

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том 7 номер 12 год 1995

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИИ В ЗАДАЧАХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

© П.В. Бреславский, В.И. Мажукин

Институт Математического Моделирования РАН

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований

Рассматривается применение метода динамической адаптации для численного решения системы нестационарных уравнений гиперболического типа. В основу метода положена идея перехода к произвольной нестационарной системе координат, который позволяет процесс определения численного решения и механизм перестройки расчетной сетки сформулировать в виде единой дифференциальной модели.

На примере численного решения модельной задачи об ускоряющемся поршне рассматриваются два способа расчета ударных волн с помощью динамической адаптации. В первом поверхность разрыва представляется в виде области с большими градиентами, в которой концентрируются узлы сетки. Во втором с помощью соотношений Рэнкина-Гюгонио разрыв выделяется явным образом. Оба способа не используют искусственную вязкость и позволяют проводить расчеты на грубых сетках с общим числом узлов $N \approx 10 - 20$.

METHOD FOR DYNAMIC ADAPTATION IN PROBLEMS OF GAS DYNAMICS

P. V. Breslavski, V. I. Mazhukin

Institute for Mathematical Modelling

Application of a method for dynamic adaptation to numerical solution of unsteady-state hyperbolic equations is considered. The basic for given method is a transition to arbitrary nonstationary coordinate system. This allows to formulate a unified difference model to determine both numerical solution and grid movement.

Two different techniques for computation of shock waves by means of dynamic adaptation are examined by the example of numerical solution for a model problem which describes accelerating piston motion in gas. The first technique enables the discontinuity surface to show up as a region of high gradients which grid nodes are concentrated in. The second one permits to separate the discontinuity explicitly by means of Rankine-Hugoniot equations. Both of these techniques don't use artificial viscosity and allow to proceed computations when using grids with small number of nodes ($N \approx 10 - 20$).

Введение

Основной проблемой вычислительной гидродинамики является разработка быстрых и экономичных методов численного решения уравнений, описывающих движение газа, в задачах, представляющих практический интерес. Конечно-разностные методы расчета приводят к аппроксимации дифференциальных уравнений газовой динамики большими системами нелинейных алгебраических уравнений. Численное решение этих систем осуществляется, как правило, итерационными методами [1]–[3] и требует для своей реализации мощных компьютеров.

Имеется две возможности повышения эффективности численных алгоритмов. Первая - традиционная - связана с повышением скорости сходимости итерационных процедур [4]–[6]. Вторая возможность связана с уменьшением числа узлов сетки, необходимых для получения решения с заданной точностью. Для достижения этой цели широкое применение находят различные методы адаптации расчетных сеток, см. обзоры [7]–[9] и цитируемую в них литературу.

Как показывает опыт решения нелинейных уравнений теплопроводности [10, 11], Бюргерса [12] и системы уравнений, описывающей диффузионный механизм горения [13], достичь значительного сокращения числа узлов (на 1-2 порядка) можно с помощью метода динамической адаптации.

Уравнения нестационарной газовой динамики имеют ту особенность, что относятся к гиперболическому типу уравнений и допускают появление внутренних разрывов, таких как ударные волны и контактные границы. Для расчетов разрывных решений в настоящее время используется два подхода, основывающихся либо на методах сквозного счета (однородные схемы) [14]–[17], либо на методах явного выделения сильных и слабых разрывов [18]–[20]. Для подавления паразитных колебаний в однородных схемах может использоваться искусственная вязкость [14, 15]. В зависимости от конкретной ситуации каждый из названных подходов имеет свои сильные и слабые стороны. Расчеты ударных волн с помощью однородных схем приводят к "разглаживанию" разрывов на несколько ячеек сетки. В зависимости от качества разностной схемы ширина зоны "разглаживания" составляет 4-6 ячеек, что в ряде случаев может привести к существенной потере точности. Выделение области разрыва приводит не только к нарушению принципа однородности разностной схемы, что не всегда приемлемо из-за увеличения объема вычислений, но и связано с непростой проблемой построения вычислительных алгоритмов в задачах с подвижными границами [19]. Отметим, что одна из наиболее сложных проблем, возникающих при численном решении нестационарных задач газовой динамики с явным выделением разрывов, связана с отсутствием априорной информации об их пространственно-временном положении.

Дополнительные возможности для численного решения газодинамических задач появляются в связи с развитием методов построения адаптирующихся к решению сеток. Отметим, что в той или иной мере отдельные элементы адаптации использовались и используются при решении практически всех задач. Однако необходимое осознание роли и важности адаптации на уровне таких основополагающих понятий, как аппроксимация, устойчивость и сходимость, произошло, судя по количеству публикаций, именно в последнее десятилетие. В настоящее время исследования, связанные с конструированием и генерацией расчетных сеток, а также управляемым распределением узлов, выделяются в самостоятельный раздел вычислительной математики со своими понятиями, определениями, методологией и классификацией. Учитывая высокие темпы развития данного направления, пока затруднительно, по крайней мере в методах адаптации нестационарных задач,

определить подход, которому следовало бы отдавать явное предпочтение.

Сформулированный несколько лет назад в работах [10, 13, 21] метод динамической адаптации предназначен для решения широкого класса задач математической физики [10]–[13], [22]–[25] и находится в стадии интенсивного развития. Первые попытки применения его к решению уравнений газовой динамики были выполнены в работах [21, 26]. Местоположение и момент образования ударной волны в [21] определялись по схлопыванию одной из ячеек сетки. Область схлопывания полагалась газодинамическим разрывом, на котором выписывались соотношения Рэнкина-Гюгио. Динамическая адаптация производилась при непостоянном числе узлов и была связана с процедурой зарождения и уничтожения узлов сетки. В [26] условия Гюгио не использовались, а разрывное решение представлялось в виде области с большими градиентами.

В данной работе на примере задачи об ускоряющемся поршне рассматривается применение метода динамической адаптации к проблемам возникновения и распространения в невязком нетеплопроводном газе ударных волн.

Основными целями данной работы являются:

- исследование влияния на решение форм представления исходных уравнений газовой динамики в переменных новой системы координат;
- исследование возможностей динамической адаптации в однородных и неоднородных алгоритмах решения.

Для достижения указанных целей уравнения газовой динамики при переходе к произвольной нестационарной системе координат представляются в виде двух различающихся по форме записи систем, а расчеты выполняются двумя способами: по схеме сквозного счета без искусственной вязкости и по неоднородной схеме с явным выделением сильного газодинамического разрыва. Полученные решения сравниваются между собой и с автоматическим решением. По максимальному шагу интегрирования оценивается эффективность обоих способов расчета.

В схеме сквозного счета газодинамический разрыв явным образом не выделяется, а рассматривается как область с большими градиентами, под влиянием которых в этой области концентрируются узлы сетки.

В расчетах с явным выделением скачков решения на разрыве выписываются соотношения Рэнкина-Гюгио.

1. Уравнения газовой динамики в произвольной нестационарной системе координат

Для описания движения сплошной среды в настоящее время широко используются два подхода, связанных с выбором системы координат. В первом - эйлеровом - математическое описание гидродинамических процессов осуществляется в неподвижной (или лабораторной) системе координат. Во втором - лагранжевом - математическая формулировка задач производится в нестационарной системе координат, скорость движения которой обычно отождествляется с гидродинамической скоростью.

1.1. Эйлеровы и лагранжевы переменные. Полная система уравнений газовой динамики, описывающая одномерное неустановившееся движение среды, в переменных Эйлера (x, t) в дивергентной форме имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(P + \rho u^2) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}(P u + \rho u E) = 0, \quad (3)$$

$$E = \mathcal{E} + \frac{u^2}{2},$$

где u , ρ , P - скорость, плотность и давление газа; \mathcal{E} , E - внутренняя и полная энергии газа. В ряде случаев вместо уравнения (3) используется недивергентное уравнение для внутренней энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathcal{E}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \mathcal{E}) + P \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Эта же система в переменных Лагранжа (a, t_L) , связанных с переменными Эйлера (x, t) следующими соотношениями:

$$\frac{\partial x}{\partial t_L} = u, \quad \frac{\partial x}{\partial a} = \Delta, \quad (5)$$

принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t_L}(\rho \Delta) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_L}(u \rho \Delta) + \frac{\partial P}{\partial a} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_L}(E \rho \Delta) + \frac{\partial}{\partial a}(P u) = 0, \quad (8)$$

или, с использованием вместо (8) недивергентного уравнения,

$$\frac{\partial}{\partial t_L}(\mathcal{E} \rho \Delta) + P \frac{\partial u}{\partial a} = 0. \quad (9)$$

С физической точки зрения эти системы эквивалентны, но в ряде проблем система уравнений газовой динамики в переменных Лагранжа для одномерного нестационарного случая имеет определенные преимущества. В этих переменных более естественным образом выполняются расчеты с одним или несколькими контактными разрывами. В некоторых задачах в лагранжевых переменных удобнее формулировать граничные условия.

Наиболее просто и компактно дифференциальные уравнения газовой динамики выглядят в лагранжевых массовых переменных (s, t_L) [15]:

$$\frac{\partial x}{\partial t_L} = u, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_L} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_L} = -\frac{\partial P}{\partial s}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t_L} = -\frac{\partial}{\partial s}(Pu), \quad (13)$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t_L} = -P \frac{\partial u}{\partial s}. \quad (14)$$

Переход от переменных Эйлера (x, t) к переменным Лагранжа (s, t_L) осуществляется посредством преобразования частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial t_L} = \frac{\partial}{\partial t} + \rho u \frac{\partial}{\partial x}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \rho(x, t).$$

Переход к лагранжевым массовым координатам позволяет осуществить простейшую адаптацию расчетной сетки, в результате которой узлы концентрируются в областях с высокой плотностью вещества. Благодаря отсутствию конвективных членов разностные схемы для уравнений газовой динамики в лагранжевых переменных обладают наименьшими диссипативными свойствами. Существенным ограничением лагранжевых массовых переменных является требование неизменности массы в рассматриваемой области.

1.2. Произвольная нестационарная система координат. Идея метода динамической адаптации состоит в переходе к произвольной нестационарной системе координат, в которой неизвестными являются не только сеточные функции, но и координаты узлов сетки. Проблема формулируется в виде единой дифференциальной модели, в которой часть уравнений описывает физические явления, а другая - динамику узлов сетки. В отличие от Лагранжева подхода скорость движения нестационарной системы координат заранее неизвестна, зависит от искомого решения и, лишь как частный случай, может совпадать со скоростью движения среды. Обратное преобразование задается в виде дифференциального уравнения в частных производных, из решения которого определяются координаты узлов. Уравнение составляется таким образом, что скорость движения узлов зависит от эволюции решения уравнений, описывающих физические процессы. Тем самым появляется возможность автоматической концентрации узлов в областях больших градиентов и явного выделения сильных, слабых и контактных разрывов.

Переход к произвольной нестационарной системе координат можно осуществить с помощью замены переменных общего вида $x = f(q, \tau)$, $t = \tau$, имеющей невырожденное обратное преобразование $q = \varphi(x, t)$, $\tau = t$. Частные производные в уравнениях заменяются при этом стандартным образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial f}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial q}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial q}, \quad (17)$$

где $\partial f / \partial \tau$ - скорость движения системы координат, подлежащая определению.

Известно [15]-[17], что дифференциальные уравнения газовой динамики как в переменных Эйлера, так и в переменных Лагранжа допускают различные формы записи, эквивалентные с математической точки зрения, то есть сводящиеся друг к другу с помощью равносильных преобразований. Однако с вычислительной точки зрения эквивалентность различных форм записи неочевидна, так как разностные схемы, аппроксимирующие эти уравнения, обладают различным качеством. В произвольной нестационарной системе координат формы записи уравнений газовой динамики отличаются большим разнообразием. Их можно представлять в нескольких видах как в дивергентной, так и в недивергентной форме. По внешнему виду уравнения газовой динамики могут напоминать либо систему в переменных Эйлера (1)-(4), либо в лагранжевых массовых переменных (10)-(14).

Первую форму записи можно получить, применяя формулы преобразования (16), (17) к системе (1)-(4) и вводя дополнительные соотношения

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = -Q, \quad (18)$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \psi. \quad (19)$$

В строго дивергентной форме уравнения газовой динамики в переменных (q, τ) имеют вид

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = -Q, \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi \rho) + \frac{\partial}{\partial q}(\rho(u + Q)) = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi \rho u) + \frac{\partial}{\partial q}(P + u \rho(u + Q)) = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi \rho E) + \frac{\partial}{\partial q}(P u) + \frac{\partial}{\partial q}(E \rho(u + Q)) = 0. \quad (23)$$

Уравнение внутренней энергии в новых переменных имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi \rho \mathcal{E}) + P \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}(\mathcal{E} \rho(u + Q)) = 0. \quad (24)$$

Уравнение (20) является уравнением обратного преобразования, в котором Q – некоторая пока неизвестная функция, явное выражение которой определяет конкретный вид преобразования координат. После того, как из некоторых соображений будет задана функция Q , это уравнение можно использовать для определения координат узлов сетки. В ряде задач уравнение (20) удобнее использовать в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = - \frac{\partial Q}{\partial q}, \quad (25)$$

который получается дифференцированием правой и левой частей уравнения (20) по $\partial/\partial q$. В двух частных случаях $Q = 0$ и $Q = -u$ система (20)-(23) трансформируется в систему уравнений газовой динамики в эйлеровых (1)-(3) и лагранжевых (5)-(8) переменных соответственно.

Вторую форму записи уравнений газовой динамики в переменных (q, τ) наиболее просто получить, применяя формулы преобразования (16)-(17) к системе (10)-(13), а вместо дополнительных соотношений (18), (19) используя следующие:

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = u - \frac{Q}{\rho}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\psi}{\rho}. \quad (27)$$

В строго дивергентной форме система уравнений газовой динамики принимает вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = - \frac{\partial Q}{\partial q}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\psi}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{Q}{\rho} - u \right) = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi u) + \frac{\partial}{\partial q}(P + Qu) = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi E) + \frac{\partial}{\partial q}(Pu) + \frac{\partial}{\partial q}(QE) = 0. \quad (31)$$

Для внутренней энергии \mathcal{E} уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi \mathcal{E}) + p \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}(Q \mathcal{E}) = 0. \quad (32)$$

В случае $Q = \rho u$ система (28)-(31) трансформируется в систему (1)-(3) в эйлеровых переменных, а при $Q = 0$ в систему (10)-(13) в лагранжевых массовых переменных.

Таким образом, получены две эквивалентные математические формулировки для задач газовой динамики в произвольной нестационарной системе координат. Заметим, что обе формы представления уравнений (20)-(24) и (28)-(32) уравнений газовой динамики в переменных (q, τ) можно также получить с помощью преобразования координат (16), (17), взяв за исходные уравнения (10)-(14) в лагранжевых переменных (s, t_L) . Обе математические модели содержат по одному дополнительному дифференциальному уравнению, служащему для определения координат узлов расчетной сетки. Тем самым в методе динамической адаптации процедура адаптации вводится на дифференциальном уровне. Формулировка адаптации на дифференциальном уровне приводит к расширению системы уравнений. Количество дополнительных уравнений равняется числу переменных, по которым ведется адаптация. Реализация метода динамической адаптации сводится к рассмотрению системы нелинейных уравнений, численное решение которых может быть выполнено известными методами.

Отметим особенности предлагаемого метода адаптации. Переход к нестационарной системе координат облегчает отслеживание и формулировку законов сохранения на подвижных границах и разрывных решениях. Формулировка математических проблем в произвольной системе координат обеспечивает методу адаптации универсальность и относительную простоту численной и программной реализации. Желаемый вид адаптации в любой нестационарной задаче (необязательно газодинамической), независимо от типа и количества дифференциальных уравнений, может быть легко достигнут с помощью задания соответствующей функции преобразования Q . Таким образом, выбор функции преобразования является важнейшим элементом метода динамической адаптации.

2. Выбор функции преобразования

Одним из наиболее важных требований, предъявляемых к методам адаптации в нестационарных задачах, является требование оптимальной скорости движения узлов. При недостаточно быстром движении их сгущение может не успевать за перемещением особенностей решения, что приводит к снижению эффективности адаптации. Слишком высокая скорость движения узлов может вызывать либо осцилляции решения, либо связанные колебания сетки и решения, либо вообще приводить к глобальной неустойчивости счета.

Во многом оптимальная скорость движения узлов определяется степенью согласованности эволюции решения основных (физических) уравнений с механизмом перестройки сетки, то есть управляемое распределение узлов должно осуществляться с помощью искомого решения. Добиться этого можно соответствующим конструированием функции Q .

Одним из возможных подходов к выбору функции преобразования является представление ее в виде различного порядка производных искомого решения [10] или их линейной комбинации [13]. При этом связь между элементами физического пространства Δx и расчетного Δq выражается соотношением

$$\Delta q \sim |u^{(n)}| \Delta x, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad u^{(n)} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}. \quad (33)$$

Поскольку величина Δq постоянна, то между значениями Δx и производными $u^{(n)}$ существует обратно пропорциональная зависимость, из которой следует, что в физическом пространстве сильным изменениям решения соответствуют большие

изменения Δx . В качестве примера функций преобразования, определенных этим способом и успешно применявшихся затем в расчетах [24]–[27], можно указать:

$$Q = -D_0 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q}, \quad (34)$$

$$Q = -C_0 \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left| \psi \cdot \frac{\partial u}{\partial q} \right|, \quad (35)$$

$$Q = -A_0 \cdot \psi \cdot u, \quad (36)$$

где A_0 , C_0 , D_0 - свободные параметры, подбираемые в ходе расчетов. Недостатком этого подхода является неполная согласованность искомого решения с механизмом перестройки сетки. Для ее компенсации в функцию Q вводятся перед каждой производной подгоночные коэффициенты, подбором которых можно уменьшить степень несогласованности.

Другой способ определения функции преобразования основывается на предположении квазистационарности процессов в новой системе координат в случае полной согласованности скорости ее движения с искомым решением [12]. Функция Q определяется при этом из исходного дифференциального уравнения, записанного в новых переменных в стационарном виде, и не содержит подгоночных коэффициентов. Наиболее просто эта идея реализуется в случае одного уравнения [12]. Покажем, что этот способ пригоден и для системы уравнений, и получим функции преобразования для обеих математических формулировок газодинамики (20)–(25), (28)–(32). Для этого воспользуемся недивергентной формой представления газодинамических уравнений в переменных (q, τ) . В недивергентной форме система уравнений (20)–(25) имеет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial Q}{\partial q}, \quad (37)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\rho}{\psi} \cdot \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{(u + Q)}{\psi} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial q} = 0, \quad (38)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{\psi} \cdot \frac{\partial P}{\partial q} + \frac{(u + Q)}{\psi} \cdot \frac{\partial u}{\partial q} = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} + \frac{P}{\rho \psi} \cdot \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{(u + Q)}{\psi} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q} = 0. \quad (40)$$

Полученную систему уравнений дополним уравнениями состояния идеального газа $P = P(\rho, T)$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, T)$:

$$P = \rho \cdot R \cdot T, \quad \mathcal{E} = \frac{R}{\gamma - 1} \cdot T = \frac{1}{\gamma - 1} \cdot \frac{P}{\rho}. \quad (41)$$

Предположим, что найдена такая система координат, в которой все временные производные $\partial \rho / \partial \tau$, $\partial u / \partial \tau$, $\partial \mathcal{E} / \partial \tau$ равны нулю. Тогда система (38)–(40) примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial q} = -\frac{\rho}{(u+Q)} \cdot \frac{\partial u}{\partial q}, \quad (42)$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = -(u+Q) \cdot \frac{\partial u}{\partial q}, \quad (43)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q} = -\frac{P}{\rho(u+Q)} \cdot \frac{\partial u}{\partial q}. \quad (44)$$

Используя уравнения состояния (41) для P , \mathcal{E} и подставляя уравнения 42,43 в уравнение 44, получим выражение $(u+Q)^2 = \gamma \cdot R \cdot T$, из которого следует, что функция Q имеет смысл скорости и представляет собой сумму газодинамической скорости u и скорости звука u_c :

$$Q = -u \pm (\gamma \cdot R \cdot T)^{1/2} = -u \pm u_c. \quad (45)$$

Аналогичный анализ выполним для системы уравнений газовой динамики, представленной в виде (29)-(32), и определим для нее функцию преобразования Q . Для этого представим систему (29)-(32) в недивергентном стационарном виде

$$\frac{\partial u}{\partial q} - Q \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\rho} \right) = 0, \quad (46)$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} + Q \cdot \frac{\partial u}{\partial q} = 0, \quad (47)$$

$$P \cdot \frac{\partial u}{\partial q} + Q \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q} = 0. \quad (48)$$

Воспользовавшись уравнениями состояния (41), разрешим систему (46)-(48) относительно Q и получим $Q^2 = \rho^2 \cdot \gamma \cdot R \cdot T$, откуда

$$Q = \pm \rho \cdot (\gamma \cdot R \cdot T)^{1/2} = \pm \rho \cdot u_c. \quad (49)$$

Из выражения (49) следует, что для данной формы представления газодинамических уравнений функция преобразования имеет смысл газодинамического потока.

Таким образом, выполненный анализ свидетельствует, что в зависимости от формы представления функция преобразования приобретает различный физический смысл и может быть выражена через различные газодинамические и термодинамические характеристики. Естественно, что в этом случае воздействие функций преобразования на вычислительный процесс будет различным.

В задачах газовой динамики при малом общем числе узлов сетки из-за большой пространственной неоднородности физических характеристик в рассматриваемой области могут возникать зоны чрезмерно неравномерного распределения узлов. Для устранения этого эффекта к основной функции преобразования (45) или (49) можно добавить в качестве регуляризатора функцию вида (34), оказывающую разглаживающее воздействие и ограничивающую максимальное сближение соседних узлов.

3. Соотношения на разрывах и краевые условия

Переход к нестационарной системе координат приводит к рассмотрению расширенной системы дифференциальных уравнений, для которой необходимо сформулировать соответствующие граничные и начальные условия.

3.1 Условия на разрывах. В течениях невязкого нетеплопроводного газа могут возникать внутренние разрывы двух типов: контактные и сильные (ударные волны). Контактный разрыв характеризуется отсутствием потока вещества через поверхность разрыва, то есть

$$\rho_0 \cdot (u_0 - u_K) = \rho_1 \cdot (u_1 - u_K) = 0, \quad (50)$$

которое выполняется только при $u_K = u_0 = u_1$. Здесь индекс K характеризует параметры разрыва, а индексы 0 и 1 - параметры течения перед и за разрывом соответственно.

Равенство (50) означает, что в переменных (q, τ) в газодинамической модели (20)-(24) для уравнения (20) на контактной границе должно выполняться условие

$$Q_K = Q_0 = Q_1 = -u_K. \quad (51)$$

Это же условие для газодинамической модели (28)-(32) записывается в виде

$$Q_K = Q_0 = Q_1 = 0. \quad (52)$$

В отсутствие диссипативных процессов ударная волна представляется поверхностью разрыва нулевой толщины, на которой скачком изменяются параметры газодинамического потока, а сам поток отличен от нуля. С математической точки зрения ударная волна представляет собой слабое решение гиперболических уравнений Эйлера. На фронте ударной волны выполняются три закона сохранения, которые характеризуют течение по обе стороны от поверхности разрыва:

$$\begin{aligned} \rho_0 \cdot (u_0 - u_w) &= \rho_1 \cdot (u_1 - u_w), \\ P_0 + \rho_0 \cdot (u_0 - u_w)^2 &= P_1 + \rho_1 \cdot (u_1 - u_w)^2, \\ \rho_0 \cdot (u_0 - u_w) \cdot \left[\mathcal{E}_0 + \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{(u_0 - u_w)^2}{2} \right] &= \\ &= \rho_1 \cdot (u_1 - u_w) \cdot \left[\mathcal{E}_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{(u_1 - u_w)^2}{2} \right], \end{aligned} \quad (53)$$

где $u_w = -Q_0 = -Q_1$ - скорость движения разрыва для газодинамической модели (20)-(24) и $u_w = u_0 - Q_0/\rho_0 = u_1 - Q_1/\rho_1$ - для модели (28)-(32).

Дополнив эти соотношения уравнениями состояния и экстраполируя на поверхность разрыва одну из величин u_1 или P_1 , можно определить параметры течения за ударной волной.

3.2. Граничные условия. Использование нестационарной системы координат существенно расширяет возможности численного решения ряда сложных проблем. Достигается это посредством формулировки соответствующих граничных условий. Легко и естественно в новых переменных формулируются дифференциальные задачи с динамическими граничными условиями, то есть задачи с подвижными границами типа задач Стефана, со свободными поверхностями и т.п. Представление нестационарных задач, в которых решение распространяется от одной границы к другой по неподвижному фону (в виде задач со свободной границей [11, 13]), позволяет при численном решении учитывать только область изменяющегося решения, исключив из рассмотрения неохваченные возмущением области. Данный прием может многократно повысить эффективность численного алгоритма в целом. Это преимущество нестационарной системы координат можно использовать при разработке алгоритма расчета распространяющихся ударных волн по однородной схеме сквозного счета без применения псевдовязкости. Для этого исходная газодинамическая задача должна быть представлена в виде задачи со свободной границей.

Специфика формулировки граничных условий для задач газовой динамики с динамической адаптацией связана с двумя обстоятельствами: необходимостью задания граничных и начальных условий для дополнительных уравнений и проблемой вырождения преобразования координат, обусловленной возникновением разрывных решений.

В общем случае граничные условия для уравнения обратного преобразования (25) зависят от того, является эта граница подвижной или нет. На неподвижных границах независимо от физического смысла функции Q всегда используется условие

$$Q = 0. \quad (54)$$

В случае подвижных границ функция Q отлична от нуля ($Q \neq 0$) и конкретное выражение для нее связано либо со скоростью движения границы, либо с потоком вещества через эту границу. В частности, в случае представления газодинамической задачи в виде задачи со свободной границей для определения Q на этой границе можно использовать одно из уравнений газовой динамики, например, уравнение движения. Тогда граничное условие может быть записано в виде дифференциального соотношения

$$\frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}(\rho u(Q + u)) = 0, \quad (55)$$

для системы (20)-(25) или

$$\frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}(Qu) = 0 \quad (56)$$

для уравнений (28)-(32).

Задание начального условия $\psi(q, 0)$ для уравнения обратного преобразования (25) производится с учетом того, что функция ψ имеет смысл коэффициента

трансформации, показывающего во сколько раз изменяется исходная область определения решения в переменных (x, t) при переходе к новым переменным (q, τ) . С учетом сказанного начальное условие для уравнения (25) задается в виде

$$\psi(q, 0) = C, \quad (57)$$

где $C > 0$ - положительная константа. В общем случае константа C может быть $\gg 1$ или $\ll 1$. В частном случае, когда линейные размеры области не изменяются при переходе к новым переменным, $C = 1$ и

$$\psi(q, 0) = 1. \quad (58)$$

Более сложные проблемы возникают при нарушении невырожденности преобразования координат. Известно, что уравнения газовой динамики, являясь уравнениями гиперболического типа, допускают разрывные решения. При переходе к нестационарной произвольной системе координат возникновение разрывного решения приводит к вырождению преобразования, что недопустимо и требует принятия соответствующих мер для его устранения. В общем случае суть их состоит в том, что в момент появления вырождения поверхность разрыва объявляется новой границей, на которой вводятся либо соотношения Рэнкина-Гюгонио (53), либо в случае, когда разрывное решение распространяется по невозмущенному фону, вырождение устраняется посредством представления проблемы в виде задачи со свободной границей. Область вырождения при этом исключается из рассмотрения. В качестве граничного условия тогда используется одно из соотношений (55), (56).

4. Разностные схемы и алгоритм расчета

Дифференциальные модели газовой динамики (20)-(25), (28)-(32) аппроксимировались разностными схемами, при построении которых использовался интегро-интерполяционный метод [4, 15]. Для построения семейства разностных схем в расчетном пространстве введем сетку ω с шагом h по пространственной переменной q и шагом $\Delta\tau^j$ по переменной τ :

$$\omega = \{(q_i, \tau^j), (q_k, \tau^j); \quad q_{i+1} = q_i + h, \quad q_k = q_i + 0.5h, \\ \tau^{j+1} = \tau^j + \Delta\tau^j \quad i = 0, \dots, N-1, \quad k = i + \frac{1}{2}, \quad j = 0, 1, \dots\}.$$

При разностной аппроксимации уравнений газовой динамики (20)-(25), (28)-(32) к узлам с целочисленными индексами относились сеточные функции u , Q и x , к точкам с полуцелыми индексами (q_k, τ^j) - сеточные функции ρ , P , ε .

Для дифференциальной системы (20)-(25) семейство разностных схем имеет вид

$$\frac{\psi_k^{j+1} - \psi_k^j}{\Delta\tau^j} = - \frac{Q_{i+1}^{\sigma_1} - Q_i^{\sigma_1}}{h}, \\ \frac{\psi_k^{j+1} \cdot \rho_k^{j+1} - \psi_k^j \cdot \rho_k^j}{\Delta\tau^j} = - \frac{\rho_{i+1}^{\sigma_2} \cdot (u_{i+1}^{\sigma_3} + Q_{i+1}^{\sigma_1}) - \rho_i^{\sigma_2} \cdot (u_i^{\sigma_3} + Q_i^{\sigma_1})}{h},$$

$$\frac{\psi_i^{j+1} \cdot \rho_i^{j+1} \cdot u_i^{j+1} - \psi_i^j \cdot \rho_i^j \cdot u_i^j}{\Delta \tau^j} = - \frac{P_k^{\sigma_4} - P_{k-1}^{\sigma_4}}{h} - \frac{\rho_k^{\sigma_2} \cdot u_k^{\sigma_3} \cdot (u_k^{\sigma_3} + Q_k^{\sigma_1}) - \rho_{k-1}^{\sigma_2} \cdot u_{k-1}^{\sigma_3} \cdot (u_{k-1}^{\sigma_3} + Q_{k-1}^{\sigma_1})}{h},$$

$$\frac{\psi_k^{j+1} \cdot \rho_k^{j+1} \cdot \mathcal{E}_k^{j+1} - \psi_k^j \cdot \rho_k^j \cdot \mathcal{E}_k^j}{\Delta \tau^j} = - P_k^{\sigma_4} \cdot \frac{u_{i+1}^{\sigma_3} - u_i^{\sigma_3}}{h} - \frac{\rho_{i+1}^{\sigma_2} \cdot \mathcal{E}_{i+1}^{\sigma_5} \cdot (u_{i+1}^{\sigma_3} + Q_{i+1}^{\sigma_1}) - \rho_i^{\sigma_2} \cdot \mathcal{E}_i^{\sigma_5} \cdot (u_i^{\sigma_3} + Q_i^{\sigma_1})}{h}.$$

Соответственно для уравнений (28)-(32):

$$\frac{\psi_k^{j+1} - \psi_k^j}{\Delta \tau^j} = - \frac{Q_{i+1}^{\sigma_1} - Q_i^{\sigma_1}}{h},$$

$$\frac{\psi_k^{j+1} / \rho_k^{j+1} - \psi_k^j / \rho_k^j}{\Delta \tau^j} = \frac{u_{i+1}^{\sigma_3} - u_i^{\sigma_3}}{h} - \frac{Q_{i+1}^{\sigma_1} / \rho_{i+1}^{\sigma_2} - Q_i^{\sigma_1} / \rho_i^{\sigma_2}}{h},$$

$$\frac{\psi_i^{j+1} \cdot u_i^{j+1} - \psi_i^j \cdot u_i^j}{\Delta \tau^j} = - \frac{P_k^{\sigma_4} - P_{k-1}^{\sigma_4}}{h} - \frac{u_k^{\sigma_3} \cdot Q_k^{\sigma_1} - u_{k-1}^{\sigma_3} \cdot Q_{k-1}^{\sigma_1}}{h},$$

$$\frac{\psi_k^{j+1} \cdot \mathcal{E}_k^{j+1} - \psi_k^j \cdot \mathcal{E}_k^j}{\Delta \tau^j} = - P_k^{\sigma_4} \cdot \frac{u_{i+1}^{\sigma_3} - u_i^{\sigma_3}}{h} - \frac{\mathcal{E}_{i+1}^{\sigma_5} \cdot Q_{i+1}^{\sigma_1} - \mathcal{E}_i^{\sigma_5} \cdot Q_i^{\sigma_1}}{h},$$

где $f^{\sigma_r} = \sigma_r \cdot f^{j+1} + (1 - \sigma_r) \cdot f^j$, а $\sigma_r = \sigma_1, \sigma_2, \dots$ - весовые множители, определяющие степень неявности разностных схем. При $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = 0$ имеем полностью явные схемы с погрешностью аппроксимации $O(\Delta \tau + h^2)$. При $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = 1$ получаем полностью неявные схемы с тем же порядком аппроксимации. Значению $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = 0.5$ соответствуют схемы с порядком $O(\Delta \tau^2 + h^2)$.

Величина в полуцелых узлах для сеточных функций, отнесенных к целым точкам, вычислялась как полусумма значений этих функций в близлежащих целых точках. При определении величин в узлах с целочисленными индексами для функций, отнесенных к полуцелым узлам, использовалась линейная интерполяция.

В зависимости от способа адаптации видоизменяется и алгоритм решения нелинейных разностных уравнений (59), (60). Если ударная волна не выделяется явным образом, то решение определяется из разностных уравнений, записанных по однородной схеме. Алгоритм решения в этом случае представляет собой сложный итерационный процесс, рис. 1, состоящий из одного внешнего и двух вложенных итерационных циклов. В каждом из циклов используется метод Ньютона.

В случае явного выделения разрыва (ударной волны) решение сшивается в некоторой точке с помощью соотношений Рэнкина-Гюгоню (53). При этом теряется однородная форма записи разностных уравнений, и алгоритм решения принимает вид, показанный на рис. 2.

5. Результаты и анализ расчетов

Наибольший интерес при решении задач газовой динамики представляют расчеты ударных волн без применения искусственной вязкости. Рассмотрим два

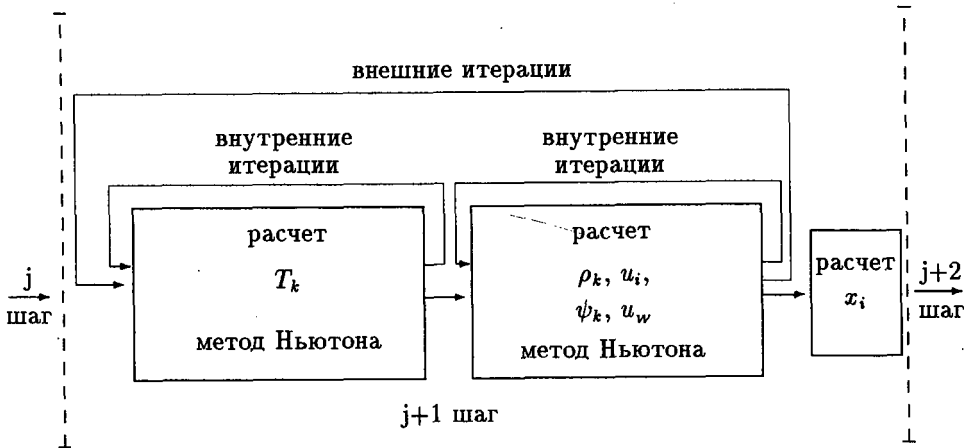


Рис.1. Алгоритм численного решения без явного выделения разрыва.

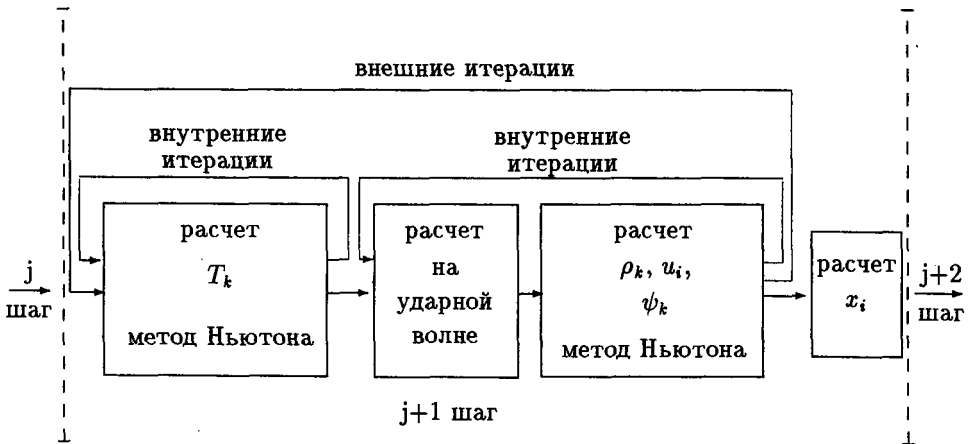


Рис.2. Алгоритм численного решения в случае явного выделения ударной волны.

способа динамической адаптации разрывных решений на примере классической модельной задачи об ускоряющемся поршне [15]. В первом способе разрыв не выделяется явным образом, а рассматривается как область решения с большими градиентами, в которой пропорционально интенсивности ударной волны концентрируются узлы сетки. Во втором - разрыв с помощью соотношений Рэнкина-Гюгонио учитывается явным образом. Во всех вариантах расчеты проводятся с неизменным

общим числом узлов ($N = 20$).

Задача об ускоряющемся поршне в одномерном плоском случае формулируется следующим образом. В начальный момент времени $t = 0$ однородный покоящийся газ занимает полупространство $0 \leq q < \infty$

$$t = 0 : \quad \rho(q, 0) = \rho_0, \quad T(q, 0) = T_0, \quad u(q, 0) = 0, \quad (61)$$

ограниченное слева поверхностью поршня $q = 0$. Начиная с $t = 0$, поршень начинает вдвигаться в газ с линейно возрастающей скоростью

$$q = 0 : \quad u(0, t) = V_0 \cdot t, \quad (62)$$

что приводит к сжатию газа и последующему образованию ударной волны. Газ полагается идеальным и удовлетворяющим уравнениям состояния (41).

Одним из основных требований, предъявляемых к численным алгоритмам, является возможность проведения расчетов сильных разрывных решений на грубых сетках, то есть на сетках с малым общим числом узлов. Во всех рассматриваемых вариантах задача об ускоряющемся поршне представлялась в виде задачи со свободной границей, что позволяет:

- значительно сократить число узлов сетки за счет уменьшения размеров расчетной области, так как из рассмотрения исключается область, не охваченная возмущением;
- не ограничивать заранее пространственно-временную эволюцию ударных волн и, тем самым, исследовать динамику процессов от стадии начального сжатия газа до распространения ударных волн с максимально допустимой для идеального газа интенсивностью.

Свободная граница помещается на некотором расстоянии справа от поршня в точке $q = q_r$. Точки $q = 0$ и $q = q_r$ могут располагаться сколь угодно близко и минимальное расстояние между ними ограничивается физическими соображениями, например, несколькими длинами свободного пробега частиц газа. До тех пор пока газодинамическое возмущение среды не достигнет правой границы, точка $q = q_r$ является неподвижной и в ней выполняются условия:

$$\begin{aligned} q = q_r : \quad \rho(q_r, t) &= \rho_r(t) = \rho_0, \\ T(q_r, t) &= T_r(t) = T_0, \\ u(q_r, t) &= u_r(t) = 0. \end{aligned} \quad (63)$$

В момент достижения газодинамическим возмущением правой граничной точки $q = q_r$ она становится подвижной и скорость ее выражается через газодинамический поток вещества, определяемый в этой точке из соотношений (55), (56).

В зависимости от длины выбранного отрезка $[0, q_r]$ ударная волна может образовываться как внутри области, так и на подвижной границе. Это позволяет рассмотреть на примере одной задачи с одинаковыми параметрами два указанных выше способа динамической адаптации для уравнений газовой динамики.

Задача об ускоряющемся поршне при $T_0 = 0$ имеет автомодельное решение, которое наиболее просто определяется в лагранжевых переменных (s, t_L) и выражается системой обыкновенных дифференциальных уравнений [15, 28]

$$-2 \cdot \xi \cdot \frac{dh}{d\xi} - \frac{d\alpha}{d\xi} = 0,$$

$$-2 \cdot \xi \cdot \frac{d\alpha}{d\xi} + \frac{d\beta}{d\xi} + \alpha = 0,$$

$$-2 \cdot \xi \cdot \frac{de}{d\xi} + \beta \cdot \frac{d\alpha}{d\xi} + 2 \cdot e = 0, \quad e = \beta \cdot h / (\gamma - 1),$$

удовлетворяющих краевым условиям:

$$\alpha(0) = 1, \quad h(\xi_0) = 1, \quad \alpha(\xi_0) = 0, \quad \beta(\xi_0) = 0, \quad e(\xi_0) = 0,$$

где ξ – автомодельная переменная: $\xi = 1/(\rho_0 V_0) \cdot s/t_L^2$, $0 < \xi < \xi_0 - 0$; искомые газодинамические функции и температура связаны с автомодельными функциями следующим образом:

$$u(s, t_L) = V_0 \cdot \alpha(\xi) \cdot t_L,$$

$$P(s, t_L) = \rho_0 \cdot V_0^2 \cdot \beta(\xi) \cdot t_L^2,$$

$$\rho(s, t_L) = \rho_0 / h(\xi),$$

$$T(s, t_L) = \frac{(\gamma - 1) \cdot V_0^2}{R} \cdot e(\xi) \cdot t_L^2,$$

ξ_0 – точка, характеризующая положение фронта ударной волны, в которой посредством соотношений Рэнкина-Гюгонно (53) параметры газа за фронтом ударной волны при $\xi = \xi_0 - 0$ сшиваются с параметрами в точке $\xi = \xi_0 + 0$:

$$\alpha(\xi_0 - 0) = \frac{4}{\gamma + 1} \cdot \xi_0,$$

$$\beta(\xi_0 - 0) = \frac{8}{\gamma + 1} \cdot \xi_0^2,$$

$$h(\xi_0 - 0) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1},$$

$$e(\xi_0 - 0) = \frac{8(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \cdot \xi_0^2.$$

При этом скорость распространения фронта ударной волны в физическом пространстве в любой момент времени определяется величиной ξ_0 :

$$u_w = 2 \cdot V_0 \cdot \xi_0 \cdot t_L \quad (64)$$

В дальнейшем автомодельное решение используется в качестве теста для получаемых численных решений.

5.1. Расчет ударных волн без явного выделения разрыва. Рассматриваемый вариант адаптации представляет интерес в первую очередь с точки зрения проведения расчетов ударных волн без псевдовязкости по одномерной схеме сквозного счета.

Начальная область $[0, q_r]$ задавалась в виде тонкого слоя, который газодинамическое возмущение проходит за несколько шагов интегрирования. После этого правая граница становится подвижной и в дальнейшем на ней формируется ударная волна. Скорость движения правой свободной границы для первой формы представления газодинамических уравнений (20)-(25) определялась из разностной аппроксимации дифференциального соотношения (55):

$$V_N = -Q_N = Q_{N-1} + u_{N-1} + 4 \cdot \frac{P_{N-1/2} - P_N}{\rho_{N-1/2} \cdot u_{N-1}} \quad (65)$$

Для второй формы представления (28)-(32) аналогичное граничное условие определялось из разностной аппроксимации дифференциального соотношения (56), согласно которому

$$V_N = -\frac{Q_N}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} \cdot \left(Q_{N-1} + 4 \cdot \frac{P_{N-1/2} - P_N}{u_{N-1}} \right) \quad (66)$$

Таким образом, с учетом начальных (58), (61) и граничных условий (51), (52), (62), (63), (65), (66) разностные схемы (20)-(25) и (28)-(32) становятся пригодными для сквозного счета.

Отметим, что использование в расчетах уравнения энергии в дивергентном виде в обеих формах представления уравнений газовой динамики (20)-(25), (28)-(32) дало отрицательные результаты. После формирования ударной волны в области разрыва кинетическая энергия намного превосходит внутреннюю и погрешность определения температуры становится столь велика, что приводит к неустойчивости численного решения на адаптивной сетке. Поэтому весь дальнейший анализ проводится только для консервативных разностных схем (59) и (60), аппроксимирующих уравнения газовой динамики с недивергентным уравнением энергии.

В качестве функции преобразования для первой формы представления уравнений газовой динамики (20)-(25) использовалось выражение:

$$Q = - \left[u + (\gamma \cdot R \cdot (T - T_0))^{1/2} \right] - D \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q}, \quad (67)$$

где $\psi = \partial x / \partial q$, $D = L \cdot |V_N - u(0, t)| / \psi$. Для второй формы представления (28)-(32) использовалась функция следующего вида:

$$Q = -\rho \cdot (\gamma \cdot R \cdot (T - T_0))^{1/2} - D \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q}, \quad (68)$$

где $\psi = \rho \cdot \partial x / \partial q$, $D = L \cdot |Q_N| / \psi$, L – зона влияния подвижных границ, в простейшем случае величина ее пропорциональна шагу расчетной сетки ($L \sim h$). В этих выражениях второе слагаемое оказывает регуляризирующее воздействие, ограничивая максимальное сближение узлов сетки. Для согласования движения узлов с распространением возмущения скорость $(\gamma \cdot R \cdot (T - T_0))^{1/2}$ нормирована на начальное значение температуры T_0 . Тем самым исключается движение узлов по невозмущенному фону.

На рис. 3-6 представлены пространственные профили газодинамических величин и температуры на различные моменты времени, рассчитанные по консервативной схеме 60, аппроксимирующей вторую форму представления (28)-(32) с погрешностью $O(\Delta \tau^2 + h^2)$. Местоположение используемых узлов помечено маркерами. На рис. 7,8 представлены зависимости скоростей движения ударной волны u_w , поршня V и траектории движения узлов сетки.

Особенности адаптации полностью определяются динамикой решения газодинамической задачи. В начальные моменты времени пространственные профили всех величин $\rho(x)$, $u(x)$, $P(x)$, $T(x)$ носят ниспадающий (слева направо) характер с областью наибольших градиентов у поршня. Под их влиянием часть узлов удерживается вблизи левой границы, а остальные следуют за подвижной правой границей. Так как скорость движения поршня $V(t)$ меньше скорости свободной границы $u_w(t)$, рис. 7, область решения с течением времени увеличивается, а траектории движения узлов носят разбегающийся характер, рис. 8. С появлением ударной волны у правой границы появляется вторая область больших градиентов, где под их влиянием происходит заметная концентрация узлов, рис. 4. Сформировавшаяся ударная волна быстро достигает своего теоретического предела по интенсивности, производя четырехкратное сжатие вещества ($\rho_1 = 4 \cdot \rho_0$). В дальнейшем плотность ρ_1 на ударной волне остается неизменной, а температура под влиянием нарастающей скорости резко увеличивается. Продолжающееся ускорение поршня вызывает наибольшее сжатие газа вблизи левой границы, где из-за неограниченного роста плотности температурный профиль $T(x)$ имеет минимум, рис. 5, 6. В итоге пространственные профили всех газодинамических величин $\rho(x)$, $u(x)$, $P(x)$ по-прежнему носят ниспадающий характер, а температурный становится возрастающим. При таком поведении величин $\rho(x)$ и $T(x)$ большая часть узлов под влиянием высокой температуры концентрируется в области ударной волны. Другая часть под влиянием высокой плотности ρ удерживается вблизи поршня, рис. 6, 8. В центральной области, где решение меняется медленнее всего, плотность узлов оказывается наименьшей. Такое распределение узлов является оптимальным и позволяет производить расчеты ударных волн с приемлемой точностью на сетках с минимальным числом узлов ($N_{min} \approx 10$).

Точность численного решения оценивалась посредством сравнения его с автономным, рис. 6, 7. Следует отметить, что задача о движении ускоряющегося поршня в среде с ненулевым фоном не имеет автономного решения. Однако при неограниченном по времени движении решение задачи асимптотически приближается к автономному решению аналогичной задачи с нулевым фоном. На рис. 6 автономное решение показано пунктирными линиями, численное – сплошными. На рис. 7 автономное решение отмечено маркерами, численное – пунктирной

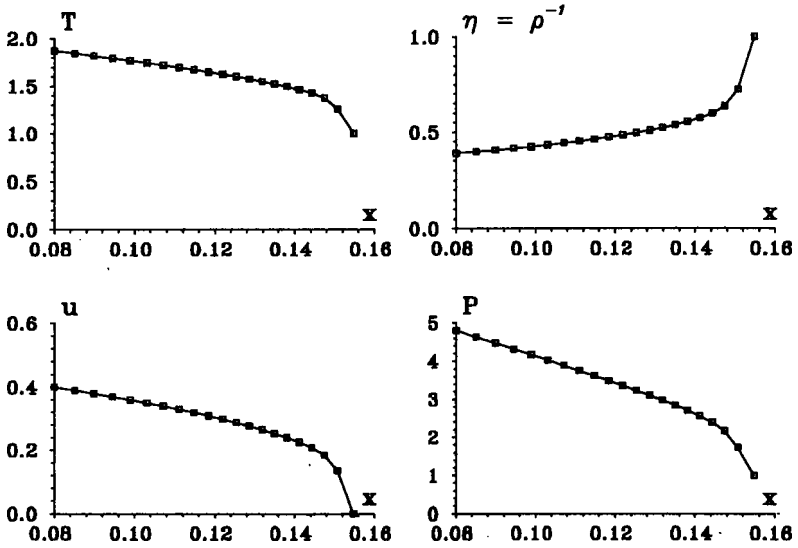


Рис.3. Пространственные профили газодинамических величин и температуры в момент времени $t = 0.4$.

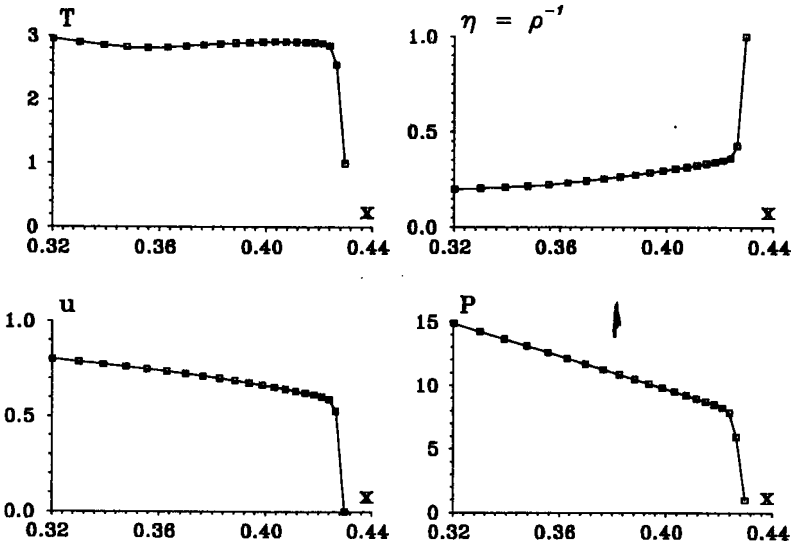


Рис.4. Пространственные профили газодинамических величин и температуры в момент времени $t = 0.8$.

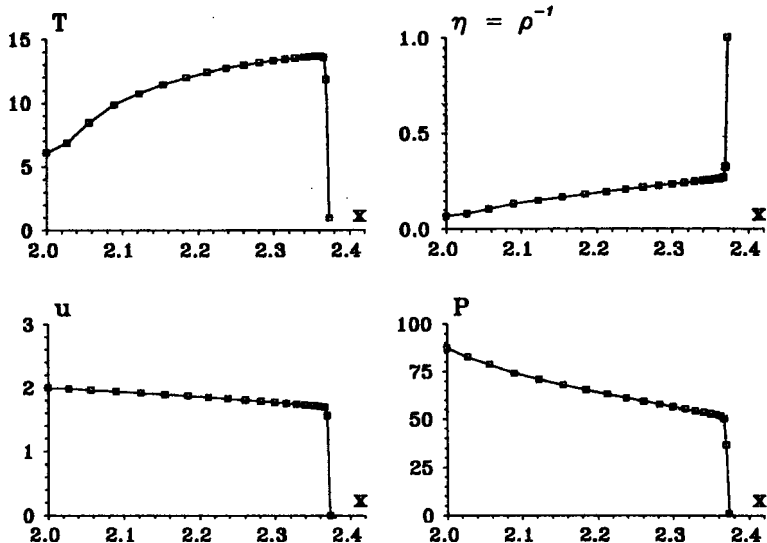


Рис.5. Пространственные профили газодинамических величин и температуры в момент времени $t = 2.0$.

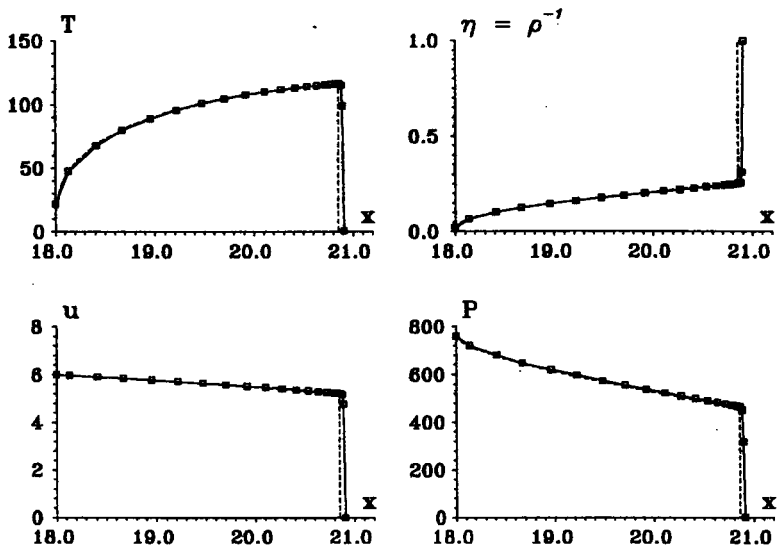


Рис.6. Пространственные профили газодинамических величин и температуры в момент времени $t = 6.0$.

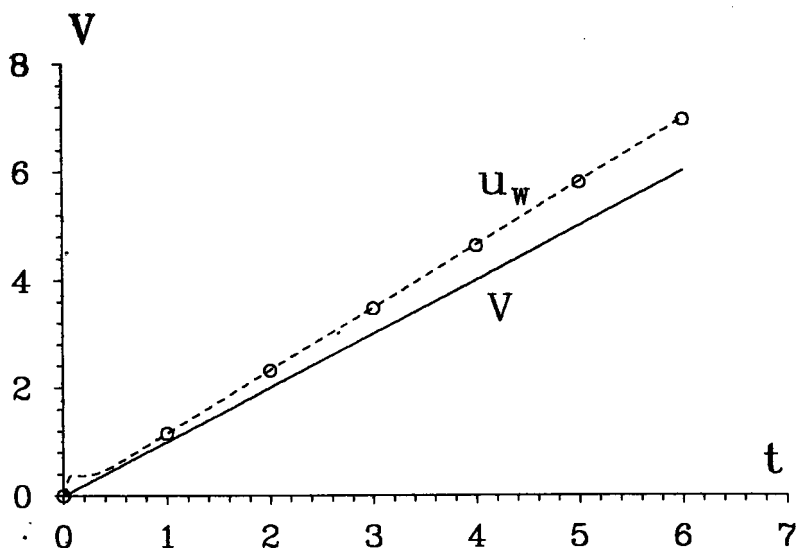


Рис.7. Временные зависимости скоростей движения поршня $V(t)$ (сплошная линия) и ударной волны u_w (численное решение - пунктир, автомодельное решение - маркеры).

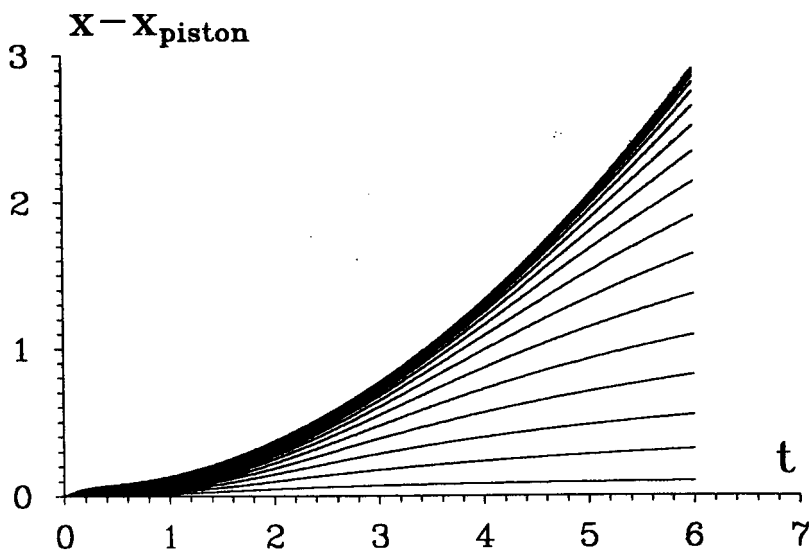


Рис.8. Траектории движения узлов.

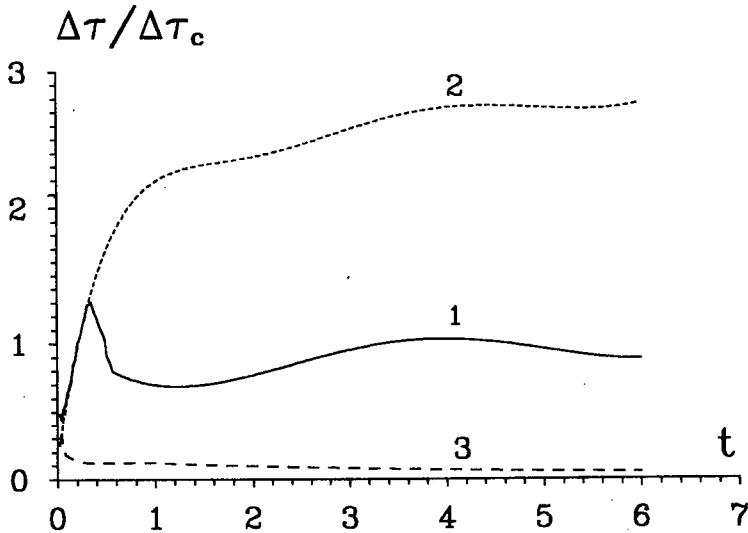


Рис.9. Временные зависимости шага интегрирования для полностью неявной разностной схемы порядка $O(\Delta\tau + h^2)$ (сплошная линия), для схемы порядка $O(\Delta\tau^2 + h^2)$ (пунктир) и для решения с неоптимальной функцией Q (линия 3).

линией. Сравнение показало, что скорость распространения ударной волны, рис. 7, с момента ее возникновения полностью совпадает с автомодельным решением. Пространственные профили $\rho(x)$, $u(x)$, $P(x)$, $T(x)$ численного решения асимптотически приближаются к автомодельным и к моменту времени $t = 6$ практически полностью совпадают, рис. 6. В области ударной волны незначительное отклонение еще существует, но в целом полученные решения свидетельствуют о высокой точности расчетов разрывных решений без их явного выделения.

С целью определения качества семейства разностных схем (60) и эффективности их использования проводились расчеты по полностью неявной схеме с $O(\Delta\tau + h^2)$ ($\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = 1$) и разностной схеме второго порядка $O(\Delta\tau^2 + h^2)$ ($\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = 0.5$). Явные схемы из-за жесткого ограничения на шаг интегрирования $\Delta\tau^j < 0.1 \cdot \Delta\tau_c$ в расчетах не использовались и обсуждаться здесь не будут. На рис. 9 представлены зависимости шага интегрирования $\Delta\tau$ от времени для схемы первого порядка (сплошная линия) и для схемы второго порядка (пунктирная линия). Для удобства шаг интегрирования нормирован на критерий Куранта $\Delta\tau_c$, который для первой формы записи уравнений (20)-(24) определялся следующим образом:

$$\Delta\tau_c = \min_{1/2 \leq k \leq N-1/2} \left\{ \frac{\Delta x_k}{(\gamma \cdot R \cdot T_k)^{1/2} + |Q_k|} \right\},$$

а для второй формы представления (28)-(32):

$$\Delta\tau_c = \min_{1/2 \leq k \leq N-1/2} \left\{ \frac{\Delta x_k}{(\gamma \cdot R \cdot T_k)^{1/2} + |u_k - Q_k/\rho_k|} \right\}.$$

Из графиков следует, что расчеты по разностной схеме первого порядка точности $O(\Delta\tau + h^2)$ в среднем ведутся с безразмерным шагом $\Delta\tau/\Delta\tau_c \simeq 1$. Разностная схема второго порядка точности $O(\Delta\tau^2 + h^2)$ имеет шаг в 2-3 раза выше и, в отличие от схем второго порядка в эйлеровых переменных, не содержит колебаний в области больших градиентов. Однако схемы второго порядка точности обладают высокой чувствительностью к точности вида функции преобразования и выбору коэффициентов.

С целью определения влияния вида функции преобразования на эффективность численного алгоритма были проведены расчеты с функцией Q , при определении которой не использовалось условие стационарности процессов. В качестве такой функции использовалось выражение, применявшееся ранее в [25] и принесшее положительные результаты:

$$Q = - \left[A \cdot \psi \cdot u + D_0 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q} \right]. \quad (69)$$

Выражение (69) содержит подгоночный параметр A , компенсирующий неточный вид функции преобразования. Расчеты с выражением (69) показали, рис. 9, кривая 3, что интегрирование при прочих равных условиях ведется с шагом $\sim 0.1 \cdot \Delta\tau_c$.

Применение в расчетах семейства разностных схем (59), соответствующих первой форме представления уравнений газовой динамики (20)-(25) с функцией преобразования (67), показало следующие результаты. До появления ударной волны результаты расчетов полностью совпадают с результатами, полученными для второй формы представления газодинамических уравнений. Однако после возникновения ударной волны погрешность в определении газодинамических величин резко возрастает, что приводит к общей неустойчивости расчетов.

5.2. Расчет ударных волн с явным выделением разрыва. На примере той же задачи об ускоряющемся поршне рассмотрим применение динамической адаптации для расчета ударных волн, возникающих внутри области. В этом случае область вырождения исключается из рассмотрения с помощью замены плоскости разрыва соотношениями Рэнкина-Гюгоньо (53).

Отметим основные особенности данного способа адаптации. Введение соотношений Рэнкина-Гюгоньо по сути дела разбивает исходную задачу на две краевые задачи с общей подвижной границей. Решение этих задач по однородным схемам сквозного счета не представляется возможным.

Момент зарождения ударной волны в расчетах отождествлялся с моментом появления немонотонности в пространственном профиле одной из газодинамических величин, например, $\rho(x)$. Точка нарушения монотонности плотности $\rho(x)$ объявлялась точкой разрыва и в ней для уравнений газовой динамики вводились соотношения Рэнкина-Гюгоньо. С течением времени разрыв приобретает ярко выраженную форму, рис. 10. Как и в первом способе адаптации, численное решение тестировалось с помощью автомодельного решения, рис. 11. К моменту времени $t = 6$ некоторое отличие численного решения от автомодельного еще заметно только в области разрыва.

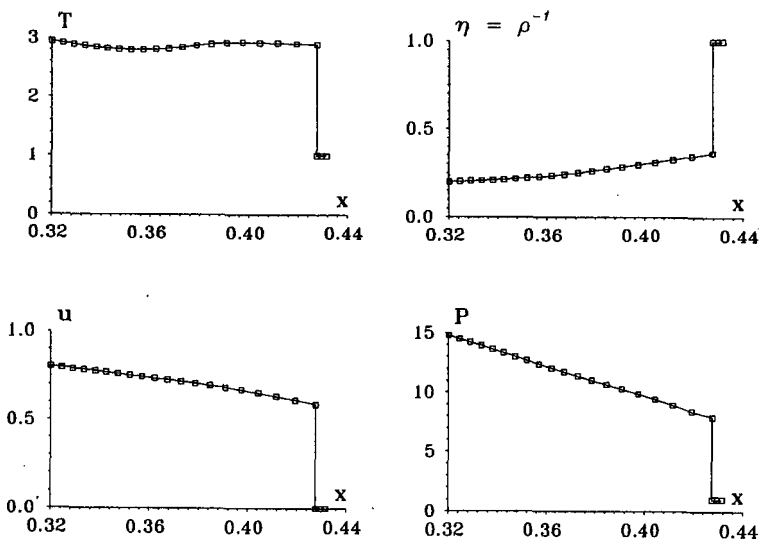


Рис.10. Пространственные профили газодинамических величин и температуры для расчета с явным выделением ударной волны в момент времени $t = 0.8$.

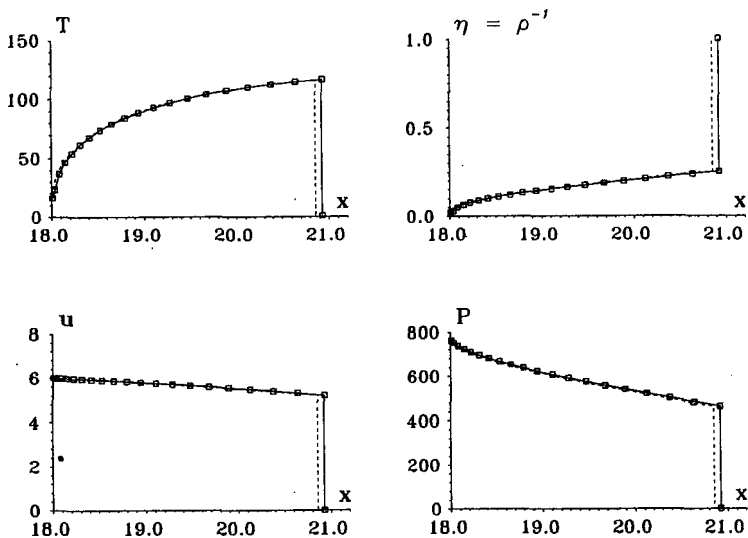


Рис.11. Пространственные профили газодинамических величин и температуры для расчета с явным выделением ударной волны в момент времени $t = 6.0$ (пунктир – автомодельное решение).

С выделением разрыва решение в каждой из подобластей становится гладким

и, вообще говоря, не требует адаптации, связанной с концентрацией узлов сетки.

Основной особенностью задачи при этом становится появление подвижной границы. Решение нестационарных задач с подобными особенностями [24]–[27] для метода динамической адаптации не представляет больших затруднений. Как обычно в подобных ситуациях, в качестве функции преобразования Q можно воспользоваться ее простейшим видом (34), позволяющим получать квазиравномерные сетки. Однако в отличие от других задач задача об ускоряющемся поршне имеет ту особенность, что с течением времени $t \geq 2$ плотность газа вблизи поршня начинает быстро возрастать. Поэтому вблизи левой границы по прошествии достаточно большого отрезка времени желательно осуществлять сгущение узлов. При использовании разностных схем (60), соответствующих второй форме представления уравнений газовой динамики, это сгущение (при равномерном ψ_k) производится автоматически с помощью соотношения (27), рис. 11, 12. Процесс сгущения наиболее заметен на траекториях движения узлов, рис. 12.

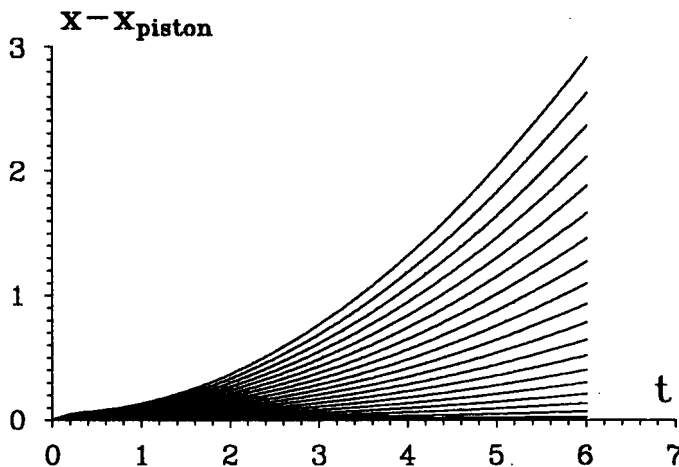


Рис.12. Траектории движения узлов для расчета с явным выделением ударной волны (вторая форма представления уравнений).

Первая форма представления газодинамических уравнений (20)–(25) при тех же условиях приводит к равномерной по ψ и x сетке, рис. 13. Поэтому для достижения такой же точности, как и в предыдущем случае, использование разностных схем (59) требует либо в 1.5–2 раза больше узлов, либо применения дополнительной функции адаптации, при помощи которой производится сгущение узлов сетки в области высокой плотности.

Исследование влияния порядка точности разностных схем показало, что в безразмерных единицах Куранта соотношения между шагом интегрирования для схем первого порядка $O(\Delta\tau + h^2)$ и схем второго порядка $O(\Delta\tau^2 + h^2)$, рис. 14, примерно такие же, как и в первом способе адаптации. Но так как шаг интегрирования $\Delta\tau_2^j$ и значение критерия Куранта $\Delta\tau_c^j$ определяются минимальным шагом Δx_k по пространственной переменной x , то реальный шаг интегрирования $\Delta\tau_2^j$

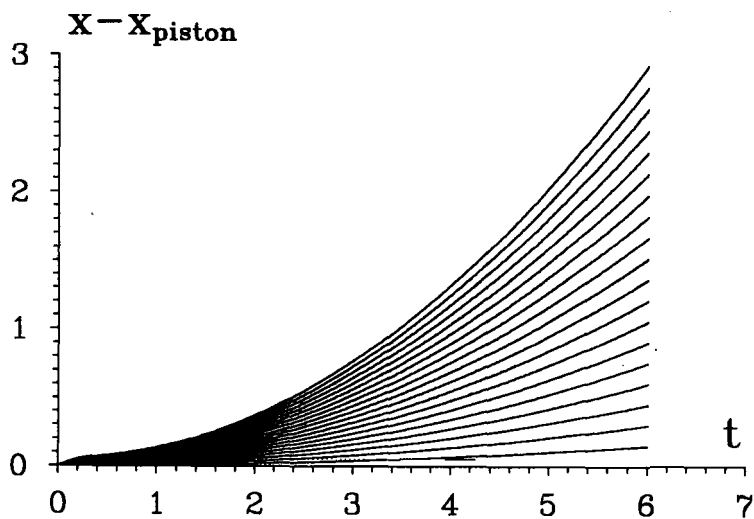


Рис.13. Траектории движения узлов для расчета с явным выделением ударной волны (первая форма представления уравнений).

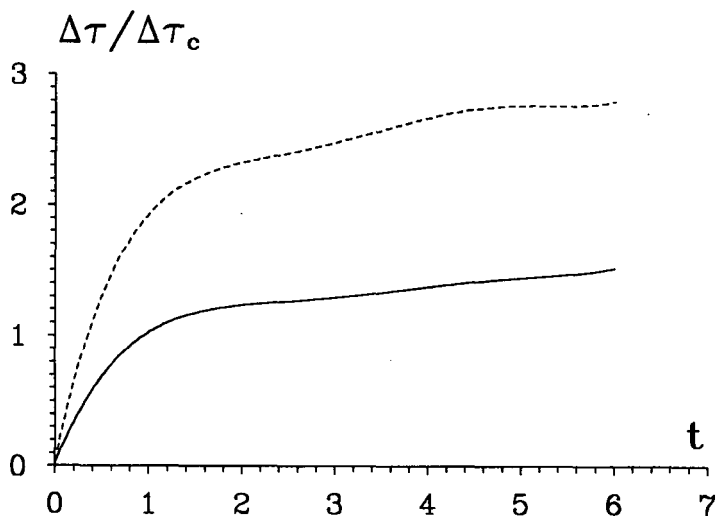


Рис.14. Временные зависимости шага интегрирования для полностью неявной разностной схемы порядка $O(\Delta\tau + h^2)$ (сплошная линия), для схемы порядка $O(\Delta\tau^2 + h^2)$ (пунктир) - расчет с явным выделением ударной волны.

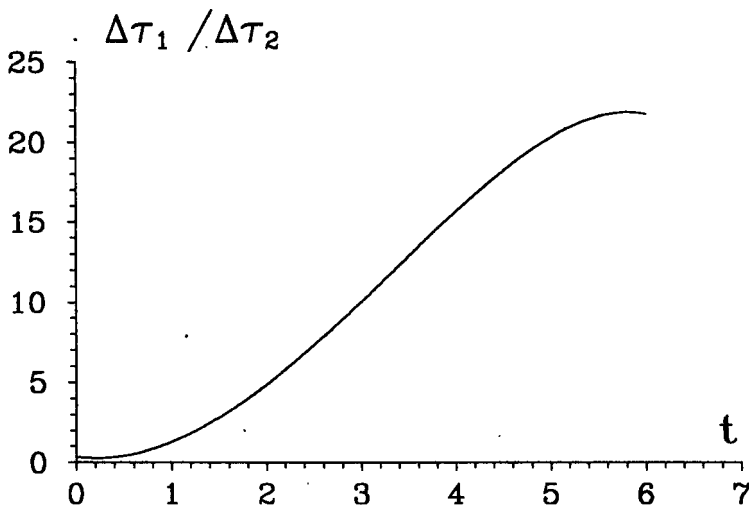


Рис.15. Временные зависимости отношения шагов интегрирования $\Delta\tau_1/\Delta\tau_2$, где индекс 1 соответствует расчету с явным выделением ударной волны, а индекс 2 – расчету без выделения разрыва.

оказывается много больше, чем шаг интегрирования в первом способе адаптации $\Delta\tau_1^j$. На рис. 15 представлена временная зависимость соотношения $\Delta\tau_2^j/\Delta\tau_1^j$, показывающая во сколько раз отличаются шаги интегрирования в двух способах адаптации.

6. Заключение

Рассмотрены два способа динамической адаптации в задачах газовой динамики, основывающиеся на переходе к произвольной нестационарной системе координат. Переход к новой системе координат позволяет выразить исходную систему уравнений газовой динамики в двух формах представления, эквивалентных с математической точки зрения.

Оптимальная функция преобразования, не содержащая подгоночных параметров, определяется из условия стационарности процессов в новой системе координат. Минимальное и максимальное расстояния между узлами сетки ограничиваются с помощью функции разглаживающего действия.

В однородных алгоритмах разрывное решение не выделяется явным образом, а представляется в виде области больших градиентов, под влиянием которых происходит концентрация узлов вблизи разрыва. В этом случае метод динамической адаптации применим в ситуациях, когда область вырождения находится на одной (или нескольких) из границ и может использоваться для расчета ударных волн, распространяющихся по невозмущенному фону. Существенным моментом данного способа адаптации является его чувствительность к виду используемого уравнения энергии. Положительные результаты достигаются только при использовании недивергентного уравнения энергии. С дивергентным уравнением энергии вычислительный процесс после появления ударной волны становится неустойчивым.

С точки зрения эффективности в данном способе адаптации явное предпочтение имеет вторая форма представления уравнений газовой динамики. Соответствующие ей разностные схемы сохраняют практически все положительные свойства разностных схем газовой динамики в лагранжевых переменных.

В неоднородных алгоритмах, основанных на явном выделении разрывов с помощью соотношений Рэнкина-Гюгонно, метод динамической адаптации можно успешно использовать для решения задач, в которых вырождение может возникать во всей области определения решения. Несмотря на то, что введение условий Рэнкина-Гюгонно исключает применение однородных схем, данный подход имеет свои достоинства. Выделение разрыва явным образом разбивает исходную задачу на две краевые задачи с общей подвижной границей. В каждой из подобластей решение становится гладким, что позволяет, как и в однородных алгоритмах, проводить расчеты на грубых сетках. В зависимости от внешних условий в ряде случаев расчеты можно проводить на квазиравномерных сетках. Точность и устойчивость вычислительного процесса не зависят от вида уравнения энергии. Результаты вычислений с дивергентным и недивергентным уравнениями практически не отличаются между собой. Однако характеристики вычислительного процесса в большей степени связаны с формой представления уравнений газовой динамики в целом. С точки зрения эффективности вторая форма записи уравнений газовой динамики имеет заметное преимущество, но в отличие от однородных алгоритмов оно не носит принципиального характера и выражается только в том, что для достижения одной и той же точности требуется меньшее число узлов.

Математическое моделирование движения ускоряющегося поршня на динамически адаптирующихся сетках по однородному и неоднородному алгоритмам потребовало примерно одинакового числа узлов. В основном вычислительные эксперименты проводились с $N = 20$. Без заметного ущерба до момента образования ударной волны с максимальной интенсивностью количество узлов можно было уменьшать до $N = 10$. Однако на больших временах в этом случае заметной становилась погрешность аппроксимации. Таким образом, метод динамической адаптации обладает эффективностью, достаточной для практического использования как в однородных, так и в неоднородных алгоритмах.

Подчеркнем, что выбор того или иного алгоритма решения должен определяться внешними условиями, то есть особенностями рассматриваемых задач, а не только внутренними свойствами алгоритма.

Зависимость результатов решения от формы представления уравнений газовой динамики свидетельствует о необходимости проведения дальнейших исследований в данном направлении.

Авторы выражают искреннюю благодарность А.А. Самарскому и В.Ф. Тишкину за полезные обсуждения и критические замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А. Самарский, Е.С. Николаев. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978.
2. A. George, J. Liu. Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems. – New Jersey 07632, 1981.
3. Дж. Ортега, В. Рейнболдт. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975, 558с.
4. А.А. Самарский. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989, 616с.

5. А.Б. Кучеров, Е.С. Николаев. Попеременно-треугольный итерационный метод решения сеточных эллиптических уравнений в прямоугольнике // ЖВМиМФ, 1976, т.16, N 5, с.1164 – 1174.
6. D.S. Kerschaw. The Incomplete Cholesky-Conjugate Gradient Method for the Iterative Solution of Systems of Linear Equations // J. Comp. Phys., 1978, v.26, p.43–65.
7. Numerical Grid Generation / Editor by J.F. Thompson - North-Holland, Amsterdam, 1982, 909p.
8. J.F. Thompson. Grid Generation Techniques in Computational Fluid Dynamics // AIAA J., 1984, v.22, N 11, p.1505 – 1523.
9. В.Д. Лисейкин. Технология конструирования трехмерных сеток для задач аэродинамики. Обзор // ВАИТ, серия: "Математическое моделирование физических процессов", 1991, вып. 2, с.31 – 45.
10. Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин. Об одном подходе к построению адаптивных разностных сеток // Доклады АН СССР, 1988, т. 298, N 1, с. 64 – 68; Методы построения адаптивных сеток для одномерных краевых задач // Препринт N 33. – М.: ИПМатем. АН СССР, 1987, 28 с.
11. В.Ф. Василевский, В.И. Мажукин. Численные расчеты температурных волн со слабыми разрывами на сетках с динамической адаптацией // Дифференциальные уравнения, 1989, т.25, N 7, с.1187 – 1193; Численное решение нестационарной задачи теплопроводности на адаптивной сетке с явным выделением области слабого разрыва // Препринт N 14. – М.: ИПМатем. АН СССР, 1989, 14с.
12. В.И. Мажукин, А.А. Самарский, Орландо Кастельянос, А.В. Шапранов. Метод динамической адаптации для нестационарных задач с большими градиентами // Математическое моделирование, 1993, т.5, N 4, с.32 – 56.
13. В.И. Мажукин, Л.Ю. Такоева. Принципы построения динамически адаптирующихся к решению сеток в одномерных краевых задачах // Математическое моделирование, 1990, т.2, N 3, с.101 – 118; Численное решение задачи горения на сетках, динамически адаптирующихся к решению // Препринт N 74. – М.: ИПМатем. АН СССР, 1989, 24с.
14. R.D. Richtmyer, K.W. Morton. Difference Method for Initial-Value Problems. – New-York: Interscience Publishers, 1967.
15. А.А. Самарский, Ю.П. Попов. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992, 422с.
16. Д. Андерсен, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. – М.: Мир, т.1,2, 1990.
17. Э. Оран, Дж. Борис. Численное моделирование реагирующих потоков. – М.: Мир, 1990, 661с.
18. С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976.
19. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. Под редакцией К.И.Бабенко. – М.: Наука, 1979, 296с.
20. О.М. Белоцерковский, В.Г. Грудицкий, В.Н. Рыгалин. Выделение разрывов при решении одномерных нестационарных течений газа // Доклады АН СССР, 1983, т.272, N 1, с.49 – 52.
21. Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин, А.А. Самарский. Конечно-разностный метод решения одномерных уравнений газовой динамики на адаптивных сетках // Доклады АН СССР, 1988, т.302, N 5, с.1078 – 1081; Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с использованием адаптивных сеток, динамически связанных с решением // ЖВМиМФ, 1988, т.23, N 8, с.1210 – 1225.
22. Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин. Математическое моделирование задачи Стефана на адаптивных сетках // Дифференциальные уравнения, 1987, т.23, N 7, с.1154 – 1160.
23. Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин, А.А. Самарский. Конечно-разностный метод решения нестационарных двумерных краевых задач на адаптивной сетке, динамически связанной с решением // Препринт N 117. – М.: ИПМатем. АН СССР, 1987, 27с.
24. П.В. Бреславский, В.И. Мажукин. Математическое моделирование процессов импульсного плавления и испарения металла с явным выделением фазовых границ // Инженерно-физический журнал, 1989, т.57, N 1, с.107 – 114.
25. П.В. Бреславский, В.И. Мажукин. Математическое моделирование процесса поверхностного испарения лазерным излучением в среду с противодавлением // Препринт N 2. – М.: Институт математического моделирования РАН, 1992, 48с.

26. *В.Ф. Василевский, В.И. Мажукин.* Расчет ударных волн на сетках с динамической адаптацией // Препринт N 37. – М.: ИПМатем. АН СССР, 1990, 11с.
27. *П.В. Бреславский, В.И. Мажукин.* Алгоритм численного решения гидродинамического варианта задачи Стефана при помощи динамически адаптирующихся сеток // Математическое моделирование, 1993, т.3, N 10, с.104 – 115.
28. *Л.И. Седов.* Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию
12.01.1995