

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

ВЛИЯНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ НА ИСПАРИТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС ПРИ МОДУЛЯЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ НАГРЕВА

© *И.Н. Карташов, В.И. Мажукин, В.В. Перебийнос, А.А. Самохин*

Институт математического моделирования РАН
125047, Москва, Мясуская пл., 4-а
Институт общей физики РАН
117942, Москва, ул. Вавилова, 38

Исследуется влияние одномерных газодинамических возмущений в потоке пара на испарительный процесс под действием модулированного источника нагрева. Показано, что при дозвуковых скоростях потока такие возмущения оказывают существенное влияние на зависимость интенсивности испарения от колебаний температуры поверхности. Усиливается также квазирезонансный характер поведения температуры поверхности в зависимости от частоты модуляции. Влияние газодинамических эффектов на испарительный процесс ослабевает при $M \rightarrow 1$ в потоке пара.

EFFECT OF GAS-DYNAMIC PERTURBATIONS ON VAPORISATION PROCESS DUE TO MODULATED HEAT SOURCE

I.N. Kartashov, V.I. Mazhukin, V.V. Perebeinos, A.A. Samokhin

Institute of mathematical modeling RAS
125047, Moscow, Miuskaia sq., 4-a
Institute of general physics RAS
117942, Moscow, Vavilova st., 38

Effect of gas-dynamic perturbations in vapour flow on vaporisation process due to modulated heat source is investigated. It is shown, that in subsonic flow such perturbations significantly change vaporisation dynamics in its dependence on surface temperature. Quasi-resonant dynamics of surface temperature versus modulation frequency dependence becomes more pronounced. These effects are diminished when Mach number approaches unity.

1. Введение

Испарение относится к числу широко известных физических явлений, изучение которых продолжается уже много лет (см. [1-23] и цитированную там литературу). Теоретическое описание испарительного процесса существенно осложняется принципиальной неравновесностью этого явления, поэтому его многие аспекты остаются недостаточно изученными.

Неравновесность этого процесса проявляется не только в нарушении межфазного равновесия и в отличии теплоты перехода L_{ne} , потоков массы g_m , импульса g_i и энергии g_e от их равновесных значений L , $g_m=g_e=0$ и $g_i=p_s(T_s)$, где $p_s(T_s)$ обозначает давление насыщенного пара при температуре поверхности T_s . Конденсированная и газовая фазы при этом также находятся в неравновесном (метастабильном) состоянии - перегретом и переохлажденном соответственно. Кроме того, в потоке пара на расстоянии нескольких длин свободного пробега от поверхности (кнудсеновский слой - далее КС) существенно нарушено газокинетическое равновесие, так что поведение пара в этой области не может быть описано в рамках механики сплошных сред.

Подробное исследование кинетики испарения необходимо, в частности, для корректной формулировки граничных условий в газодинамических задачах, сопряженных с фазовыми переходами [3,4]. Сравнительный анализ нескольких модельных подходов к этой проблеме изложен в [5,6], где обращено внимание на несоответствие в различных моделях испарительного скачка положений экстремумов испарительных потоков массы и импульса в зависимости от числа Маха на внешней стороне КС. Поведение конденсированной фазы при этом не рассматривалось, поскольку температура поверхности считалась заданной.

Реакция испарительного процесса на гармоническую модуляцию интенсивности нагрева исследовалась в [4,7], где было установлено, что отклик температуры поверхности фазового раздела имеет квазирезонансный характер в зависимости от частоты модуляции. Этот результат был получен в предположении постоянства числа Маха $M=1$ на внешней стороне испарительного КС. При $M<1$ величину M уже нельзя считать постоянной, что связано с обратным влиянием газодинамического потока на процесс испарения при изменении температуры поверхности раздела [3].

В настоящей работе исследуется реакция испарительного процесса на гармоническую модуляцию интенсивности нагрева в сопряженной задаче с учетом газодинамических эффектов, которые приводят к изменению числа Маха на внешней стороне КС.

2. Постановка задачи

1. Сопряженная модель. Математическое описание испарения вещества в трансзвуковых режимах, как и большинство сложных проблем, производится с использованием ряда упрощающих предположений. Основными из них являются следующие:

1. Процессы рассматриваются в одномерном по пространству приближении.
2. Испаряющаяся конденсированная среда характеризуется постоянными значениями плотности ρ_1 , теплоемкости c и температуропроводности χ .
3. Поведение конденсированной среды описывается в рамках уравнения теплопроводности.
4. Поток пара с плотностью ρ , давлением p и скоростью u считается идеальным газом. Его движение при выполнении условия адиабатичности описывается уравнениями неразрывности и Эйлера.

В подвижной системе координат, связанной с фронтом испарения, сопряженная модель записывается следующим образом:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + v \frac{\partial T_1}{\partial z} - \chi \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = 0, \quad z < 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial z} = 0, \quad -\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial z} \right) (p \rho^{-\gamma}) = 0, \quad z > 0. \quad (2)$$

2. Граничные условия на границе раздела фаз. На границе раздела фаз $z=0$ для сопряженной модели (1),(2) выписываются три закона сохранения для потоков массы, импульса, энергии и два дополнительных соотношения, характеризующих степень газокINETической неравновесности процесса испарения:

$$g_m = \rho_l v = \rho u, \quad (3)$$

$$g_i = \rho_l v^2 + p_l = \rho u^2 + p, \quad (4)$$

$$g_e = g_m \left(H_l(T_s) + \frac{v^2}{2} \right) - c_p \rho_l \chi \frac{\partial T_l}{\partial z} + I = g_m \left(H_g(T) + \frac{u^2}{2} \right), \quad (5)$$

$$T = T(T_s, M), \quad p = p(T_s, M), \quad (6)$$

где $H_l(T_s)$ и $H_g(T)$ – энтальпии конденсированной среды и пара с температурами T_s и T , I – интенсивность поверхностного источника нагрева, $M = u/u_c$ – число Маха, $u_c^2 = \gamma p / \rho$ – локальная скорость звука. Конкретный вид выражений (6) будет обсужден ниже.

Преобразуем выражение (5), выделив в нем явным образом термодинамическую неравновесность. Учитывая, что в условиях равновесия на границе раздела фаз выполняются равенства $u=v=0$ и $T_s=T$, разность энтальпий $H_l(T_s)$ и $H_g(T_s)$ представляет собой [15] равновесную теплоту перехода $L = H_g(T_s) - H_l(T_s)$. С появлением потока вещества через границу раздела фаз происходит нарушение условий термодинамического равновесия. Скорости u и v при этом становятся отличными от нуля, а температура поверхности конденсированной среды T_s оказывается не равной температуре пара T на внешней стороне КС. Эффективная (неравновесная) теплота испарения L_{ne} в (5) при этом равна

$$L_{ne} = L(T_s) + c_p(T - T_s) + u^2/2(1 - \rho^2/\rho_l^2), \quad (7)$$

где c_p – теплоемкость пара при постоянном давлении. Последний член в правой части (7) является пренебрежимо малым вдали от критической точки T_c из-за малой плотности пара ρ по сравнению с плотностью конденсированной среды $\rho_l \gg \rho$, и по этой причине в дальнейшем не будет учитываться. Следует иметь в виду, что величина $L(T_s)$ может несколько отличаться от равновесной теплоты перехода при температуре T_s из-за отличия давления в конденсированной среде $p_l < p_s$ от давления насыщения $p_s(T_s)$.

С учетом полученного выражения для неравновесной теплоты испарения L_{ne} (7), граничное условие, характеризующее закон сохранения энергии на границе раздела фаз $z=0$, может быть представлено в виде

$$c_p \rho_l \chi \frac{\partial T_l}{\partial z} + \rho_l v L_{ne} = I. \quad (8)$$

В квазиравновесном пределе $M = u/u_c \ll 1$ величина L_{ne} совпадает с L , поскольку $L_{ne} - L = c_p(T - T_s) + u_c^2 M^2/2$, а различие между T_s и T также стремится к нулю при уменьшении M . В случае $M=1$ вклад дополнительных членов в (7) оказывается сравнительно малым из-за их взаимной компенсации, так что зависимость L_{ne} от числа Маха и температуры поверхности вдали от критической точки можно считать относительно слабой.

Несмотря на очевидность формулы (7) для L_{ne} (она непосредственно следует из общеизвестных законов сохранения) в [8-14] приводятся другие выражения для потока энергии,

уносимой с испаряющейся поверхности. Похожее на (7) выражение для неравновесной теплоты перехода L_{ne} содержится в [8] (формула (4а)): $L_{ne} = L_v + T_g^2 R_g / 2 M_g - T_L C_{pL} + v_g^2 / 2$, где T_g , v_g - температура и скорость на внешней стороне КС, T_L , M_g - температура поверхности и молекулярный вес испаряющейся жидкости, R_g - газовая постоянная, а C_{pL} - удельная теплоемкость пара внутри КС при постоянном давлении. Однако состояние газа внутри КС является неравновесным, так что физический смысл величины C_{pL} оказывается неопределенным. В [9] на с. 95-96 величина L_{ne} без учета температурного скачка в КС и при $M=1$ представляется в виде $\lambda - RT/2A$, где λ - удельная теплота испарения при 0 К, A - атомный вес металла. В том же приближении в [10] в формуле (1.5) $L_{ne} = L_{исп} + u^2 / 2$, где $L_{исп}$ - удельная теплота испарения. При учете температурного скачка в [11] и [12] соответственно $L_{ne} = L - (c - 0.67 c_p) T_s + u^2 / 2$, где L - теплота перехода, а коэффициент 0.67 учитывает температурный скачок в КС $T = 0.67 T_s$, и $L_{ne} = (\lambda_1 + k(2.5T - 3T_0) + mu^2 / 2) / m$, где λ_1 - энергия испарения в расчете на одну частицу с массой m . В [13] в формуле (3) приведено еще одно выражение $L_{ne} = p_s \Delta H / RT(1 + \gamma) + u^2 / 2$, где ΔH - удельная теплота испарения. В [14] при выводе выражения для L_{ne} из соответствующих законов сохранения сделано дополнительное предположение о сохранении величины $3kT/m + u^2 / 2 = 3kT_0/m + v^2 / 2$, справедливость которого не является очевидной.

Эти разночтения связаны, в частности, с непоследовательным учетом неравновесности испарительного процесса и использованием неадекватных определений для равновесной теплоты перехода, которые не совпадают с общепринятым [15]. В [16], [17] закон сохранения энергии на фазовом переходе формулируется по аналогии с энергетическими соотношениями на ударных волнах в газовых средах. В результате этого основная доля затрат на испарение, связанная с удельной теплотой фазового перехода, оказалась не учтенной.

3. Стационарное решение сопряженной задачи

Система уравнений (1),(2), дополненная граничными условиями (6),(8) и $T(-\infty) = T_\infty$, $M(+\infty) = M_\infty$, допускает при $l = \text{const}$ стационарное решение:

$$\rho = \text{const}, \quad p = \text{const}, \quad u = \text{const}, \quad (9)$$

$$T_l(z) = T_s + \Delta T (\exp(vz / \chi) - 1), \quad \Delta T = T_s - T_\infty, \quad l = g_m (L_{ne} + c \Delta T). \quad (10)$$

Из (10) видно, в частности, что одно и то же значение скорости фронта $v = u_c M \rho / \rho_l$ может достигаться при различных значениях M , T_s и l . Если T_s фиксировано, то уменьшение M приводит к уменьшению v и l и увеличению стационарной глубины прогрева конденсированной фазы, которая пропорциональна отношению χ/v . В стационарном режиме M и T_s могут рассматриваться как независимые параметры, значения которых фиксируются заданием величин M_∞ и l . Для случая зависящей от времени интенсивности l связь между M и T_s определяется структурой газодинамического решения на внешней стороне КС.

4. Нестационарные решения линеаризованного варианта сопряженной задачи

1. Газодинамический отклик на модуляцию температуры поверхности. Рассмотрим газодинамическую задачу [3,20] о линейном отклике испарительного процесса на малую гармоническую модуляцию температуры поверхности конденсированной фазы $\rho \delta T_s \sim \exp(i\omega t)$. В установившемся режиме все возмущения имеют такую же зависимость от времени, которая в дальнейшем будет опускаться. Система газодинамических уравнений (2) и граничных условий (6) в линейном приближении принимает вид

$$i\omega \rho + u \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad i\omega \delta u + u \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial z} = 0, \quad \left(i\omega + u \frac{\partial}{\partial z} \right) (\delta p - u_c^2 \delta \rho) = 0, \quad z > 0, \quad (11)$$

$$\frac{\delta p}{p} = \bar{p} \frac{\delta M}{M} + \bar{p}_s \frac{\delta T_s}{T_s}, \quad \frac{\delta u}{u} = \left(1 + \frac{\bar{T}}{2}\right) \frac{\delta M}{M} + \frac{1}{2} \frac{\delta T_s}{T_s}, \quad z=0, \quad (12)$$

где

$$\bar{p}_s = \frac{\partial \ln p_s}{\partial \ln T_s}, \quad \bar{p} = \frac{\partial \ln p}{\partial \ln M}, \quad \bar{T} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln M}.$$

Для возмущений скорости δu , давления δp и плотности $\delta \rho$ в потоке испаренного вещества из (11) получаются следующие выражения:

$$\frac{\delta p}{p} = A_1 e^{-ik_1 z} + A_2 e^{-ik_2 z}, \quad \frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{\delta p}{\rho u_c^2} + A_3 e^{-ik_3 z}, \quad \frac{\delta u}{u} = \frac{1}{\gamma M} \left(A_1 e^{-ik_1 z} - A_2 e^{-ik_2 z} \right), \quad (13)$$

где волновые числа k_1 , k_2 и k_3 определяются соотношениями

$$k_1 = \omega / (u + u_c), \quad k_2 = \omega / (u - u_c), \quad k_3 = \omega / u. \quad (14)$$

При $z=0$ из (13) для A_i следует

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta p}{p} + \gamma M \frac{\delta u}{u} \right), \quad A_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta p}{p} - \gamma M \frac{\delta u}{u} \right), \quad A_3 = \frac{\delta \rho}{\rho} - \frac{\delta p}{\rho u_c^2}. \quad (15)$$

Поскольку в рассматриваемой задаче подразумевается отсутствие волн, идущих из бесконечности, то в дозвуковом потоке $M < 1$ величина $A_2 = 0$. Остальные коэффициенты, A_1 и A_3 , определяются граничными условиями (12):

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(\bar{p}_s + \frac{\gamma M}{2} \right) \frac{\delta T_s}{T_s} + \frac{1}{2} \left(\bar{p} + \gamma M + \bar{T} \frac{\gamma M}{2} \right) \frac{\delta M}{M}, \quad (16)$$

$$A_3 = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \bar{p}_s - 1 \right) \frac{\delta T_s}{T_s} + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \bar{p} - \bar{T} \right) \frac{\delta M}{M},$$

где было учтено, что отношения p/p_s и T/T_s зависят только от M . Модуляция числа Маха δM определяется условием $A_2 = 0$, которое дает:

$$T_s \frac{\delta M}{\delta T_s} = \alpha = \frac{M(2\bar{p}_s - \gamma M)}{\gamma M(2 + \bar{T}) - 2\bar{p}}. \quad (17)$$

Явный вид соотношений (16), (17) зависит от конкретной формы испарительных граничных условий (6). Если потоки массы g_m и импульса g_i имеют экстремум при $M=1$, то в этой точке $\bar{p} = -5/4$ и $\bar{T} = -1/2$ для идеального пара с $\gamma=5/3$. В этом случае [3] $\alpha = (6\bar{p}_s - 5)/15 \neq 0$, однако величины A_1 и A_3 перестают зависеть от δM , поскольку коэффициенты перед $\delta M/M$ в (16) при $M \rightarrow 1$ снизу обращаются в нуль [20].

В сверхзвуковом потоке k_1 и k_2 в (14) имеют одинаковые знаки, и поэтому для использования условия $A_2=0$ уже нет оснований. Вместо этого условия можно наложить требование $\delta M=0$, которое предполагает отсутствие обратного влияния газодинамических возмущений на испарительный процесс, т.е. независимость поведения конденсированной фазы от внешней газодинамической задачи.

2. Нестационарная задача испарения с учетом газодинамического влияния. Поведение конденсированной фазы при испарении под действием модулированного источника наг-

рева $I + \delta I \exp(i\omega t)$ с условием $\delta M = 0$ рассматривалось в [4,7]. При $\delta M \neq 0$ задача о поведении конденсированной фазы формально может быть сведена к случаю [4,7], если учесть дополнительную температурную зависимость, обусловленную модуляцией M (17).

В системе координат, связанной с возмущенным фронтом испарения, движущимся со скоростью $v + \delta v$, $\delta v = \delta g_m / \rho_l$, линеаризованная задача для возмущения температуры конденсированной среды δT_l имеет вид

$$i\omega \delta T_l + v \frac{\partial \delta T_l}{\partial z} + \delta v \frac{\partial T_l}{\partial z} - \chi \frac{\partial^2 \delta T_l}{\partial z^2} = 0, \quad z < 0, \quad (18)$$

$$\delta I = c\rho_l \chi \frac{\partial \delta T_l}{\partial z} + \rho_l \delta(v L_{ne}), \quad z = 0, \quad (19)$$

где T_l – решение стационарной задачи (10), $\delta v = v' \delta T_s$, $\delta(v L_{ne}) = (v L_{ne})' \delta T_s$, а штрих обозначает производную по температуре поверхности с учетом зависимости (17), т.е. $f'(T_s, M) = \partial f / \partial T_s + (\alpha / T_s) \partial f / \partial M$. Из (18) и (19) для температуры поверхности $\delta T_s = \delta T_l(0)$ следует

$$\frac{I}{\delta I} \frac{\delta T_s}{T_s} = N_{ad}(T_s, M) \psi(\omega, T_s, M), \quad N_{ad} = \frac{(L_{ne} + c\Delta T)v}{T_s((L_{ne} + c\Delta T)v)^2},$$

$$\psi(\omega, T_s, M) = \left[1 - d + \left((1 + i\beta)^{1/2} - 1 \right) \left(\frac{d}{2E} - i \frac{2d}{\beta} \right) \right]^{-1}, \quad (20)$$

где

$$E = \frac{\Delta T v'}{v}, \quad d = \frac{c\Delta T v'}{((L_{ne} + c\Delta T)v)}, \quad \beta = \frac{4\omega\chi}{v^2}.$$

Формулы (20) решают поставленную задачу об определении линейного отклика температуры поверхности фазового раздела δT_s на модуляцию источника нагрева δI с учетом одномерных газодинамических эффектов, связанных с модуляцией M . Для модуляции потока импульса δg_i , которая совпадает с модуляцией давления отдачи на поверхности раздела, имеем

$$\delta g_i = \delta T_s \left(\frac{\partial}{\partial T_s} + \frac{\alpha}{T_s} \frac{\partial}{\partial M} \right) g_i = \frac{\delta I}{I} T_s N_{ad} \psi \left(\frac{\partial}{\partial T_s} + \frac{\alpha}{T_s} \frac{\partial}{\partial M} \right) g_i. \quad (21)$$

Выражение (21) отличается от формулы (6.1) из [4] наличием дополнительного члена с α , который имеет знак, противоположный первому члену.

5. Анализ и обсуждение результатов моделирования

1. Неравновесная теплота перехода и основные параметры отклика α , E , d . Для испарительных граничных условий [1,5,6], которые обеспечивают экстремальность потоков массы и импульса при $M=1$, выражения (20), (21) при $M \rightarrow 1$ совпадают с полученными ранее в [4,7], поскольку в этой точке производные по M от g_m и g_e обращаются в нуль. Модель граничных условий [18,19] не дает такого совпадения из-за отличия в положении экстремумов потоков от $M=1$.

Различие в граничных условиях сказывается и на поведении неравновесной добавки к теплоте перехода $\Delta L = L_{ne} - L = c_p(T - T_s) + \gamma k T M^2 / 2m$. На рис.1 показана величина $\Delta L / c_p T_s$ в зависимости от M для различных моделей граничных условий: модель Крута [1] (далее модель-1), в которой положение экстремумов потоков совпадает с $M=1$, модель Анисимова-Найта [18,

19] (далее модель-2), в которой положение экстремумов потоков не совпадает с $M=1$ и предложенная в [5] модель-3 (в обозначениях [5] - модель-с), обеспечивающая экстремальное поведение потоков при $M=1$ за счет предположения, что неравновесная часть функции распределения не содержит явной зависимости от газодинамических параметров. Заметим, что основной вклад в ΔL дает член $\Delta L_1 = c_p(T - T_s)$, который определяет не только величину, но и знак ΔL . Если не учитывать ΔL_1 и оставлять в L_{ne} только положительный член $u^2/2$, как это делается в модели изотермического скачка [10, 21], то для $\Delta L/c_p T_s$ вместо -0.15 при $M=1$ получается величина 0.21, что оказывается хуже широко используемого [3,4,19,22] простейшего приближения, когда ΔL просто полагается равным нулю.

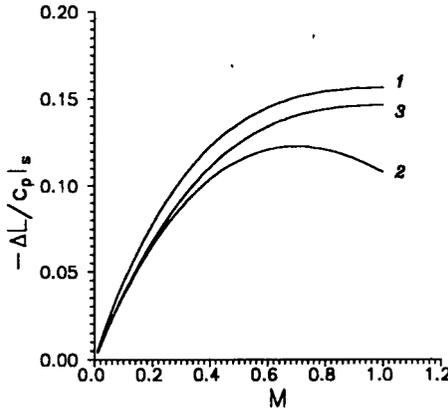


Рис.1. Зависимость неравновесной добавки к теплоте перехода $-\Delta L/c_p T_s$ от M при $\tau = T_s/T_b = 1$ для различных моделей: 1, 2, 3.

В формуле (20) для δT_s явно выделен фактор N_{ad} , определяющий величину адиабатического отклика температуры поверхности. Нормированная на единицу в пределе адиабатически малых частот комплексная функция отклика ψ характеризует амплитудно-фазовую зависимость δT_s от частоты модуляции. Общий вид выражений для N_{ad} и ψ совпадает с полученным ранее [4,7], однако содержащиеся в них безразмерные коэффициенты d и E имеют другие значения из-за дополнительной температурной зависимости, обусловленной δM (17).

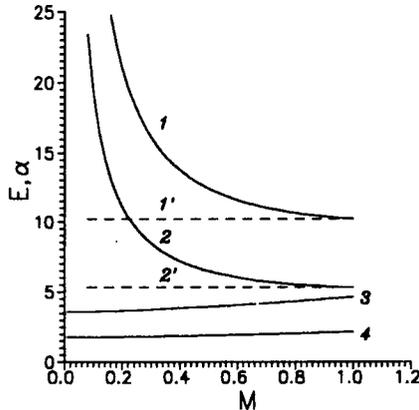


Рис.2. Зависимость коэффициентов E (кривые 1, 1', 2, 2') и α (кривые 3, 4) от M для модели-3 с учетом (сплошная линия) и без учета (штриховая линия) вклада от δM при $\tau=1$ (кривые 1, 1', 3) и $\tau=2$ (кривые 2, 2', 4).

Как уже отмечалось ранее [3], $\delta M \neq 0$ при $M \rightarrow 1$ снизу. Зависимость отношения $\alpha = T_s \delta M / \delta T_s$ от M показана на рис.2 для одной модели-3, поскольку в данном случае различие между моделями 1-3 не очень существенно, и двух температур $T_s = T_b$ и $2T_b$. Температурная зависимость α в основном определяется членом $\bar{p}_s = \eta T_b / T_s$, то есть α с ростом температуры уменьшается. Отношение α не зависит от частоты модуляции, в отличие от величины $\text{Im} \delta M / \delta T_s = \alpha N_{ad} \psi$, где комплексная функция отклика ψ имеет квазирезонансную частотную зависимость. Функцию отклика удобно записать через ее обратную величину ψ^{-1} :

$$\psi^{-1} = 1 - d \left(1 + \frac{1 - \beta_1}{2E} - \frac{2\beta_2}{\beta} \right) + id \left(\frac{\beta_2}{2E} + \frac{2}{\beta} (1 - \beta_1) \right) = |\psi|^{-1} \exp(-i\varphi), \quad (22)$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{\text{Im } \psi}{\text{Re } \psi}, \quad \beta_1 = \left(\frac{(1 + \beta^2)^{1/2} + 1}{2} \right)^{1/2}, \quad \beta_2 = \left(\frac{(1 + \beta^2)^{1/2} - 1}{2} \right)^{1/2}.$$

Величина максимума модуля ψ_m удовлетворительно согласуется с приближенной аналитической оценкой [4], в которой ψ_m приравнивается значению $\psi_1(\omega_0)$ в точке ω_0 , где $\text{Im}(\psi^{-1})$ обращается в нуль:

$$\psi_m^{-1} \approx \psi_1^{-1}(\omega_0) = 1 - d \left(1 - (2E)^{-1/2} \right)^2, \quad \omega_0 \approx \frac{v^2 E}{\chi} \left(1 - (2E)^{-1/2} \right). \quad (23)$$

Для коэффициентов $E = \Delta T (\partial \ln g_m / \partial T_s + (\alpha / T_s) \partial \ln g_m / \partial M)$ и d также можно написать приближенные выражения, которые выявляют их качественную зависимость от T_s и M :

$$E = \frac{\Delta T}{T_s} \left(\bar{p}_s - \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{M} \left(\bar{p} + 1 - \frac{\bar{T}}{2} \right) \right) \approx \left(1 - \frac{0.15}{\tau} \right) \frac{\eta}{\tau} \left(1 + \frac{2\bar{p} + 2 - \bar{T}}{\gamma M (2 + \bar{T}) - 2\bar{p}} \right), \quad (24)$$

$$d^{-1} = 1 + \frac{Lne}{c\Delta T} + \frac{L'ne + c}{cE} \approx 1 + \frac{L}{c\Delta T} \approx \frac{\tau + 2.82}{\tau - 0.15}, \quad \tau = T_s / T_b. \quad (25)$$

Здесь и в дальнейшем при численных расчетах используются следующие значения теплофизических параметров конденсированной среды и пара:

$$\gamma = 5/3, \quad \rho_l = 10 \text{ г/см}^3, \quad \chi = 0.1 \text{ см}^2/\text{с}, \quad m = 3.4 \cdot 10^{-22} \text{ г}, \quad T_\infty = 300 \text{ К}, \quad p_b = 1 \text{ атм}, \quad T_b = 2023 \text{ К}, \\ c_p = 5k/2m, \quad c = 1.5 \cdot 10^6 \text{ эрг/г} \cdot \text{К}, \quad L = 9 \cdot 10^9 \text{ эрг/г}, \quad L/cT_b = 2.966, \quad \eta = 12.5.$$

Приближенное выражение (24) во всем диапазоне изменения τ от 1 до 2.5 и $0 < M \leq 1$ отличается от истинного значения E не более чем на 10%. Из (22) видно, что с ростом τ при $M = \text{const}$, как и в случае α , величина E убывает примерно обратно пропорционально температуре, а уменьшение M при $\tau = \text{const}$ приводит к росту E за счет газодинамических эффектов, определяемых последним членом в (25). В пределе при $M \rightarrow 0$ этот член в формуле (24) оказывается главным, что дает оценку для E в рамках модели-3:

$$E \approx \frac{0.29}{M} \frac{\eta}{\tau} \left(1 - \frac{0.15}{\tau} \right). \quad (26)$$

Зависимость отношения E от M при различных фиксированных значениях T_s с учетом и без учета дополнительного вклада от δM показана на рис.2.

На рис.3 показано поведение d в зависимости от температуры поверхности при $M = 0.1$ с учетом и без учета δM и при $M = 1$. Слабое различие между кривыми рис.3 свидетельствует о

том, что коэффициент d практически не зависит от M , и газодинамические эффекты влияют на него несущественно. Различие между кривыми 1 ($M=1$) и 2' ($M=0.1, \delta M=0$) связано в основном с изменением члена ΔL в этом диапазоне, в то время как отличие кривых 2' и 2 ($M=0.1, \delta M \neq 0$) обусловлено газодинамическими эффектами, которые в случае 2' не учитываются. Во всем рассматриваемом диапазоне изменения τ и M значение d с учетом и без учета δM отличается от приближенного значения (25) не более чем на 5% и 10% соответственно.

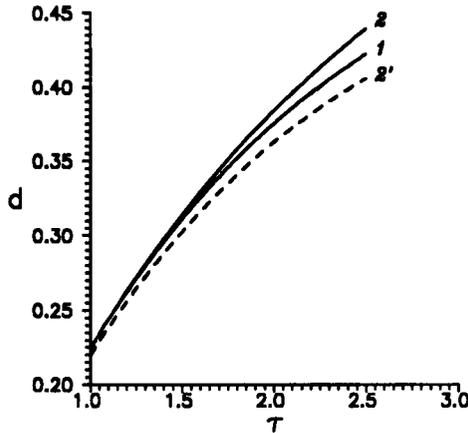


Рис.3. Зависимость величины d от τ для модели-3 с учетом (сплошная линия) и без учета (штриховая линия) вклада от δM при $M=1$ (кривая 1) и $M=0.1$ (кривые 2, 2').

Качественный анализ зависимостей d и E от M позволяет сделать вывод о том, что влияние газодинамических эффектов на поведение величин N_{ad} , ψ_m , ω_m вызвано в основном их зависимостью от коэффициента E .

2. Адиабатический отклик. Значение величины N_{ad} с хорошей точностью ($\approx 5\%$) описывается формулой

$$N_{ad}^{-1} = \frac{\tau E}{\tau - 0.15} + \frac{(c + L'_{ne})}{c(\tau - 0.15) + L_{ne}} \approx \frac{\eta}{\tau} \left(1 + \frac{2\bar{p} + 2 - \bar{T}}{\gamma M(2 - \bar{T}) - 2\bar{p}} \right). \quad (27)$$

Если не учитывать δM , то величина $N_{ad} = \tau/\eta$ не отличается по виду от своего выражения при $M=1$, т. е. N_{ad} в этом случае не зависит от M . При уменьшении M учет газодинамических эффектов приводит к уменьшению адиабатического отклика, поведение которого с учетом и без учета δM в зависимости от M при постоянной температуре $\tau=1$ показано на рис.4 (кривые 1, 1'). Согласно (26) и (27) в пределе $M \ll 1$ адиабатический отклик N_{ad} линейен по M :

$$N_{ad} = 3.5M\eta / \tau. \quad (28)$$

При фиксированной интенсивности различие в поведении N_{ad} с учетом и без учета δM при $M \ll 1$ оказывается еще более существенным, чем в случае фиксированной температуры. Это связано с тем, что при фиксированной температуре поверхности уменьшение M влечет за собой уменьшение интенсивности, а при фиксированной интенсивности уменьшение M приводит к росту T_s . Поэтому при одних и тех же M в случае $I = \text{const}$ адиабатический отклик N_{ad} будет больше, чем при $\tau = \text{const}$.

На том же рис.4 показана зависимость N_{ad} от M при двух фиксированных значениях интенсивности I , обеспечивающих значения температуры поверхности $\tau=1$ и $\tau=2$ при $M=1$, причем во втором случае приведены кривые с учетом (3) и без учета (3') δM , а в первом случае - только без учета (2') δM , поскольку при учете δM эта кривая практически совпадает со случаем постоянной температуры (1). Рост кривых (3') и (2') обусловлен ростом температуры поверхности. Однако следует иметь в виду, что наше рассмотрение справедливо при температурах поверхности $T_s < T_c \sim 3T_b$, что ограничивает область применимости кривых 2', 3, 3' на рис.4 значениями $M \geq 0.0002, 0.085$ и 0.085 соответственно, где температура поверхности достигает величины $\tau=2.5$, а значение N_{ad} при этом равно 0.2, 0.05 и 0.2.

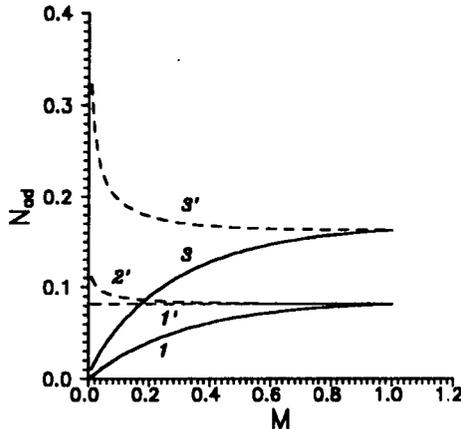


Рис.4. Зависимость адиабатического отклика N_{ad} от M для модели-3 с учетом (сплошная линия) и без учета (штриховая линия) вклада от δM при $\tau=1$ (кривые 1, 1') и при значениях $I=\text{const}$, соответствующих $\tau=1$ (кривая 2') и $\tau=2$ (кривые 3, 3') при $M=1$.

Зависимость N_{ad} от скорости испарения v при фиксированном значении числа Маха M определяется согласно (24) логарифмически слабым изменением температуры поверхности T_s в зависимости от v , поскольку

$$v = \frac{g_m}{\rho_l} = \frac{v_b}{\tau^{1/2}} \exp\left(\eta(1 - \tau^{-1})\right) \quad v_b(M) = v_0 M \left(\frac{T_s}{T}\right)^{1/2} \frac{p}{p_s},$$

$$v_0 = \frac{p_b}{p_s} \left(\frac{\gamma m}{k T_b}\right)^{1/2} \approx 4.5 (\text{с м/с}). \quad (29)$$

где $v_b(M)$ – зависящая от M скорость, при нормальной температуре кипения равная в рамках модели-3 соответственно 1.18, 1.06 и 0.38 см/с для $M=1, 0.5$ и 0.1 . При $v=\text{const}$ уменьшение M ведет к уменьшению N_{ad} , поскольку при этом увеличивается вклад члена с δM в производную потока массы по температуре. При этом производная $\delta N_{ad}/\delta v \sim N_{ad} \tau / (v \eta)$ изменяется меньше, чем сама функция N_{ad} , за счет роста τ .

На рис.5 показано поведение N_{ad} в зависимости от скорости испарения v при различных фиксированных значениях числа Маха M . Область применимости кривых 1, 2, 3 ограничена сверху значением температуры $\tau=2.5$, при котором скорости достигают значений $v \approx 1350$ см/с, 1210 см/с и 440 см/с для $M=1, 0.5$ и 0.1 соответственно, значения N_{ad} приблизительно равны 0.2, 0.17 и 0.06. При малых $v \approx 1$ см/с значения $N_{ad} \approx 0.08, 0.07$ и 0.03 для $M=1, 0.5$ и 0.1

соответственно. Отметим, что слишком малые значения скорости $v \ll 1$ при фиксированном M находятся за пределами данного рассмотрения.

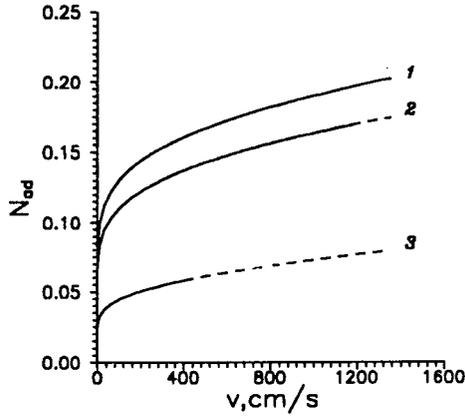


Рис.5. Зависимость адиабатического отклика N_{ad} от скорости фронта v для модели-3 при фиксированных значениях $M=1$ (кривая 1), $M=0.5$ (кривая 2) и $M=0.1$ (кривая 3). Штрихом показана область скоростей, соответствующих $\tau > 2.5$.

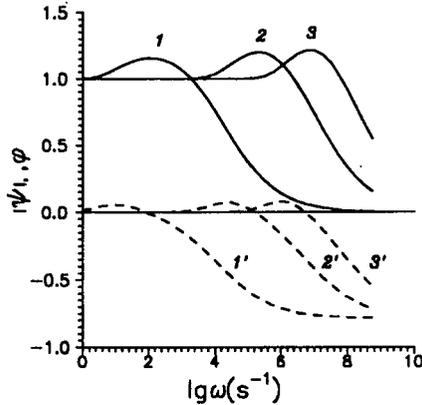


Рис.6. Зависимость модуля $|\psi|$ (сплошная линия) и фазы φ (штриховая линия) функции отклика ψ от логарифма частоты модуляции ω для модели-3 при $M=1$ и $\tau=1$ (кривые 1, 1'), $\tau=1.5$ (кривые 2, 2'), $\tau=2$ (кривые 3, 3').

3. Амплитудно-частотная зависимость функции отклика. Поведение модуля и фазы функции отклика ψ в зависимости от частоты модуляции при $M=1$ и различных значениях $T_s = \text{const}$ показано на рис.6. При изменении M вид этих зависимостей качественно не меняется, однако величины ψ_m , ω_m , ω_0 не остаются постоянными из-за изменения коэффициентов d и E .

Поскольку $d < 1 < 2E$, то из приближенной формулы (23), значения которой отличаются от ψ_m не более чем на 0.2%, видно, что увеличение E приводит к увеличению ψ_m до величины $\psi_m = (1-d)^{-1}$ при $M=0$. На рис. 7 показана зависимость максимума ψ_m с учетом и без учета δM от числа Маха M при различных фиксированных температурах τ . Так как d растет с ростом температуры, то значения $\psi_m = 1.287, 1.456$ и 1.624 соответственно для $\tau=1, 1.5$ и 2 с учетом δM при $M=0$ увеличиваются. В случае же $\delta M=0$ коэффициент E от M не зависит и, сле-

довательно, незначительное уменьшение величины ψ_m с уменьшением M обусловлено слабым убыванием d .

Качественное поведение ψ_m , описываемое (23) с учетом (24) и (25), свидетельствует о существовании слабо выраженного экстремума ψ_m по температуре при $M=\text{const}$, наличие которого объясняется конкурирующим влиянием роста d и $E^{-1/2}$ с возрастанием температуры или зависящей от температуры скорости. На рис.8 показано поведение ψ_m в зависимости от v при различных фиксированных числах Маха. Увеличение ψ_m с уменьшением M при $v=\text{const}$ связано с возрастанием E и d за счет газодинамических эффектов и роста τ соответственно. Отметим, что значение температуры $\tau=2.5$ достигается при скоростях $v=1350$ ($M=1$), 1210 ($M=0.5$) и 440 ($M=0.1$) см/с, при этом $\psi_m \approx 1.222, 1.256$ и 1.421 соответственно. Если $v=1$ см/с, то для этих же значений M величина ψ_m равна 1.156, 1.168 и 1.229.

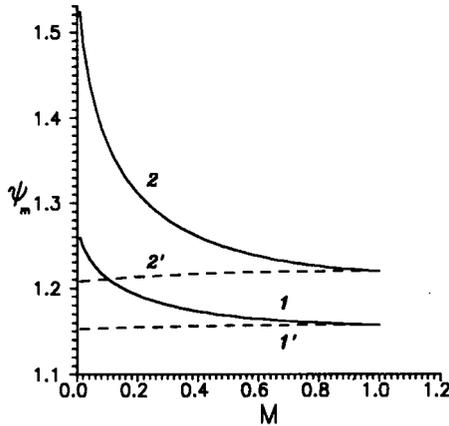


Рис.7. Зависимость максимума модуля функции отклика ψ_m от M для модели-3 с учетом (сплошная линия) и без учета (штриховая линия) вклада от δM при $\tau=1$ (кривые 1, 1') и $\tau=2$ (кривые 2, 2').

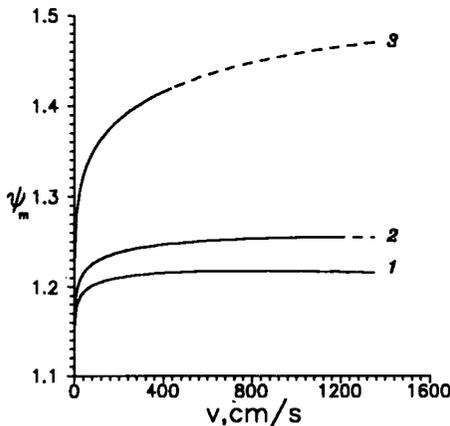


Рис.8. Зависимость максимума модуля функции отклика ψ_m от скорости фронта v для модели-3 при фиксированных значениях $M=1$ (кривая 1), $M=0.5$ (кривая 2) и $M=0.1$ (кривая 3). Штрихом показана область скоростей, соответствующих $\tau > 2.5$.

При фиксированной интенсивности возрастание ψ_m с уменьшением M вызвано не только уменьшением E , как в случае фиксированной температуры, но и дополнительным ростом d

за счет роста τ . Зависимость ψ_m от M с учетом и без учета δM при различных фиксированных интенсивностях показана на рис.9. При $\tau=2.5$ и $M=0.0002, 0.085$ значения ψ_m , вычисленные с учетом δM , равны соответственно 1.73 и 1.44 для кривых 1 и 2, которым при $M=1$ соответствуют температуры $\tau=1$ и 2.

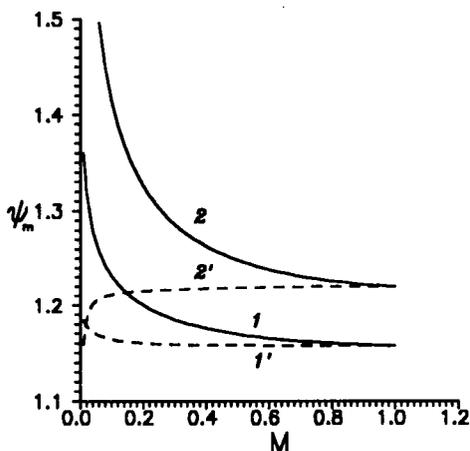


Рис.9. Зависимость максимума модуля функции отклика ψ_m от M для модели-3 с учетом (сплошная линия) и без учета (штриховая линия) вклада от δM при значениях $I=\text{const}$, соответствующих $\tau=1$ (кривые 1, 1') и $\tau=2$ (кривые 2, 2') при $M=1$.

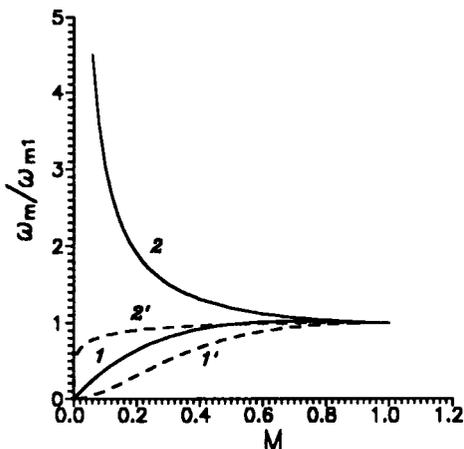


Рис.10. Зависимость нормированной частоты максимума ω_m/ω_{m1} от M для модели-3 с учетом (сплошная линия) и без учета (штриховая линия) вклада от δM при $\tau=1$ (кривые 1, 1') и значениях $I=\text{const}$, соответствующей $\tau=1$ (кривые 2, 2') при $M=1$.

Приближенная формула (23) с хорошей точностью ($\approx 0.1\%$) описывает поведение частоты ω_0 , при которой фаза $\varphi=0$, однако частота ω_m , соответствующая максимуму ψ , принимает на 10%-20% большие значения, что не сказывается, впрочем, на точности приближенного выражения (23) для ψ_m . Зависимость нормированной частоты ω_m/ω_{m1} от M с учетом и без учета δM показана на рис.10. Частота $\omega_{m1} \approx 137 \text{ с}^{-1}$ соответствует значению ω_m при $M=1$ и $\tau=1$. Зависимость частоты ω_{m1} от τ определяется соотношением $\omega_{m1} \approx 137 \exp(2\eta(1-\tau^{-1}))/\tau^2$, ко-

торое при $\tau=1.5$ и 2 дает соответственно $2.5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ и $9.2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$. Отметим, что нормированные кривые $(1, 1')$ ω_m/ω_{m1} не зависят от τ из-за факторизации зависимости ω_m по τ и M .

Для определения зависимости ω_m от M при фиксированной интенсивности выражение (23) с учетом (10) удобнее записать в виде

$$\omega_0 \approx \frac{I^2 E}{\rho_l^2 \chi (c \Delta T + L_{ne})^2}. \quad (30)$$

Поскольку при уменьшении M температура τ растет медленнее E , то поведение ω_m в (30) определяется в основном числителем. Слабое уменьшение ω_m с уменьшением M без учета δM связано с более быстрым ростом знаменателя в (30) $\sim (\tau+3)^2$ по сравнению с числителем $E \sim \tau$. На рис.10 также показана зависимость от M частоты ω_m , нормированной на значение $\omega_{m1}=137 \text{ с}^{-1}$, при фиксированной интенсивности, обеспечивающей температуру поверхности $\tau=1$ при $M=1$.

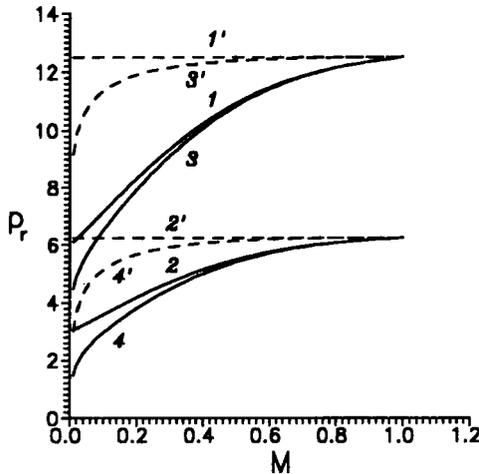


Рис.11. Зависимость давления отдачи $p_r = T_s \delta p / p \delta T_s$ от M для модели-3 с учетом (сплошная линия) и без учета (штриховая линия) вклада от δM при $\tau=1$ (кривые 1, 1'), $\tau=2$ (кривые 2, 2') и значениях $l = \text{const}$, соответствующих $\tau=1$ (кривые 3, 3'), $\tau=2$ (кривые 4, 4') при $M=1$.

Экспериментально удобно исследовать поведение отклика давления, а не температуры. В отличие от случая $M = \text{const}$, величина нормированного отклика давления отдачи с учетом $\delta M \neq 0$ связана с откликом температуры соотношением

$$p_r = \frac{\delta g_i}{g_i} \frac{T_s}{\delta T_s} = \bar{p}_s + \frac{\alpha}{M} \left(\bar{p} + \frac{2\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \right) \approx \frac{\eta}{\tau} \left(1 + \frac{2\bar{p} + \frac{4\gamma M^2}{1 + \gamma M^2}}{\gamma M(2 + \bar{T}) - 2\bar{p}} \right). \quad (31)$$

Такая запись явно выделяет дополнительный член в δg_i , содержащий α . Изменение давления отдачи за счет модификации коэффициентов N_{ad} и ψ отнесено в нормировочный множитель $g_i \delta T_s / T_s$.

Добавка в δg_i , обусловленная вкладом δM , дополнительно, по сравнению с $N_{ad} \psi$ уменьшает отклик давления отдачи, так как $\delta g_i / \delta M < 0$ при $M < 1$, и дробная добавка к единице в (31)

отрицательна. В пределе $M \ll 1$ эта добавка составляет примерно 0.5 по модулю, и формула (31) приближенно принимает вид

$$p_r = \frac{\bar{p}_s \gamma M}{\bar{p} + \gamma M} \approx 0.5 \frac{\eta}{\tau}. \quad (32)$$

На рис. 11 показаны зависимости нормированного отклика давления отдачи от M при двух фиксированных значениях температуры поверхности $\tau=1$ и 2 и соответствующих им при $M=1$ фиксированных значениях интенсивности нагрева. Учет газодинамических эффектов приводит к уменьшению отклика давления отдачи, причем в случае фиксированной интенсивности этот эффект более выражен за счет соответствующего роста температуры.

6. Заключение

Полученные в настоящей работе результаты показывают, что одномерные газодинамические эффекты могут существенно влиять на дозвуковой испарительный процесс при модуляции интенсивности нагрева δI . Это влияние обусловлено модуляцией числа Маха δM на внешней стороне КС, которое при $M < 1$ эффективно усиливает зависимость испарительного процесса от колебаний температуры поверхности δT_s .

Коэффициент пропорциональности α в соотношении $\delta M = \alpha \delta T_s / T_s$ для идеального газа является положительным и не зависит от частоты модуляции. По этой причине, в частности, решение рассматриваемой задачи для отклика температуры поверхности $\delta T_s = N_{ad} \psi T_s \delta I / I$ на модуляцию интенсивности с учетом газодинамических эффектов, связанных с $\delta M \neq 0$, не отличается по форме от случая $\delta M = 0$. Влияние газодинамических эффектов приводит к изменению входящих в N_{ad} и ψ коэффициентов, содержащих производные по температуре поверхности T_s от скорости фронта. В отклике давления отдачи $\delta g_i = g_i' \delta T_s$ производная g_i' также изменяется за счет дополнительного члена, содержащего α .

Неравновесная теплота перехода $L_{ne} = L + \Delta L$, учитывающая неравновесность стационарного испарительного процесса в граничном условии для потока энергии на поверхности конденсированной фазы, при изменении M от 0 до 1 меняется не очень сильно $L_{ne}(M=1)/L_{ne}(M=0) \approx 0.95$, а наличие в неравновесной добавке ΔL двух членов противоположного знака приводит к тому, что простейшее приближение, в котором ΔL вообще не учитывается, оказывается более точным, чем модель "изотермического" скачка [10,21].

Если газодинамические граничные условия на внешней стороне КС обеспечивают экстремальность потоков массы и импульса при $M=1$, то влияние газодинамических эффектов на процесс испарения в этой точке обращается в нуль, хотя при этом $\delta M \neq 0$. При уменьшении M величина α несколько уменьшается, однако роль газодинамических эффектов возрастает из-за увеличения относительного вклада члена с α в производную по температуре поверхности. Это приводит в итоге к уменьшению N_{ad} и росту квазирезонансного максимума модуля $|\psi(\omega_m)|$ функции отклика, причем положение этого максимума смещается в сторону низких частот при фиксированной температуре, и в сторону высоких частот при фиксированных интенсивностях.

Случай $M \ll 1$ требует дополнительного рассмотрения, в частности, из-за необходимости учитывать состояния с $M < 0$, т. е. процесс конденсации. В такой ситуации более удобным может оказаться другой выбор невозмущенного состояния системы, который не связан непосредственно с испарением или конденсацией. Отметим в заключение, что случаи $M \ll 1$ и $M < 0$ могут реализоваться в нестационарных режимах лазерного испарения в вакуум при возникновении сильного поглощения в потоке испаренного вещества над облучаемой поверхностью [3,4,23].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Crout. An application of kinetic theory to the problems of evaporation and sublimation of monatomic gases // J. Math. Physics, 1936, v. 15, p. 1-54.
2. D.A. Labuntsov, A. P. Krukov. Analysis of intensive evaporation and condensation // Int. J. Heat Mass Transfer, 1979, v. 22, p. 989-1002.
3. В.И. Мажукин, А.А. Самохин. Математическое моделирование фазовых переходов и образование плазмы при действии лазерного излучения на поглощающие среды // Сб. Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики. -М.; Наука, 1987, с.191-244.
4. А.А. Самохин. Фазовые переходы первого рода при действии лазерного излучения на поглощающие конденсированные среды // Труды ИОФАН. Действие лазерного излучения на поглощающие конденсированные среды.-М.; Наука, 1988, т. 13 с. 3-98.
5. В.И. Мажукин, П.А. Прудковский, А.А. Самохин. О газодинамических граничных условиях на фронте испарения // Математическое моделирование, 1993, т. 5, № 6, с. 3-10.
6. В.И. Мажукин, П.А. Прудковский, А.А. Самохин. Изменение энтропии на фронте испарения // Математическое моделирование, 1994, т. 6, № 11, с. 3-10.
7. А.А. Samokhin, A.P. Gus'kov. On the pressure behaviour in radiation-induced vaporization of metals // Phys. Lett. A, 1980, v. 77, p. 344-346.
8. A. Kar, J. Mazumder. Mathematical model for laser ablation to generate nanoscale and submicrometer-size particles // Phys. Rev. E, 1994, v. 49, № 1, p. 410-419.
9. С.И. Анисимов, Я.А. Имас, Г.С. Романов, Ю.В. Ходыко. Действие излучения большой мощности на металлы. -М.; Наука, 1970, 272 с.
10. Ю.Н. Зорин, О.Ю. Мальцев, К.Б. Павлов, М.А. Яковлев. К вопросу о резонансном взаимодействии концентрированного потока энергии с веществом // ПМТФ, 1986, № 1, с. 14-19.
11. С.И. Анисимов, М.И. Трибельский, Я.Г. Эпельбаум. Неустойчивость плоского фронта испарения при взаимодействии лазерного излучения с веществом. // ЖЭТФ, 1980, т. 78, вып. 4, с. 1597-1605.
12. Г.С. Романов, Ю.А. Станкевич. Расчет импульса отдачи, возникающего при действии оптического излучения на поглощающую преграду в воздухе // Физ. и хим. обработки материалов, 1981, № 4, с. 15-23.
13. M. Newstein, N. Solimen. Laser metal interaction in vacuum // IEEE J. of QE, 1981, v.17, №10, p. 2085-2091.
14. M. Aden, E. Beyer, G. Herziger, H. Kunze. Lazer-induced vaporization of a metal surface // J. Phys. D : Appl. Phys., 1992, v.25, № 1, p. 57-65.
15. Физический энциклопедический словарь // -М.; Советская энциклопедия, 1983.
16. В.Н. Зубов, В.М. Кривоцов, И.Н. Наумова, Ю.Д. Шмыглевский. О численном сравнении различных моделей испарения металла // ЖВМ и МФ, 1986, т.26, № 11, с. 1740-1743
17. В.Н. Зубов, В.М. Кривоцов, И.Н. Наумова, Ю.Д. Шмыглевский. Расчет взаимодействия лазерного излучения с алюминиевым сосудом и его парами // ЖВМ и МФ, 1980, т.20, № 6, с.1513-1522.
18. С.И. Анисимов. Об испарении металла, поглощающего лазерное излучение // ЖЭТФ, 1968, т.54, № 1, с. 339-342.
19. C.J. Knight. Theoretical Modeling of Rapid Surface Vaporization with Back Pressure // AIAA J., 1979, v. 17, № 5, p. 81-86.
20. И.Н. Карташов, В.И. Мажукин, В.В. Перебейнос, А.А. Самохин. Возмущение испарительного процесса при модуляции температуры перехода // Краткие сообщения по физике, 1995, № 7-8, с. 50-53.
21. В.И. Бергельсон, А.П. Голубь, И.В.Немчинов, С.П.Попов. Образование плазмы в слое паров, возникших под действием излучения ОКГ на твердое тело // Квантовая электроника, 1973, т.16, №4, с.20-27.
22. А.Г. Лескис, А.К. Титов, А.А. Юшканов. Установившееся радиальное движение разогреваемого излучением пара в вакуум от интенсивно испаряющейся частицы металла // ТВТ, 1995, т.33, №4, с. 578-582.
23. В.И. Мажукин, Г.А. Пестрякова. Математическое моделирование процессов поверхностного испарения лазерным излучением // Докл. АН СССР, 1984, т.278, № 4, с. 843-847.