появлением новых метастабильных состояний, связанных с перегревом приповерхностных слоев твердой и жидкой фаз. Перегревы обеих фаз формируются под влиянием фазовых превращений. Величины их определяются скоростями v_{iv} , v_{sl} , теплофизическими и оптическими свойствами вещества. На рис.20, 21 показаны максимальные значения температуры объемных перегревов твердой и жидкой фаз $\Delta T_{s,l}^{max}$, глубины их залегания $\Delta x_{s,l}$, рис.22, 23, и времени существования $\Delta t_{s,l}^{ex}$, рис.24, 25.

Как уже отмечалось, перегрев твердой фазы формируется процессом плавления. Величина его растет с ростом длины пробега l_ν и скорости v_{sl} : $\Delta T = L_m v_{sl} l_\nu / \lambda$. В свою очередь, увеличение перегрева вызывает дополнительное ускорение плавления. В результате все величины, характеризующие перегрев твердой фазы, носят возрастающий характер, рис.20, 22, 24, при увеличении l_ν . Максимальные значения их достигаются при $\kappa_\nu = 5 \cdot 10^4 \text{ с м}^{-1}$, $\Delta T_s^{max} = 155^\circ \text{ К}$, $\Delta x = 800 \text{ А}$, $\Delta t_s \sim 60 \text{ нс}$

В то же время увеличение области выделения энергии вызывает уменьшение температуры поверхности T_{sr} , и, как следствие, уменьшение скорости испарения v_{iv} , рис.14. Тем самым оказывается, что воздействия двух основных параметров, формирующих объемный перегрев жидкой фазы, направлены в противоположные стороны. Как показали расчеты, ускорение за счет метастабильного состояния жидкости не успевает компенсировать уменьшение скорости испарения, вызываемого снижением температуры поверхности.

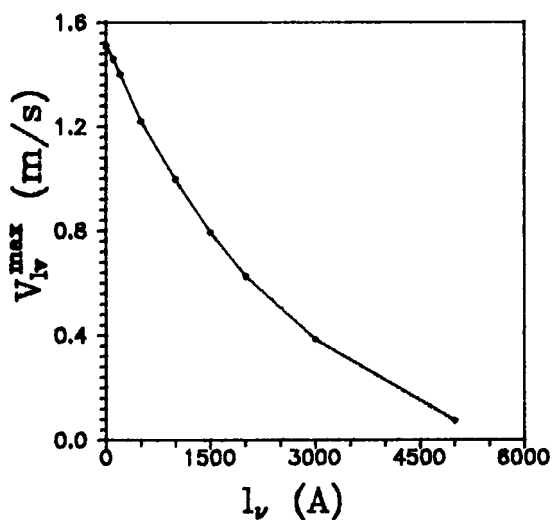


Рис.14 Зависимость максимальной скорости испарения от длины свободного пробега кванта l_{ν}

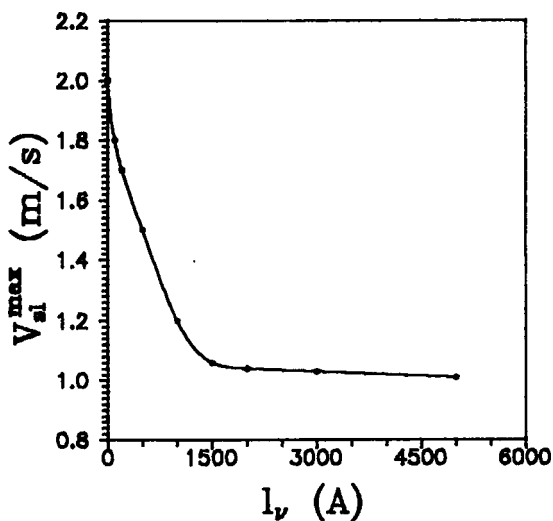


Рис.15 Зависимость максимальной скорости кристаллизации от длины свободного пробега кванта l_{ν}

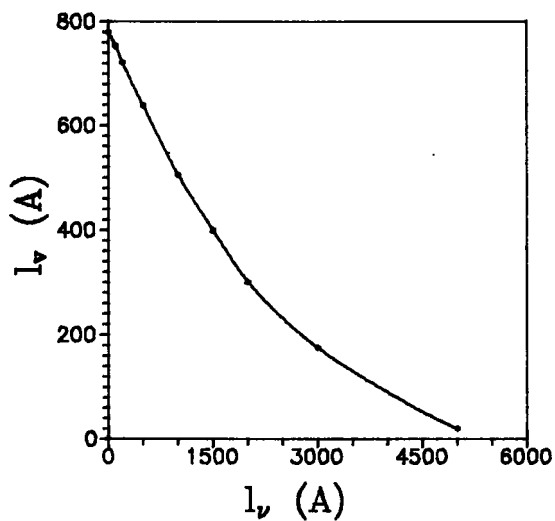


Рис.16 Толщина испаренного слоя в зависимости от длины свободного пробега кванта l_v

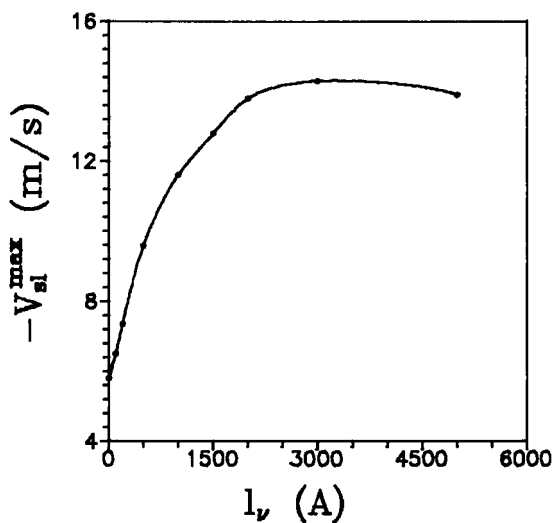


Рис.17 Зависимость максимальной скорости плавления от длины свободного пробега кванта l_v

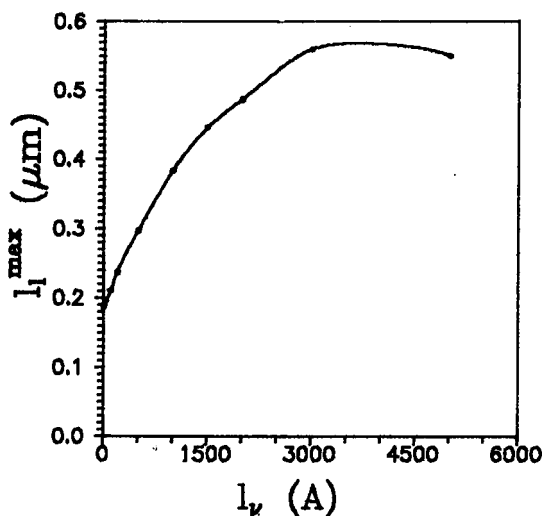


Рис.18 Зависимость максимума толщины жидкой фазы от длины свободного пробега кванта l_v

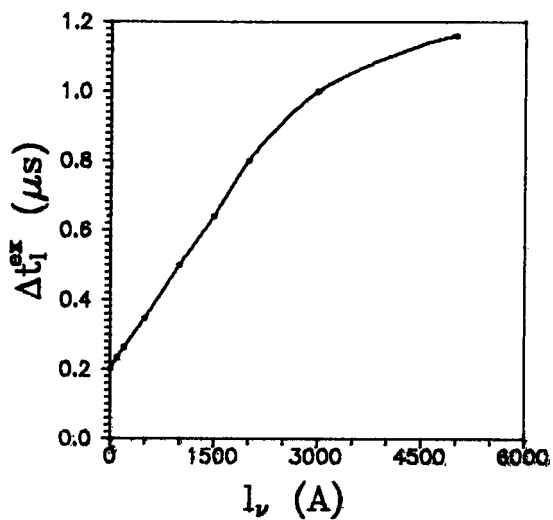


Рис.19 Зависимость времени существования жидкой фазы от длины свободного пробега кванта l_v

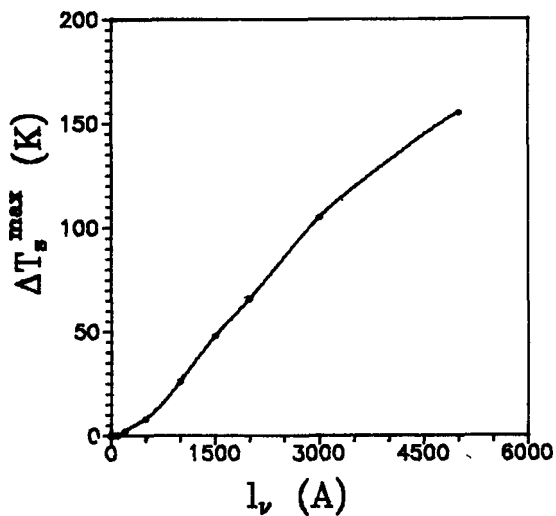


Рис.20

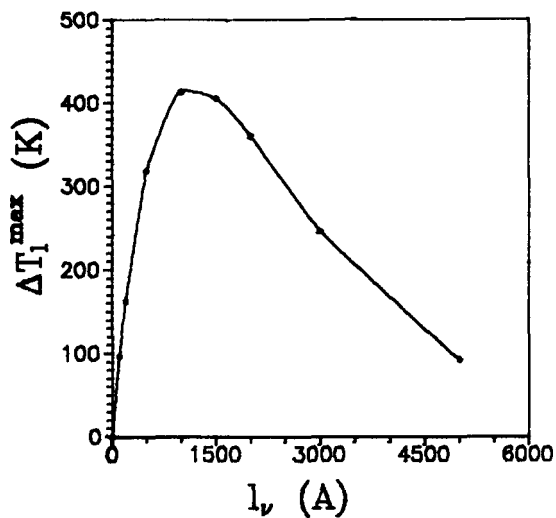


Рис.21

Рис.20,21 Максимальные значения перегревов твердой и жидкой фаз.

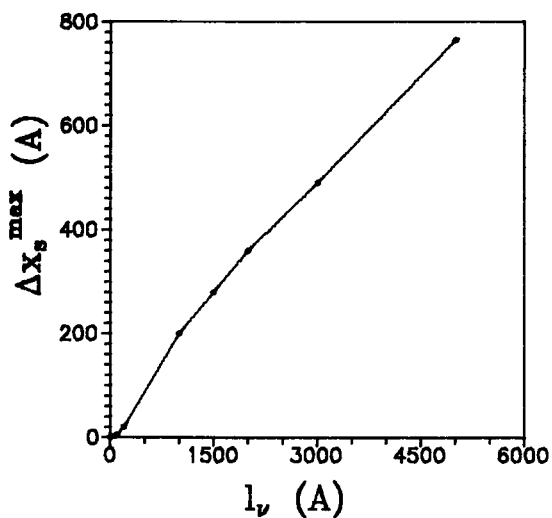


Рис.22

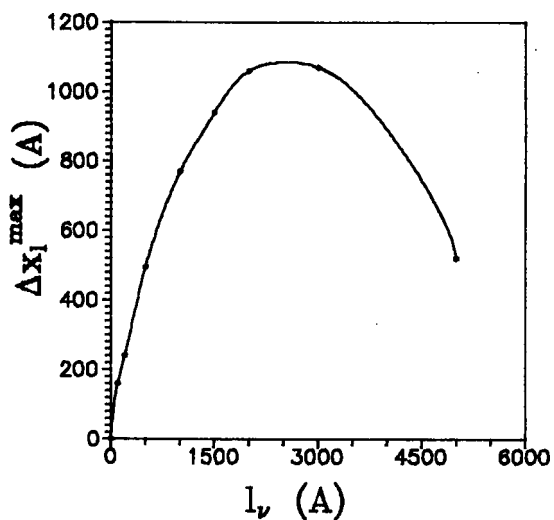


Рис.23

Рис.22,23 Глубины расположения приповерхностных максимальных перегревов твердой и жидкой фаз.

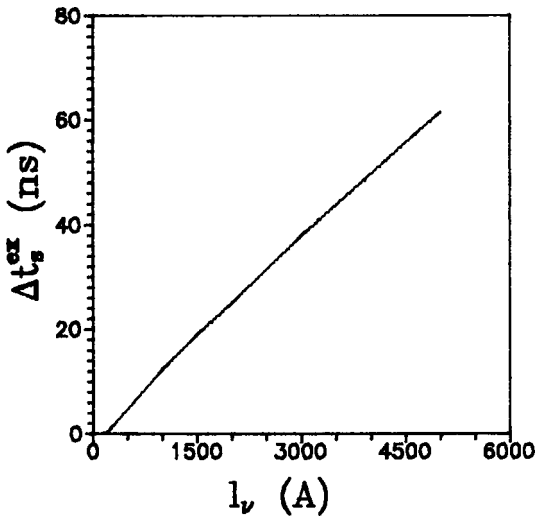


Рис.24

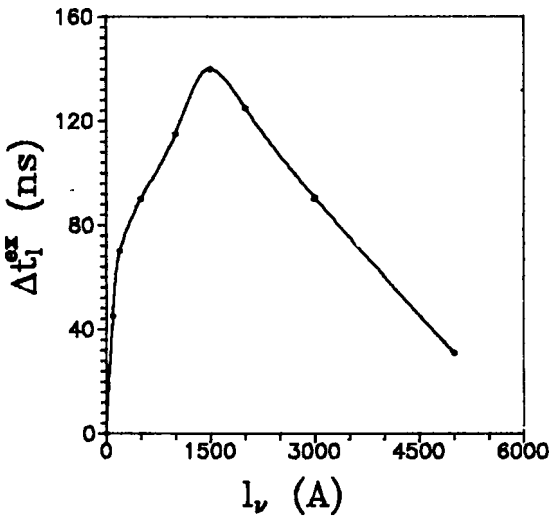


Рис.25

В результате все зависимости, рис. 21, 23, 25, характеризующие объемный перегрев жидкости $\Delta T_{sr}^{max}(l_v)$, $\Delta x_l(l_v)$, $\Delta t^{ex}(l_v)$, в диапазоне $l_v = 1000 \div 3000 \text{ \AA}$ проходят через экстремальные значения: $\Delta T_{sr}^{max}(l_v = 1000 \text{ \AA}) \cong 400^\circ\text{K}$, $\Delta x_l(l_v = 3000 \text{ \AA}) \cong 0.1 \text{ мкм}$, $\Delta t^{ex}(l_v = 1500 \text{ \AA}) \cong 140 \text{ нс}$. Столь высокие значения температуры ΔT_{sr}^{max} и времени существования Δt^{ex} перегрева значительно увеличивают вероятность взрывного распада метастабильной фазы. В экспериментальных исследованиях это явление может проявляться как вынос вещества в виде мелких капель.

Анализ временных зависимостей температуры поверхности $T_{sr}(t)$, и скоростей испарения v_{lv}^{max} , рис.14, плавления v_{sl}^{max} , рис.17, кристаллизации v_{sl} , рис.15, показывает, что при объемном выделении энергии для квантов с $l_v \geq 1000 \text{ \AA}$ плавление становится доминирующим процессом, что в конечном итоге определяет необычно большие времена существования жидкой фазы $\Delta t_l^{ex} \sim 1.2 \text{ мкс}$, рис. 19. Вместе с тем расчеты показывают, что в наносекундном диапазоне воздействия глубина жидкой фазы существенно меньше 1 мкм , рис.18, что явно недостаточно для реализации развитого гидродинамического движения и связанных с ним гидродинамических неустойчивостей. Это дает основания предположить, что основные причины возникновения неустойчивых режимов распыления сверхпроводящих керамик связаны с метастабильными состояниями в конденсированной среде.

§ 3. Заключение

Выполненный, в рамках принятых предположений, теоретический анализ позволил установить качественное изменение поведения процессов в зоне облучения с изменением длины свободного пробега кванта.

Математическое моделирование показывает, что реализация режимов лазерного распыления материалов с объемным выделением энергии приводит к объемным перегревам твердой и жидкой фаз. При фиксированных значениях интенсивности $G(t) = G \exp\left(-\left(t/\tau\right)^2\right)$ и длительности воздействия $\tau = 40 \text{ нс}$, $G = 10^7 \text{ Вт/см}$ максимальные значения перегрева твердой фазы превышают сотню градусов, а жидкой несколько сот градусов. Времена существования метастабильных состояний соответственно составляют десятки и сотни наносекунд. Метастабильность твердой фазы приводит к доминированию процесса плавления, которое в совокупности с уменьшением влияния кристаллизации и испарения увеличивает в 5 – 6 раз время жизни жидкой фазы. В тоже время с ростом длины пробега кванта существенно возрастает вероятность взрывного распада метастабильных состояний в жидкой фазе.

Сравнение результатов теоретического анализа с экспериментальными данными по лазерному воздействию на сверхпроводящие керамики [1 – 5]

свидетельствует о том, что для реализации режимов устойчивого распыления предпочтительнее использовать лазеры с короткими длинами волн, например, эксимерные с $\lambda = 0.2 \div 0.4$ мкм, у которых механизм диссипации близок к поверхностному.

Список литературы

1. *K.Hubler, G.Editor. Pulsed Laser Deposition. //MRS Bulletin. 1992, v.XVII, No 2, pp. 26 - 29.*
2. *Cheung, J.Horwitz. Pulsed Laser Deposition. History and Laser - Target Interations. //MRS Bulletin. 1992, v.XVII, No 2, pp. 30 - 36.*
3. *Fogarassy, C.Fuchs, S. de Unamuno, J.Perriere, F.Kerherv. High Tc Superconducting Thin Film Deposition by Laser Induced for Ward Transfer. //Materials and Manufacturing Processes. 1992, 7(1), pp. 31 - 51.*
4. *Z.M.Zhang, B.I.Choi, T.A.Le, M.I.Flik, M.P.Siegal, J.M.Phillips. Infrared Refractive Index of Thin $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ Superconducting Films. Transactions of the ASME. //J. Heat Transfer. 1992, v. 114, pp. 644 - 652.*
5. *D.B.Chrisey, A.Inam. Pulsed Laser Deposition of High Tc Thin Superconducting Films for Electronic Device Applications. //MRS Bulletin. 1992, v.XVII, No 2, pp. 37 - 43.*
6. *J.C.Mazwell. Scientific Papers. / Ed. W.D.Niven. New York: Dover, 1965.*
7. *М. Фольмер. Кинетика образования новой фазы. / Пер. с немец. М. Наука, 1986.*
8. *Дж. Гиббс. Термодинамические работы. / Пер. с англ. М. Гостехиздат, 1950.*
9. *Современная кристаллография. Образование кристаллов. Т.3. / Под ред. Б.К.Вайнштейна. М. Наука, 1980, 408 с.*
10. *F.Spaepen, D.Turnbull. Laser Annealing of Semiconductors. / Ed. by J.M.Poate and J.W.Mayer. Academic, New York, 1982, pp. 15 - 42.*
11. *К.А. Jackson. Treatise on Solid State Chemistry. / Ed. by N.B.Hannay. Plenum, New York, 1975, v. 5, pp. 233 - 282.*

12. *J. Y. Tsao, M. J. Aziz, M. O. Thompson, P. Peercy.* Asymmetric Melting and Freezing Kinetics in Silicon. //Phys. Rev. Lett. 1986, v. 56, No 25, pp. 2712 - 2715.
13. *M. D. Klude, J. R. Ray.* Velocity versus Temperature Relation for Solidification and Melting of Silicon: A Molecular - Dynamics Study. //Phys. Rev. B, 1989, v. 39, No 3, pp. 1738 - 1746.
14. *C. J. Tuzczak, J. R. Ray.* Assymetric Crystallization and Melting Kinetics in Sodium: A Molecular - Dynamics Study. //Phys. Rev. Lett., 1990, v. 64, No 11, pp. 1278 - 1281.
15. *П.В. Бреславский, В.И. Мажукин, А.А. Самогин.* О гидродинамическом варианте задачи Стефана для вещества в метастабильном состоянии. //Докл. АН СССР, 1991. т. 320, N 5, с. 1088 - 1092.
16. *D. J. Broer, L. Vriens.* Laser - Induced Optical Recording in Thin Films. //Appl. Phys. A., 1983, v. 32, pp. 107 - 123.
17. *P. Kivits, R. D. Bont, P. Zalt.* The Hole Formation Process in Tellurium Layers for Optical Data Storage. //Thin Solid Films. 1982, v. 87, pp. 215 - 231.
18. *А.Г. Горелик, Н.В. Дубинин, В.И. Мажукин, Х.А. Музафаров* О механизме разрушения полимеров лазерным излучением. //Препринт Всесоюзного Центра Математического моделирования АН СССР, N 7, 1991, 14 с.
19. *Дж. Кристиан.* Теория превращений в металлах и сплавах. / М. Мир, 1978, т. 1, 806 с.
20. *Я.И. Френкель.* Кинетическая теория жидкостей. / Л. Наука, 1975, т. 3, 592 с.
21. *S. Williamson, C. Mourou, J. C. H. Li.* Time - resolved Laser - Induced Phase Transformation in Aluminum. //Phys. Rev. Lett., 1984, v. 52, No 26, pp. 2364 - 2367.
22. *Ж.И. Алферов, Ю.В. Ковальчук, Ю.В. Погорельский, О.В. Смольский.* Воздействие пикосекундных лазерных импульсов на Si и полупроводниковые соединения A^3B^5 . //Известия АН СССР, Серия физическая. 1985. т. 49, N 6, стр. 1069 - 1075.
23. Proceeding of the Institute of General Physics Academy of Sciences of the USSR. Effect of Laser Radiation on Absorbing Condensed Matter. /Serie editor: A.M. Prokhorov. Nova Science Publishers, Commuck, New York, 1990. 203 p.
24. *P. K. Wu.* Radiation - Induced Acoustic Waves in Water. //AIAA J. 1977, V. 15, pp. 1809 - 1811.
25. *M. W. Sigrist, F. K. Kneubuhl.* Laser - Generated Stress Waves in liquids. //J. Acoust. Soc. Amer., 1978, v. 64, pp. 1652 - 1663.
26. *A. A. Samokhin, A. B. Uspensky.* On the Manifestation of Spinodal Singularities in Radiation - Induced Vaporization of Liquids. //Phys. Rev. Lett. A. 1979, v. 73, pp. 391 - 392.

27. *V.P Skripov. Metastable Liquids . /Israel Program for Scientific Translation Jerusalem, London, 1974, pp.272.*
28. *H.S.Carslaw, J.C.Jaeger. Conduction of Heat in Solids. /Oxford, Clarendon Press.*
29. *Л.Д.Ландау, Е.М. Лифшиц. Статистическая физика. Часть I. М.- Наука, 1976, 584 с.*
30. *K.A. Jackson. In Surface Modification and Alloying by Laser, Ion and Electron Beams. /Ed. by J.M. Poate, G. Foti, D.C. Jacobson. Plenum, New York, 1983, pp. 51 – 79.*
31. *J. Q. Broughton, G. H. Gilmer, and K.A.Jackson. //Phys.Rev.Lett.1982,49,p.1496*
32. *J.J.Masters. Problem of Intense Surface Heating of a Slab Accompanied by Change of Phase. //J.Appl.Phys. 1956 vol.27, pp477 – 484.*
33. *D. Crout. An Application of Kinetic Theory to the Problems of Evaporation and Sublimation of Monoatomic Cases. //J. Math. Phys. 1936, v. 15, pp. 1 – 54.*
34. *С.И. Анисимов, Я.А. Имас, Г.С. Романов, Ю.В. Ходыко. Действие излучения большой мощности на металлы. /М.- Наука, 1970, 272 с.*
35. *C.J. Knight. Theoretical Modeling of rapid surface vaporisation with back pressure. //AIAA Journ. 1979, v.17, No 5, pp. 519 – 523.*
36. *H. Aden, E. Beyer, G. Herziger. Laser – Induced Vaporization of Metal as a Riemann Problem. //J. Phys. D: Appl. Phys. 1990, v. 23, pp. 655 – 661.*
37. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И. О численном решении задачи Стефана на адаптивных сетках. //Диф. уравнения, 1987, т. 23, N 7, с. 1154 – 1160.*
38. *Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин. Об одном подходе к построению адаптивных разностных сеток. //ДАН СССР, 1988, т.298, N 1, с. 64 – 68.*
39. *В.И.Мажукин, Л.Ю.Такоева. Принципы построения динамически адаптирующихся к решению сеток в одномерных краевых задачах. //Мат. моделирование, 1990, т. 2, N 3, с. 101 – 118.*
40. *П.В.Бреславский, В.И.Мажукин, Л.Ю.Такоева. Математическое моделирование лазерного плавления и испарения однородных материалов. Пакет LASTEC – 1. //Препринт Всесоюзного Центра Математического моделирования АН СССР, N 22, 1991 г., 46 с.*
41. *V.I.Mashukin, U.Semmler, P.V.Breslavskij, L.Ju. Takoeva. Mathematische Modellierung des Laserschmelzens und – verdampfens homogener Materialien. //Preprint Technische Universitat Chemnitz, Nr. 208/5. Jg./1991 .*
42. *V.I. Mashukin, U. Semmler, P.V. Breslavskij, L.Ju. Takoeva. Das Programmpaket LASTEC – 1 zur numerischen Simulation von Lasermaterialbearbeitungsprozessen. //Preprint Technische Universitat Chemnitz, Nr. 209/5. Jg./1991 .*

43. *R.K. Williams, R.S.Graves, D.M.Kroeger, G.C.Marsh, and J.O.Scarbrough, J.Brynestad.* Ambient Temperature Thermal Conductivity of $YBa_2Cu_3O_{7-x}$. //J. Appl. Phys.,1989, 66(12), pp. 6181 - 6184.
44. *J.Orenstein, G.A.Thomas, F.J.Millis, S.L.Cooper, D.H. Rapkine, T.Timusk, L.F.Schneemeyer, and J.V.Waszczak.* Frequency - and Temperature - Dependent Conductivity in $YBa_2Cu_3O_{6+x}$ Crystals //Phys.Rev.B, 1990, vol.42, pp. 6342 - 6362.
45. *K.E.Goodson, M.I.Flik.* Electron and Phonon Thermal Conduction in Epitaxial High - T_c Superconducting Films. //ASME J. Heat Transfer, 1993, vol. 115, pp. 17 - 25

Институт Математического
Моделирования РАН

Поступила в редакцию
05.07.93