

УДК 519.63

L₂-КОНСЕРВАТИВНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИСА

© 1997 г. Академик А. А. Самарский, В. И. Мажукин, П. П. Матус, И. А. Михайлик

Поступило 29.07.97 г.

1. Нелинейные волновые процессы интенсивно изучаются в различных разделах физики и механики [1]. Для изучения волн малой амплитуды в качестве модельного уравнения часто используют уравнение Кортевега–де Фриса (КдФ)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad \beta = \text{const} > 0, \quad (1)$$

которое было впервые выведено в 1895 г. [2]. Изучению уравнения КдФ посвящена обширная литература [3, 4]. Анализ различных аспектов численного решения уравнения Кортевега–де Фриса выполнен в ряде работ [5–7].

В нашем сообщении проводится анализ различных схем для уравнения КдФ с точки зрения интегральных законов сохранения. Вводится понятие L₂-консервативности схемы как свойство ее решения удовлетворять сеточному аналогу закона сохранения

$$E_1(t) = E_1(0), \quad E_1(t) = \int_0^l u^2(x, t) dx. \quad (2)$$

На основе этого принципа для уравнения Кортевега–де Фриса: а) установлены неконсервативность и абсолютная неустойчивость явных двухслойных разностных схем; б) построены новые классы трехслойных полностью консервативных (консервативных и L₂-консервативных) разностных схем с весами; в) рассмотрен подход к построению явных L₂-консервативных разностных схем для нелинейного уравнения. Получены априорные оценки в нелинейном случае.

2. В прямоугольной области $\bar{Q} = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ для уравнения (1) будем рассматривать задачу Коши с периодическими по пространству условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(x, t) &= u(x + l, t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

При построении эффективных алгоритмов необходимо следить за тем, чтобы в них выполнялись сеточные аналоги основных свойств дифференциальной задачи (1), (3)

$$(Lu, u) = 0, \quad E_k(t) = E_k(0), \quad k = 1, 2, \quad (4)$$

где

$$Lu = u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad (u, v) = \int_0^l u(x, t) v(x, t) dx,$$

$$E_2(t) = \int_0^l u(x, t) dx.$$

Основные конструктивные моменты построения L₂-консервативных схем для нелинейного уравнения КдФ отразим на модельном примере линейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad a = \text{const} > 0, \quad (5)$$

сохраняющего основные свойства (4).

3. В области \bar{Q} введем равномерные сетки $\omega_{ht} = \omega_h \times \omega_\tau$, $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = l\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_0; \tau N_0 = T\} = \omega_\tau \cup \{T\}$. При построении соответствующих разностных схем будем ориентироваться на простейшую явную разностную схему

$$y_i + ay_i^* + \beta y_{ixx}^* = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad t \in \omega_\tau, \quad (6)$$

$$y_{i+N} = y_i, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (7)$$

в которой использована система обозначений [8]:

$$y_i^- = \check{y} = \frac{y^j - y^{j-1}}{\tau}, \quad y_i^+ = \hat{y} = \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau},$$

$$y_i^* = \frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau}, \quad y_x^* = \frac{y_i - y_{i-1}}{h},$$

Институт математического моделирования
Российской Академии наук, Москва
Институт математики Академии наук Белоруссии,
Минск

$$y_x = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y_{\bar{x}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}.$$

Покажем, что семейство явных разностных схем (6) не удовлетворяет условию L_2 -консервативности и, более того, является абсолютно неустойчивым в наиболее слабой норме L_2 . Для анализа свойств разностной схемы (6) приведем ее к каноническому виду двухслойных операторно-разностных схем [8]

$$By_i + Ay_n = 0, \quad y_0 = u_0, \quad (8)$$

где $u_0 \in H$, $y = y(t_n) = y_n = (y_0^n, y_1^n, \dots, y_N^n) \in H$, $H = \Omega_h$ – пространство сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\omega}_h$ и удовлетворяющих условию периодичности $y_i = y_{i+N}$. Тогда в схеме (8) $B = E$, $A: \Omega_h \rightarrow \Omega_h$, $A = \alpha A_1 + \beta A_2$,

$$(A_1 y)_i = \begin{cases} \frac{y_1 - y_{N-1}}{2h}, & i = 0, N, \\ y_{\bar{x}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, & i = 1, 2, \dots, N-1, \end{cases} \quad (9)$$

$$(A_2 y)_i = \begin{cases} \frac{y_{\bar{x},1} - y_{\bar{x},N-1}}{2h}, & i = 0, N, \\ \frac{y_{\bar{x},2} - y_{\bar{x},1}/h + (y_0 - y_{N-1})/h^2}{2h}, & i = 1, \\ y_{\bar{x}\bar{x},i}, & i = 2, 3, \dots, N-2, \\ \frac{y_{\bar{x},N-2} + y_{\bar{x},N}/h + (y_N - y_1)/h^2}{2h}, & i = N-1. \end{cases} \quad (10)$$

Линейное пространство Ω_h снабдим скалярным произведением

$$(u, v)_h = (u, v) = hu_0v_0 + \sum_{i=1}^{N-1} hu_iv_i + hu_Nv_N$$

и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$. Используя тождество $(y, v_{\bar{x}}) = -(y_{\bar{x}}, v)$, $y, v \in \Omega_h$, нетрудно доказать, что $(A_k y, y) = 0$, $k = 1, 2$, т.е. оператор $L_h = A = -A^*$ является кососимметрическим. Так как $y_{\bar{x},0} = y_{\bar{x},N}$, $y_{\bar{x}\bar{x},0} = y_{\bar{x}\bar{x},N}$, то, суммируя (6) по $x \in \omega_h$, находим сеточный аналог (4)

$$E_{2,h}(t) = E_{2,h}(0), \quad t \in \omega_\tau, \quad E_{2,h} = (y, 1). \quad (11)$$

Из (11) следует, что разностная схема (6), (7) консервативна.

О п р е д е л е н и е. Разностную схему назовем L_2 -к о н с е р в а т и в н о й

, если для нее имеет место сеточный аналог интегрального закона сохра-

нения (2), справедливого для исходной дифференциальной задачи.

Исследуем теперь схему (6) на свойство L_2 -консервативности. Для этого умножим скалярно операторное уравнение (8) на 2τ . Получим

$$\|y(t)\|^2 - \sum_{t'=\tau}^t \tau \|y_{t'}(t')\|^2 = \|y(0)\|^2, \quad t \in \omega_\tau.$$

Наличие отрицательного дисбаланса говорит не только о невыполнении соответствующего закона сохранения, но и ставит под сомнение вопрос вообще об устойчивости схемы в наиболее слабой норме L_2 . Так как A и $B = E$ существуют, то в соответствии с работой [9] для устойчивости схемы (8) в H_{B^*B} необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $BA^* + AB^* \geq \tau A^*A$. Так как в нашем случае $A = -A^*$, то последнее неравенство эквивалентно требованию $A^*A \leq 0$. Итак, необходимое условие устойчивости в H не выполнено и схема (6) абсолютно неустойчива в норме L_2 .

4. Выделим класс явных L_2 -консервативных условно устойчивых трехслойных разностных схем. Для аппроксимации уравнения (5) воспользуемся трехслойной разностной схемой

$$y_i^* + Ay = 0, \quad t \in \omega_\tau, \quad y_0 = u_0, \quad y_1 = \bar{u}_0. \quad (12)$$

Нетрудно показать, что при $\tau \|A\| < 1$ схема (12) устойчива в норме $E_3 = \|\hat{y}\|^2 + 2\tau(\hat{y}, Ay) + \|y\|^2 > 0$.

Так как в нашем случае $\|A\| \leq \frac{\alpha}{h} + \frac{\beta\sqrt{10}}{h^3}$, то схема

$$(12) \text{ условно устойчива при } \tau \leq \tau_k, \quad \tau_k = \frac{h^3}{\beta\sqrt{10} + \alpha h^2}.$$

При более жестком условии $\tau^2 \|A\|^2 \leq 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ схема устойчива в норме L_2 и при любом $t \in \omega_\tau$

имеет место оценка $\|y\|^2 \leq \frac{E(0)}{1 - \varepsilon}$. Умножая уравнение (12) скалярно в Ω_h на 2τ , приходим к тождеству $E_{1,h}(t) = E_{1,h}(0)$, $t \in \omega_\tau$, $E_{1,h} = (\hat{y}, y)$. Следовательно, явная трехслойная схема (12), (7) консервативна, L_2 -консервативна и устойчива в норме L_2 при выполнении критерия Куранта.

Итак, требование L_2 -консервативности позволяет выделить класс устойчивых разностных схем в Ω_h . Аналогичные результаты можно получить и для трехслойных схем с весами

$$y_i^* + Ay^{(\sigma_1, \sigma_2)} = 0, \quad t \in \omega_\tau, \quad (13)$$

$$y_0 = u_0, \quad y_1 = u_1,$$

где $y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2 \check{y}$, σ_1, σ_2 – существенные параметры.

Теорема 1. Пусть в схеме (13) $\sigma_1 \geq \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 \geq 1$, $A = -A^*$, $A: \Omega_h \rightarrow \Omega_h$. Тогда разностная схема устойчива и имеют место равенства

$$\|y_{n+1}\|_1^2 + \sum_{k=1}^n 2\tau^2(\sigma_1 - \sigma_2)\|y_{i,k}\|_1^2 = \|y_1\|_1^2, \quad (14)$$

$$\|y\|_1^2 = \frac{1}{2}(\|y\|^2 + \|\tilde{y}\|^2) + \frac{1}{2}\tau^2(\sigma_1 + \sigma_2 - 1)\|y_t\|^2. \quad (15)$$

Из (14), (15) следует, что схема L_2 -консервативна при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$.

Теорема 2. При $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{4}$ схема (13) консервативна, L_2 -консервативна и имеют место энергетические равенства

$$\left(\frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}), 1\right) = \left(\frac{1}{2}(y_0 + y_1), 1\right), \quad (16)$$

$$\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right\| = \left\|\frac{1}{2}(y_0 + y_1)\right\|.$$

Замечание 1. При $\tilde{y} = \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})$ схема (13) эквивалента двухслойной схеме $\tilde{y}_t + A\tilde{y}^{(1/2)} = 0$.

5. Рассмотрим один из возможных подходов к построению явных L_2 -консервативных трехслойных разностных схем для нелинейного уравнения Кортевега-де Фриса. При построении консервативной схемы для нелинейного уравнения наряду с интегроинтерполяционным методом [8] воспользуемся усреднением по Стеклову функции u^2 [10]:

$$u^2 - \frac{1}{u_+ - u} \int_u^{u_+} u^2 du = \frac{1}{3} \frac{(u^3)_x}{u_x} = \frac{1}{3}(u_+^2 + uu_+ + u^2), \quad (17)$$

где $u_{\pm} = u(x_{i \pm 1/2}, t)$, $t \in \omega_{\tau}$. Используя (17), построим явную трехслойную схему [5] второго порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$

$$y_i^* + Ay = 0, \quad Ay = \bar{y}A_1y + \beta A_2y. \quad (18)$$

Здесь нелинейный оператор A определяется формулами (9), (10), $\bar{y} = (y_+ + y_-)/3$. Так как разностное уравнение (18) может быть записано в дивергентном виде, то очевидно, что первое из соотношений (16) выполняется, т.е. разностная схема (18) является консервативной.

Теорема 3. Нелинейная разностная схема (18) L_2 -консервативна, и ее решение удовлетворяет сеточному аналогу $E_{1_h}(t) = E_{1_h}(0)$, $t \in \omega_{\tau}$, интегрального закона сохранения (2).

Доказательство. Покажем, что, как и в случае дифференциальной задачи (см. равенства (4)), $(Ay, y) = 0$. Для этого достаточно убедиться в

том, что $(\bar{y}A_1y, y) = 0$. Используя тождества $(y, v_x) = -(y_x, v)$, $\bar{y}y_x = (yy_x + (y^2)_x)/3$, получим,

$$\begin{aligned} (\bar{y}A_1y, y) &= (\bar{y}y_x, y) = \\ &= \frac{1}{3}((yy_x, y) - (y^2, y_x)) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Умножая теперь уравнение (18) скалярно в Ω_h на $2\tau y$ и применяя свойство (19), приходим к требуемому результату. Теорема доказана.

6. Для аппроксимации уравнения КдФ рассмотрим теперь трехслойные схемы с весами

$$y_i^* + \bar{y}^{(\sigma, \sigma)} y_x^{(\sigma, \sigma)} + \beta y_{xxx}^{(\sigma, \sigma)} = 0. \quad (20)$$

Теорема 4. Разностная схема (20) с периодическими по пространству решениями консервативна, L_2 -консервативна и для ее решения имеют место следующие сеточные аналоги дифференциальных законов сохранения (4):

$$\begin{aligned} E_k^{(\sigma)}(t) &= E_k^{(\sigma)}(0), \quad k = 1, 2, 3; \quad t \in \omega_{\tau}, \\ E_2^{(\sigma)} &= E_3^{(\sigma)}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$E_1^{(\sigma)} = \left(\frac{\hat{y} + y}{2}, 1\right), \quad (22)$$

$$E_2^{(\sigma)} = \frac{\|\hat{y}\|^2 + \|y\|^2}{2} + \tau^2\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\|y_t\|^2,$$

$$E_3^{(\sigma)} = \left\|\frac{\hat{y} + y}{2}\right\|^2 + \tau^2\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\|y_t\|^2. \quad (23)$$

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3. L_2 -консервативность схемы следует из формул (22), (23)

соответственно при $\sigma = \frac{1}{2}$ и $\sigma = \frac{1}{4}$.

Энергетические соотношения (21) являются также априорными оценками соответственно при $\sigma \geq \frac{1}{2}$ и $\sigma \geq \frac{1}{4}$, причем равенство (21) при $k = 3$

можно интерпретировать как априорную оценку, полученную для разностного решения в полудисcrete узлах $y_{n+1/2} = \frac{y_n + y_{n+1}}{2}$.

Замечание 2. Используя идею представления конвективных слагаемых в дивергентном и недивергентном виде, можно построить следующий класс L_2 -консервативных разностных схем вида:

$$y_i^* + \frac{1}{3}(yy_x^{(\sigma_1, \sigma_2)} + (yy^{(\sigma_1, \sigma_2)})_x) + \beta y_{xxx}^{(\sigma_1, \sigma_2)} = 0, \quad (24)$$

который уже не является нелинейным. При $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ они совпадают с явной схемой (18). На основании тождества $(y, v_x) = -(y_x, v)$, $y, v \in \Omega_h$

$$(yy_x^{(\sigma_1, \sigma_2)}) + (yy_x^{(\sigma_1, \sigma_2)})_x y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = 0.$$

Следовательно, в силу теоремы 1 при $\sigma_1 \geq \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 \geq 1$ для решения разностной задачи (24), (7) имеет место априорная оценка (14). Согласно теореме 4, схема (20) L_2 -консервативна при $\sigma_1 = \sigma_2 = 1/4$, относительно функционала $E_3^{(1/4)}(t)$.

Замечание 3. К сожалению, схема (20) утратила свойство консервативности. Однако ее можно рассматривать как способ линеаризации

$$v_t + \frac{1}{3}(v^k v_x^{k+1} + (v^k v_x^{k+1})_x) + \beta v_{xx}^{k+1} = 0$$

нелинейного алгоритма (20) при $v = y^{(\sigma_1, \sigma_2)}$. Если итерационный процесс сходится, то он и дает решение консервативной и L_2 -консервативной схемы (20).

Замечание 4. Приведем L_2 -консервативную схему для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad k \geq k_0 > 0, \quad (25)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (26)$$

Пусть

$$E(t) = \int_0^l u^2(x, t) dx + 2 \int_0^l \int_0^l k(x, t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt. \quad (27)$$

Умножая уравнение (25) скалярно на $2u$, получим интегральный закон сохранения

$$E(t) = E(0). \quad (28)$$

Нетрудно показать, что для консервативной разностной схемы с весами

$$y_i = (\alpha y_x^{(\sigma)})_x, \quad y_0 = y_N = 0$$

сеточный аналог (28) имеет место при $\sigma = \frac{1}{2}$ [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского и Белорусского фондов фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уизем Дж. Линейные интегральные волны. М.: Мир, 1977.
2. Korteweg D.J., de Vries G. // Phil. Mag. 1895. V. 39. № 5. P. 422–443.
3. Березин Ю.А. Численное исследование нелинейных волн в разреженной плазме. Новосибирск: Наука, 1977.
4. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
5. Zabusky N.J., Kruskal M.D. // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. № 6. P. 240–243.
6. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
7. Туретаев И.Д. // ЖВМиМФ. 1992. Т. 32. № 8. С. 1273–1290.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
9. Гулин А.В., Дегтярев С.Л. // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1994. № 3. С. 23–29.
10. Абрашин В.Н. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 7. С. 1107–1119.