

УДК 519.63

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. А. САМАРСКИЙ, В. И. МАЖУКИН, П. П. МАТУС

Неравномерные сетки часто используются в вычислительной практике при численном решении задач математической физики (задач в сложных нерегулярных областях, с негладкими решениями и др.). При переходе от равномерной сетки к неравномерной порядок локальной погрешности аппроксимации обычно понижается, что существенно сказывается на точности вычислительного процесса.

В [1] для одномерных нестационарных задач построены и исследованы различные классы конечно-разностных методов повышенного порядка аппроксимации на неравномерных прямоугольных сетках. В [2 — 4] полученные результаты обобщаются на многомерные эллиптические уравнения как в простых, так и в сложных областях. Основная идея предлагаемого метода заключается в том, что уравнение аппроксимируется в некоторой узловой точке (в случае прямоугольных сеток — это центр масс системы материальных точек единичной массы, входящих в шаблон схемы).

В настоящей работе приведены новые результаты по построению и исследованию разностных схем высокого порядка точности для многомерного параболического уравнения на произвольных неравномерных прямоугольных сетках и получены априорные оценки устойчивости и сходимости сеточного решения. Для одномерных задач доказана безусловная сходимость (без ограничений на сеточные шаги τ и h) со вторым порядком предложенных в [1] вычислительных методов. Исследование устойчивости и сходимости базируется на общей теории операторно-разностных схем [5].

1. Априорные оценки для одномерных задач. В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$, $\bar{\Omega} = \{x : 0 \leq x \leq l\}$ рассмотрим первую краевую задачу для параболического уравнения

$$\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2 + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega; \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (1.2)$$

Введем произвольную неравномерную пространственную сетку

$$\hat{\omega}_h = \{x_i = x_{i-1} + h_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x_0 = 0, \quad x_N = l\} = \hat{\omega}_h \cup \{x_0 = 0, \quad x_N = l\} \quad (1.3)$$

и временную сетку с постоянным шагом τ $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N_0; \quad \tau N_0 = T\} = \omega_\tau \cup \{T\}$. Определим сеточный оператор по пространству

$$\Lambda u = u_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{1}{h_i} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right), \quad h_i = 0,5(h_i + h_{i+1}).$$

На сетке $\bar{\omega} = \hat{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ дифференциальную задачу (1.1), (1.2) аппроксимируем чисто неявной разностной схемой (для простоты дальнейших выкладок предполагаем $h_{i+1} \geq h_i, \quad i = 1, \dots, N-1$) [1]

$$y_i + ((h_+ - h)/3)y_{i\bar{x}} = \hat{y}_{\bar{x}\bar{x}} + f(\bar{x}, \hat{t}), \quad (1.4)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \hat{\omega}_h; \quad \hat{y}_0 = \hat{y}_N = 0. \quad (1.5)$$

Здесь используем стандартные обозначения теории разностных схем [5]: $h_+ = h_{i+1}, \quad h = h_i, \quad y_{i\bar{x}} = (y_{i,i} - y_{i,i-1})/h_i, \quad y_i = (\hat{y} - y)/\tau, \quad \hat{y} = y(x, t + \tau), \quad \bar{x} = \bar{x}_i = (x_{i+1} + x_i + x_{i-1})/3 = x_i + (h_{i+1} - h_i)/3 = x + (h_+ - h)/3$. Заметим, что в случае равномерной сетки ($h_{i+1} = h_i$) разностное уравнение (1.4) вырождается в обычную схему.

С помощью формулы Тейлора нетрудно получить разложения [1, 6]

$$\hat{u}_{\bar{x},i} - \partial^2 u(\bar{x}_i, t_{n+1}) / \partial x^2 = O(h_i^2), \quad (1.6)$$

$$u_{i,i} + ((h_{i+1} - h_i)/3)u_{i\bar{x},i} - \partial u(\bar{x}_i, t_{n+1}) / \partial t = O(h_i^2 + \tau), \quad (1.7)$$

в силу которых невязка схемы

$$\psi(\bar{x}_i, t_{n+1}) = -u_{i,i} - ((h_{i+1} - h_i)/3)u_{i\bar{x},i} + \hat{u}_{\bar{x},i} + f(\bar{x}_i, \hat{t}) = O(h_i^2 + \tau). \quad (1.8)$$

Следовательно, разностная схема (1.4), (1.5) на произвольной неравномерной сетке по пространству аппроксимирует исходную дифференциальную задачу со вторым порядком, так что

$$\max_{i \in \omega_\tau} \|\psi\|_C \leq M_1(h^2 + \tau), \quad h = \max_i h_i, \quad (1.9)$$

где $\|\cdot\|_C = \max_{x \in \omega_h} |\cdot|$, $M_1 = \text{const} > 0$.

Введем скалярные произведения и нормы на неравномерной сетке:

$$(y, v)_* = \sum_{i=1}^{N-1} \hat{h}_i y_i v_i, \quad (y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} h_i y_i v_i, \quad (y, v) = \sum_{i=1}^N h_i y_i v_i,$$

$$\|v_{\bar{x}}\|_C = \max_{x \in \omega^+} |v_{\bar{x}}(x)|, \quad \omega^+ = \hat{\omega}_h \cup \{x_N = l\}.$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости разностной схемы в энергетической полунорме W_2^2 .

Теорема 1. Разностная схема (1.4), (1.5) абсолютно устойчива при $h_+ \geq h$ по начальным данным, правой части и для любого $t \in \omega_\tau$ имеет место оценка

$$\|y_{\bar{x}\bar{x}}\|_* \leq M_2(\|u_{0\bar{x}\bar{x}}\|_* + \|\bar{f}_0\|_*) + \|\bar{f}_n\|_* + M_3 \max_{1 \leq k \leq n} \|\bar{f}_{i,k}\|_*, \quad (1.10)$$

где постоянные $M_2 = \exp(0,5T)$, $M_3 = M_2\sqrt{T}$, а $\bar{f}_k = f(\bar{x}, t_k)$.

Доказательство. Умножим уравнение (1.4) скалярно на $-2\tau \hat{h}_i y_{i\bar{x}\bar{x},i}$, просуммируем по всем узлам сетки $\hat{\omega}_h$ и получим энергетическое тождество

$$2\tau \left(\|y_{i\bar{x}}\|^2 - \left(\frac{h_+ - h}{3} y_{i\bar{x}}, y_{i\bar{x}\bar{x}} \right)_* \right) = -\|\hat{y}_{\bar{x}\bar{x}}\|_*^2 + \|y_{\bar{x}\bar{x}}\|_*^2 - \tau^2 \|y_{i\bar{x}\bar{x}}\|_*^2 - 2\tau (y_{i\bar{x}\bar{x}}, \hat{f}), \quad (1.11)$$

в котором, используя ε -неравенство $-ab \geq -\varepsilon a^2 - b^2/(4\varepsilon)$ при $\varepsilon = 1$, преобразуем выражение

$$\begin{aligned} -\left(\frac{h_+ - h}{3\hat{h}}, y_{i\bar{x}} y_{i\bar{x}} - y_{i\bar{x}}^2 \right)_* &\geq \left(\frac{h_+ - h}{3\hat{h}}, y_{i\bar{x}}^2 \right)_* - \left(\frac{h_+ - h}{3\hat{h}}, y_{i\bar{x}}^2 + \frac{1}{4} y_{i\bar{x}}^2 \right)_* = -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^{N-1} (h_+ - h) y_{i\bar{x},i}^2 = \\ &= -\frac{1}{12} \sum_{i=2}^N (h - h_-) y_{i\bar{x},i}^2 = -\frac{1}{12} \left(\frac{h - h_-}{h}, y_{i\bar{x}}^2 \right), \quad h_0 = h_1. \end{aligned}$$

Подставив данную оценку в (1.11), приходим к неравенству

$$0 \leq -\|\hat{y}_{\bar{x}\bar{x}}\|_*^2 + \|y_{\bar{x}\bar{x}}\|_*^2 - 2\tau (y_{i\bar{x}\bar{x}}, \hat{f})_*. \quad (1.12)$$

С помощью тождеств $2(u, v)_* = -\|u - v\|_*^2 + \|u\|_*^2 + \|v\|_*^2$, $\|\hat{v}\|_*^2 - 2\tau(v, v_i)_* - \|v\|_*^2 = \tau^2 \|v_i\|_*^2$, преобразуем в последнем неравенстве выражение $-\|\hat{y}_{\bar{x}\bar{x}}\|_*^2 + \|y_{\bar{x}\bar{x}}\|_*^2 - 2\tau (y_{i\bar{x}\bar{x}}, \hat{f})_* = -\|\hat{y}_{\bar{x}\bar{x}}\|_*^2 + \|y_{\bar{x}\bar{x}}\|_*^2 - 2(\hat{y}_{\bar{x}\bar{x}}, \hat{f})_* + 2(y_{\bar{x}\bar{x}}, \bar{f})_* + 2(y_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{f}, \tau \bar{f}_t)_* - 2\tau(\bar{f}, f_t)_* \leq -\|\hat{y}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{f}\|_*^2 + (1 + \tau)\|y_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{f}\|_*^2 + \tau(1 + \tau)\|f_t\|_*^2$, учитывая которое в (1.12), приходим к оценке вида $\|\hat{y}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{f}\|_*^2 \leq (1 + \tau)(\|y_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{f}\|_*^2 + \tau\|\bar{f}_t\|_*^2) \leq \dots \leq e^{t_n}(\|u_{0\bar{x}\bar{x}} + \bar{f}_0\|_*^2 + t_n \max_{0 \leq k \leq n} \|f_{t,k}\|_*^2)$ или $\|\hat{y}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{f}\|_*^2 \leq e^{0,5t_n}(\|u_{0\bar{x}\bar{x}} + \bar{f}_0\|_*^2 + \sqrt{t_n} \max_{0 \leq k \leq n} \|f_{t,k}\|_*^2)$. Так как $\|\hat{y}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{f}\|_* \geq \|\hat{y}_{\bar{x}\bar{x}}\|_* - \|\bar{f}\|_*$, $\|u_{0\bar{x}\bar{x}} + \bar{f}_0\|_* \leq \|u_{0\bar{x}\bar{x}}\|_* + \|\bar{f}_0\|_*$, то отсюда следует требуемая априорная оценка. Теорема доказана.

Для нахождения оценок точности, подставим $y = z + u$ в уравнения (1.4), (1.5). Получим задачу для погрешности $z_i + ((h_+ - h)/3)z_{i\bar{x}} = \hat{z}_{\bar{x}\bar{x}} + \psi(\bar{x}, \hat{t})$, $z(x, 0) = 0$, $\hat{z}_0 = \hat{z}_N = 0$,

где погрешность аппроксимации $\bar{\psi}$ определяется согласно (1.8). Воспользуемся для решения данной задачи априорными оценками (1.10), (1.9) и найдем в предположении существования соответствующих ограниченных производных следующую оценку скорости сходимости: $\max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \|z_{\bar{x}\bar{x}}\|_* \leq c(h^2 + \tau)$, $c = \text{const} > 0$.

Замечание 1. Разностная схема (1.4), (1.5) построена и исследована в случае сгущения пространственной сетки $\hat{\omega}_h$ к началу отрезка: $h_+ \geq h$. При произвольном сгущении аппроксимацию производной $\partial u / \partial t$ следует проводить с учетом направленных разностей: $y_i + 0,5(\tilde{h} + |\tilde{h}|)y_{i\bar{x}} + 0,5(\tilde{h} - |\tilde{h}|)y_{i\bar{x}} = \hat{y}_{\bar{x}\bar{x}} + f(\bar{x}, \bar{t})$, где $\tilde{h} = (h_+ - h)/3$.

Разностная схема "по потоку". Рассмотрим схему второго порядка аппроксимации (по-прежнему полагаем $h_+ \geq h$)

$$y_i + ((h_+ - h)/3)y_{i\bar{x}} = y_{\bar{x}\bar{x}}^{(\sigma)} + \varphi, \quad \varphi = f^{(\sigma)}(\bar{x}, t); \quad (1.13)$$

здесь $v^{(\sigma)} = \sigma \hat{v} + (1 - \sigma)v$.

Для исследования данной схемы воспользуемся общей теорией устойчивости операторно-разностных схем [5]. Для этого определим сеточные операторы A и A_1 : $(Ay)_i = -y_{\bar{x}\bar{x},i}$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, $y_0 = y_N = 0$; $(A_1 y)_i = ((h_{i+1} - h_i)/3)y_{x,i}$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, $y_0 = y_N = 0$. Пусть Ω_h — множество сеточных функций, заданных при каждом $t \in \bar{\omega}_\tau$ на $\hat{\omega}_h$ и равных нулю на границе. Определим вектор $y = y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_{N-1}(t))^T$ и линейное пространство $H = \Omega_h$ как множество таких векторов со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_*$ и нормой $\|\cdot\|_* = \sqrt{(\cdot, \cdot)_*}$. Так как $A = A^* > 0$, то через H_A обозначим гильбертово пространство, состоящее из элементов пространства H и снабженное скалярным произведением и нормой

$$\|y\|_A^2 = (Ay, y)_* = \|y_{\bar{x}}\|^2 = \sum_{i=1}^N h_i y_{\bar{x},i}^2.$$

Тогда разностная схема (1.13), (1.5) может быть записана в каноническом виде

$$By_t + Ay = \varphi, \quad y_0 = u_0, \quad (1.14)$$

$$B = D + \sigma\tau A, \quad D = E + A_1. \quad (1.15)$$

Лемма 1. При произвольных соотношениях на сеточные шаги и $h_+ \geq h$ имеет место операторное неравенство $A_1 \geq -(2/3)E$.

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение

$$(Dy, y)_* = \|y\|_*^2 + \left(\frac{h_+ - h}{3h_+}, y_+ y - y^2\right)_* = \left(\frac{2h_+ + h}{3h_+}, y^2\right)_* + \left(\frac{h_+ - h}{3h_+}, y_+ y\right)_*. \quad (1.16)$$

Так как при $h_+ \geq h$ ($-\tilde{h}_-/\tilde{h} \geq -1$) $\left(\frac{h_+ - h}{3h_+}, y_+ y\right)_* \geq -\left(\frac{h_+ - h}{6h_+}, y^2\right)_* - \left(\frac{h - h_-}{6h}, y^2\right)_*$, то из (1.16) находим $(Dy, y)_* \geq ((2h_+h + 3h^2 + h_+h_-)/(6hh_+), y^2)_* \geq \|y\|_*^2/3$, откуда, учитывая, что $D = E + A_1$, и следует требуемое неравенство.

Для получения оценок устойчивости в H_A , воспользуемся следующим результатом [5, с. 369].

Лемма 2. Пусть в схеме (1.14) линейные постоянные операторы $A, B : H \rightarrow H$ удовлетворяют условиям

$$B > 0, \quad A = A^* > 0, \quad B \geq 0,5\tau A. \quad (1.17)$$

Тогда схема устойчива по начальным данным, правой части и для решения задачи (1.14) верна априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_A \leq \|y_0\|_A + \|\varphi_0\|_{A^{-1}} + \|\varphi_n\|_{A^{-1}} + \sum_{k=1}^n \tau \|\varphi_{\bar{t},k}\|_{A^{-1}}. \quad (1.18)$$

Для самосопряженного оператора $Ay = -y_{\bar{x}\bar{x}}$ используем известные оценки [5]: $E \geq A/\|A\|$, $\|A\| \leq \max_{1 \leq i \leq N-1} 4/(h_i h_{i+1}) \leq 4/h_{\min}^2$, $h_{\min} = \min_i h_i$. Проверка достаточного условия

устойчивости (1.17) для схемы (1.14), (1.15) $B - 0,5\tau A \geq (1/3)E + (\sigma - 0,5)\tau A \geq (1/(3\|A\|) + (\sigma - 0,5)\tau)A \geq (h_{\min}^2/12 + (\sigma - 0,5)\tau)A \geq 0$ приводит к следующему ограничению на σ :

$$\sigma \geq (1/2) - h_{\min}^2/(12\tau). \quad (1.19)$$

Итак, нами доказана

Теорема 2. Разностная схема (1.13), (1.5) при $h_+ \geq h$, выполнении условия (1.19) устойчива по начальным данным, правой части и для ее решения имеет место априорная оценка (1.18).

Из (1.19) следует, что явная схема ($\sigma = 0$) устойчива в H_A при $\tau \leq h_{\min}^2/6$.

Консервативные схемы. На неравномерной сетке $\omega = \hat{\omega}_h \times \omega_\tau$ рассмотрим класс разностных схем с весами [1]

$$y_i + (h^2 y_{i\bar{x}}/6)_{\bar{x}} = y_{\bar{x}\bar{x}}^{(\sigma)} + f^{(\sigma)}(\bar{x}, t). \quad (1.20)$$

Так как на гладких решениях $u_i + (h^2 u_{i\bar{x}}/6)_{\bar{x}} = u_i + ((h_+ - h)/3)u_{i\bar{x}} + h^2 u_{i\bar{x}\bar{x}}/6 = \partial u(\bar{x}, t)/\partial t + O(h^2 + \tau)$, то на основании (1.8) заключаем, что схема (1.20) имеет второй порядок аппроксимации по пространственной переменной $\bar{\psi} = O(h^2 + \tau)$.

Определим сеточный оператор $(A_2 y)_i = (h^2 y_{\bar{x}})_{\bar{x}, i}$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$, $y_0 = y_N = 0$. Тогда схема (1.20), (1.5) преобразуется к каноническому виду (1.14) с самосопряженными операторами B и A : $B = D + \sigma\tau A$, $D = E + A_2$. Покажем, что при $h_{i+1} \geq h_i$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$, оператор $D > 0$ положительный. Действительно,

$$(Dy, y)_* = \|y\|_*^2 - (h^2/6, y_{\bar{x}}^2) = \|y\|_*^2 - (1/6)\|y - y_{-}\|^2. \quad (1.21)$$

Поскольку $-(1/6)\|y - y_{-}\|^2 \geq -(2/3)\|y\|^2$, то из (1.21) следует требуемое неравенство $(Dy, y)_* = ((3h_+ - h)/(6h), y^2)_* > 0$. Следовательно, операторное неравенство $B - 0,5\tau A = D + \tau(\sigma - 0,5)A \geq 0$ выполнено при всех $\sigma \geq 0,5$ и консервативная разностная схема (1.20), (1.5) безусловно устойчива при $h_+ \geq h$ в энергетической норме H_A .

Случай переменных коэффициентов. Вместо (1.1) рассмотрим теперь более общее уравнение вида

$$\partial u/\partial t = k(x) \partial^2 u/\partial x^2 + \tau(x) \partial u/\partial x + f(x, t), \quad (1.22)$$

которое на неравномерной сетке $\omega = \hat{\omega}_h \times \omega_\tau$ аппроксимируем разностным уравнением (для простоты по-прежнему полагаем $h_+ \geq h$)

$$y_i + ((h_+ - h)/3)y_{i\bar{x}} = k(\bar{x})\hat{y}_{\bar{x}\bar{x}} + \tau(\bar{x})\hat{y}_{\bar{x}} + f(\bar{x}, \hat{t}), \quad (1.23)$$

где $y_{\bar{x}} = (y_{\bar{x}} + y_x + y_x^*)/3$, $y_{\bar{x}} = (y_i - y_{i-1})/h_i$, $y_x = (y_{i+1} - y_i)/h_{i+1}$, $y_x^* = (y_{i+1} - y_{i-1})/(h_{i+1} + h_i)$. Покажем, что на произвольной неравномерной по пространству сетке разностная схема (1.23) аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение (1.22) со вторым порядком $O(h^2 + \tau)$. Для этого достаточно доказать [7], что $u_{\bar{x}} - \partial u(\bar{x}, t)/\partial x = O(h^2)$. Действительно, разлагая разностные производные $u_{\bar{x}}$, u_x , u_x^* в ряд Тейлора в окрестности точки (\bar{x}_i, t) , получаем

$$u_{\bar{x}, i} = \frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x}_i, t) - \frac{2h_{i+1} + h_i}{6} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\bar{x}_i, t) + O(h_i^2), \quad u_{x, i} = \frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x}_i, t) + \frac{h_{i+1} + 2h_i}{6} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\bar{x}_i, t) + O(h_i^2),$$

$$u_{x^*, i} = \frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x}_i, t) + \frac{h_{i+1} - h_i}{6} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\bar{x}_i, t) + O(h_i^2).$$

Отсюда $u_{\bar{x}, i} - \partial u(\bar{x}_i, t)/\partial x = (u_{\bar{x}, i} + u_{x, i} + u_{x^*, i})/3 - \partial u(\bar{x}_i, t)/\partial x = O(h_i^2)$. Следовательно, в силу (1.6), (1.7) невязка схемы (1.23) $\psi(\bar{x}, \hat{t}) = -(u_i + ((h_+ - h)/3)u_{i\bar{x}}) + k(\bar{x})\hat{u}_{\bar{x}\bar{x}} + \tau(\bar{x})\hat{u}_{\bar{x}} + f(\bar{x}, \hat{t}) = O(h^2 + \tau)$ имеет второй порядок по пространственной переменной.

2. Разностные схемы для двумерного уравнения. Пусть в области $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0 \leq t \leq T]$, где $\bar{\Omega} = \{0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$ — прямоугольник с границей Γ , требуется найти функцию $u(x, t)$, $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющую начально-краевой задаче

$$\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \partial^2 u/\partial x_2^2 + f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega; \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad t \in (0, T]. \quad (2.2)$$

В прямоугольнике $\bar{\Omega}$ введем произвольную неравномерную сетку $\hat{\omega}_h = \{x = x_{i_1 i_2} = (x_1^{i_1}, x_2^{i_2}); x_\alpha^{i_\alpha} = x_\alpha^{i_\alpha - 1} + h_\alpha^{i_\alpha}, i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, x_\alpha^0 = 0, x_\alpha^{N_\alpha} = l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$, для которой $\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} h_\alpha^{i_\alpha} = l_\alpha, \alpha = 1, 2$. Через $\hat{\omega}_h$ обозначим множество внутренних узлов сетки $\hat{\omega}_h$, а через γ_h — множество граничных узлов. Пространственно-временная сетка в области \bar{Q}_T вводится стандартным образом: $\hat{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau, \bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_0; \tau N_0 = T\} = \omega_\tau \cup \{T\}$.

Простейшая разностная схема первого порядка аппроксимации на нерегулярном шаблоне "крест" имеет вид [5] $y_t = \hat{y}_{x_1 \hat{x}_1} + \hat{y}_{x_2 \hat{x}_2} + f(x, t), (x, t) \in \omega,$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h; \quad \hat{y}|_{\gamma_h} = 0, \quad t \in \omega_\tau. \quad (2.3)$$

Здесь использованы стандартные безиндексные обозначения теории разностных схем [5]: $y_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} = (y_{x_\alpha} - y_{\bar{x}_\alpha})/\tilde{h}_\alpha, y_{x_\alpha} = (y^{(+1_\alpha)} - y)/h_{\alpha+}, h_{\alpha\pm} = h_\alpha^{i_\alpha \pm 1}, y_{\bar{x}_\alpha} = (y - y^{(-1_\alpha)})/h_{\alpha-}, \tilde{h}_\alpha = 0,5(h_{\alpha+} + h_{\alpha-}), v^{(\pm 1_1)} = v_{i_1 \pm 1 i_2}, v^{(\pm 1_2)} = v_{i_1 i_2 \pm 1}.$

Разностная схема второго порядка аппроксимации на неравномерной сетке $\bar{\omega}$ имеет вид

$$y_t + \tilde{h}_1 y_{t \bar{x}_1} + \tilde{h}_2 y_{t \bar{x}_2} = \hat{y}_{(2) \bar{x}_1 \hat{x}_1} + \hat{y}_{(1) \bar{x}_2 \hat{x}_2} + f(\bar{x}, t), \quad (2.4)$$

где $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2), \bar{x}_\alpha = x_\alpha + \tilde{h}_\alpha, \tilde{h}_\alpha = (h_{\alpha+} - h_{\alpha-})/3, y_{(1)} = y(\bar{x}_1, x_2) = y + h_1^+ y_{x_1} + h_1^- y_{\bar{x}_1}, y_{(2)} = y(x_1, \bar{x}_2) = y + h_2^+ y_{x_2} + h_2^- y_{\bar{x}_2}, h_\alpha^\pm = 0,5(\tilde{h}_\alpha \pm |\tilde{h}_\alpha|).$ Отметим, что значения искомой сеточной функции y в неузловых точках $(\bar{x}_1, x_2), (x_1, \bar{x}_2)$ усредняются по формулам второго порядка аппроксимации с учетом направленных разностей. Аналогично можно было бы аппроксимировать и производную по времени. В случае равномерной сетки $h_\alpha^\pm = 0$ и схема (2.4) преобразуется в классическую чисто неявную схему второго порядка точности по пространственной переменной $y_t = \hat{y}_{\bar{x}_1 x_1} + \hat{y}_{\bar{x}_2 x_2} + f(x, t).$

Погрешность аппроксимации. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $f(x), u_0(x)$ таковы, что решение задачи (2.1), (2.2) существует, единственно и является достаточно гладкой функцией. Невязку схемы представим в виде

$$\psi = \psi_1 + \psi_2, \quad (2.5)$$

$\psi_1 = \partial u(\bar{x}, t)/\partial t - (u_t + \tilde{h}_1 u_{t \bar{x}_1} + \tilde{h}_2 u_{t \bar{x}_2}), \psi_2 = (\hat{u}_{(2)} - u(x_1, \bar{x}_2, t))_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + (u(x_1, \bar{x}_2, t))_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} - \partial^2 u(\bar{x}, t)/\partial x_1^2 + (\hat{u}_{(1)} - u(\bar{x}_1, x_2, t))_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} + (u(\bar{x}_1, x_2, t))_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} - \partial^2 u(\bar{x}, t)/\partial x_2^2.$ На основании соотношений $\psi_3 = u_t(\bar{x}, t) - (u_t + \tilde{h}_1 u_{t \bar{x}_1} + \tilde{h}_2 u_{t \bar{x}_2}) = O(\tilde{h}_1^2 + \tilde{h}_2^2), \psi_4 = \partial u(\bar{x}, t)/\partial t - u_t(\bar{x}, t) = O(\tau)$ заключаем, что $\psi_1 = O(\tilde{h}_1^2 + \tilde{h}_2^2 + \tau).$ Для оценки выражения $\xi_1 = (\hat{u}_{(2)} - u(x_1, \bar{x}_2, t))_{\bar{x}_1 \hat{x}_1}$ воспользуемся следующими разложениями:

$$u_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{h_{2+}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad u_{\bar{x}_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$$

где черта сверху означает, что значения аргументов берутся в соответствующих промежуточных точках (в данном случае на интервалах $(x_2, x_2 + h_{2+})$ и $(x_2 - h_2, x_2)$). В силу этого

$$\hat{u}_{(2)} = \hat{u} + \tilde{h}_2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} + r_0, \quad r_0 = \frac{h_2^+ h_{2+}}{2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_2^2} - \frac{h_2^- h_{2-}}{2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_2^2} = O(h_2^2).$$

Учитывая, что $u(x_1, \bar{x}_2, t) = \hat{u} + \tilde{h}_2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} + r_1, r_1 = \frac{\tilde{h}_2^2}{2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_2^2},$ для ξ_1 получим представление $\xi_1 = r_{2 \bar{x}_1 \hat{x}_1}, r_2 = r_0 - r_1 = O(h_2^2).$ Так как

$$|r_{2 \bar{x}_1 \hat{x}_1}| = \left| \frac{1}{\tilde{h}_1} \int_0^1 \int_{x_1 - \xi h_1}^{x_1 + \xi h_1} \frac{\partial^2 r_2(\eta, x_2, t)}{\partial \eta^2} d\eta d\xi \right| \leq \tilde{h}_2^2 \left\| \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right\|_{C(\bar{Q}_T)},$$

то $\xi_1 = O(h_2^2)$; Аналогично показывается, что

$$|\xi_2| = |(\hat{u}_{(1)} - u(\bar{x}_1, x_2, \hat{t}))_{\bar{x}_2 \hat{x}_2}| \leq h_1^2 \|\partial^4 \hat{u} / (\partial x_1^2 \partial x_2^2)\|_{C(\bar{Q}_\tau)}.$$

Далее с учетом (1.6) получим $u(x_1, \bar{x}_2, \hat{t})_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} - \partial^2 u(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \hat{t}) / \partial x_1^2 = O(h_1^2)$, $u(\bar{x}_1, x_2, \hat{t})_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} - \partial^2 u(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \hat{t}) / \partial x_2^2 = O(h_2^2)$. На основании изложенного выше делаем вывод, что если четвертые производные решения $u(x, t)$ ограничены, то погрешность аппроксимации является величиной первого порядка малости по τ и второго относительно $|h| = (h_1^2 + h_2^2)^{1/2}$, $h_\alpha = \max_{i_\alpha} h_\alpha^i$, $\alpha = 1, 2$, т.е. существует постоянная M_1 , не зависящая от h_1, h_2, τ и такая, что

$$\|\psi\|_{C(\omega)} \leq M_1(h_1^2 + h_2^2 + \tau). \quad (2.6)$$

Априорные оценки. Для простоты дальнейших исследований ограничимся рассмотрением случая сгущения сеток по переменным x_1 и x_2 к началу соответствующего отрезка. Тогда

$$h_\alpha^{i_\alpha+1} - h_\alpha^{i_\alpha} \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.7)$$

и схема (2.4) примет более простой вид

$$y_t + ((h_{1+} - h_1)/3)y_{t\bar{x}_1} + ((h_{2+} - h_2)/3)y_{t\bar{x}_2} + \tilde{A}\hat{y} = \varphi, \quad (2.8)$$

где $\tilde{A} = A + A_0$, $A = A_1 + A_2$, $A_k y = -y_{\bar{x}_k \hat{x}_k}$, $A_0 y = ((h_{2+} - h_2)/3)A_1 y_{x_2} + ((h_{1+} - h_1)/3)A_2 y_{x_1}$, $\varphi = f(\bar{x}, \hat{t})$.

Ниже воспользуемся стандартными обозначениями теории разностных схем [5] для скалярных произведений и норм:

$$(v, y)_* = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1^{i_1} h_2^{i_2} v_{i_1 i_2} y_{i_1 i_2} = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 h_2 \varphi y, \quad \|y\|_*^2 = (y, y)_*, \quad \|y\|_C = \max_{x \in \omega_h} |y(x)|.$$

Для сеточного оператора Лапласа на неравномерной сетке положим

$$\|y\|_{A_1}^2 = (A_1 y, y) = \|y_{\bar{x}_1}\|^2 = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1^{i_1} h_2^{i_2} y_{\bar{x}_1, i_1 i_2}^2, \quad \|y\|_{A_2}^2 = \|y_{\bar{x}_2}\|^2 = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2} h_1^{i_1} h_2^{i_2} y_{\bar{x}_2, i_1 i_2}^2,$$

$$\|y\|_A^2 = \|y\|_{A_1}^2 + \|y\|_{A_2}^2 = \|y_{\bar{x}_1}\|^2 + \|y_{\bar{x}_2}\|^2, \quad \|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|^2 = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} h_1^{i_1} h_2^{i_2} y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2, i_1 i_2}^2.$$

Приведем вспомогательные результаты, которые нам понадобятся при использовании метода энергетических неравенств.

Лемма 3. Для произвольной сеточной функции $y(x)$, заданной на неравномерной прямоугольной сетке $\hat{\omega}_h$ и обращающейся в нуль на границе γ_h , справедливы соотношения

$$(A_1 y, y) = \|y_{\bar{x}_1}\|^2, \quad (A_2 y, y) = \|y_{\bar{x}_2}\|^2, \quad \|y\|_A^2 = \|y_{\bar{x}_1}\|^2 + \|y_{\bar{x}_2}\|^2, \quad (2.9)$$

$$\|Ay\|_*^2 = \|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|^2 = \|y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1}\|_*^2 + \|y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2}\|_*^2 + 2\|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|^2. \quad (2.10)$$

Доказательство. Применяя первую разностную формулу Грина в одномерном случае [5]

$$(y, v_{\bar{x}\hat{x}})_* = -(y_{\bar{x}}, v_{\hat{x}}) + y_N v_{\bar{x}, N} - y_0 v_{\bar{x}, 1}, \quad (2.11)$$

получим выражение

$$- \sum_{i_1=1}^{N_1-1} h_1 y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} y = \sum_{i_1=1}^{N_1} h_1 y_{\bar{x}_1}^2,$$

умножив которое на h_2 и просуммировав по всем $i_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1$, приходим к первому тождеству (2.9). Второе равенство доказывается аналогично. Последнее равенство в (2.9) является алгебраическим следствием первых двух. Далее по определению $\|\cdot\|_*$ имеем

$$\|y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2}\|_*^2 = \|y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1}\|_*^2 + \|y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2}\|_*^2 + 2(y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1}, y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2})_*. \quad (2.12)$$

Применяя формулу Грина (2.11) по переменной x_1 и учитывая, что сеточная функция $y_{\bar{x}_2\bar{x}_2}$ обращается в нуль при $i_1 = 0, N_1$, находим, что

$$(y_{\bar{x}_1\bar{x}_1}, y_{\bar{x}_2\bar{x}_2})_* = - \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1} y_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_2}.$$

Применяя к последнему равенству формулу Грина по переменной x_2 и учитывая, что $y_{\bar{x}_1} = 0$ при $i_2 = 0, N_2$, приходим к энергетическому соотношению $(y_{\bar{x}_1\bar{x}_1}, y_{\bar{x}_2\bar{x}_2})_* = \|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|^2$, подставляя которое в (2.12), получаем тождество (2.10). Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть выполнены условия (2.7). Тогда для произвольной сеточной функции $y(x_1, x_2)$, заданной на неравномерной прямоугольной сетке $\bar{\omega}_h$ и обращающейся в нуль на границе γ_h , справедливо неравенство

$$\left(\frac{h_{2+} - h_2}{3} A_1 y_{x_2}, A_1 y \right)_* + \left(\frac{h_{1+} - h_1}{3} A_2 y_{x_1}, A_2 y \right)_* \geq -\frac{2}{3} (\|A_1 y\|_*^2 + \|A_2 y\|_*^2), \quad (2.13)$$

а при дополнительном предположении

$$\frac{h_k - h_{k-}}{2h_k} + \frac{h_{k+} - h_k}{6h_k} \leq \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2; \quad i_k = 1, 2, \dots, N_k, \quad h_k^1 = h_k^0, \quad (2.14)$$

имеет место оценка вида

$$\left(\frac{h_{2+} - h_2}{3} A_1 y_{x_2}, A_2 y \right)_* + \left(\frac{h_{1+} - h_1}{3} A_2 y_{x_1}, A_1 y \right)_* \geq -\frac{4}{3} \|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|^2. \quad (2.15)$$

Доказательство. Неравенство (2.13) доказывается аналогично одномерному случаю (см. лемму 1). Обратимся к выводу оценки (2.15). Применяя разностную формулу Грина по направлению x_1 и алгебраическое неравенство $-(a-b)a \geq -3a^2/2 - b^2/2$, получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{h_{2+} - h_2}{3} A_1 y_{x_2}, A_2 y \right) &= - \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1 x_2} y_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_2} = - \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 \frac{h_{2+} - h_2}{3} y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^{(+1_2)} (y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^{(+1_2)} - y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}) \geq \\ &\geq - \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 \frac{h_{2+} - h_2}{3} \left(\frac{3}{2} (y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^{(+1_2)})^2 + \frac{1}{2} y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^2 \right) = \\ &= - \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=2}^{N_2} h_1 h_2 \frac{h_2 - h_{2-}}{2h_2} y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^2 - \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 h_2 \frac{h_{2+} - h_2}{6h_2} y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^2. \end{aligned}$$

Согласно условию леммы (2.14) при $k = 2$, находим, что $((h_{2+} - h_2)/3) A_1 y_{x_2}, A_2 y)_* \geq -(2/3) \|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|^2$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что и $((h_{1+} - h_1)/3) A_2 y_{x_1}, A_1 y)_* \geq -(2/3) \|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|^2$. Складывая два последних неравенства, приходим к требуемой оценке (2.15).

Замечание 2. Пусть сетка по направлению x_k сгущается по закону геометрической прогрессии $h_k^{i_k+1} = q_k h_k^{i_k}$ с константой $q_k \geq 1$. Рассмотрим, при каких q_k выполняется условие леммы (2.14). С учетом сформулированных предположений имеем $(h_k - h_{k-})/(2h_k) + (h_{k+} - h_k)/(6h_k) - 2/3 = (q_k^2 - 2q_k - 3)/(6q_k)$. Следовательно, неравенство (2.14) выполнено при всех $1 \leq q_k \leq 3$.

Применим доказанные выше леммы 3, 4 к исследованию устойчивости разностной схемы по входным данным.

Теорема 3. Пусть выполнены неравенства (2.7), (2.14) и

$$\tau \geq c_0 \max_k \|h_{k+} - h_k\|_C, \quad \max_{1 \leq i_k \leq N_k-1} (h_k^{i_k}/h_k^{i_k}) \leq c_0. \quad (2.16)$$

Тогда разностная схема (2.8), (2.3) устойчива по начальным данным, правой части и имеет место оценка

$$\max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \|y(t)\|_1 \leq \|y(0)\|_1 + 3\sqrt{T} \max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \|f\|_*, \quad (2.17)$$

где $\|y\|_1^2 = \|y\|_A^2 + (\tau/3) \|Ay\|_*^2$.

Доказательство. Умножая уравнение (2.8) скалярно на $2\tau A\hat{y}$ и применяя лемму 3, тождество $2\tau(v_i, \hat{v})_* = \|\hat{v}\|_*^2 - \|v\|_*^2 + \tau^2\|v_i\|_*^2$, получаем энергетическое соотношение

$$\|\hat{y}\|_A^2 - \|y\|_A^2 + \tau^2\|y_t\|_A^2 + 2\tau\left(\frac{h_{1+} - h_1}{3}y_{t\bar{x}_1} + \frac{h_{2+} - h_2}{3}y_{t\bar{x}_2}, A\hat{y}\right) + 2\tau(\tilde{A}\hat{y}, A\hat{y})_* = 2\tau(\varphi, A\hat{y})_*, \quad (2.18)$$

в котором, применяя неравенство Коши с ϵ , второе условие (2.16), оценим

$$\begin{aligned} 2\tau\left(\frac{h_{1+} - h_1}{3}y_{t\bar{x}_1} + \frac{h_{2+} - h_2}{3}y_{t\bar{x}_2}, A\hat{y}\right) &\geq -\frac{2}{9}\tau\|A\hat{y}\|_*^2 - \tau(\|(h_{1+} - h_1)y_{t\bar{x}_1}\|_*^2 + \|(h_{2+} - h_2)y_{t\bar{x}_2}\|_*^2) \geq \\ &\geq -\frac{2}{9}\tau\|A\hat{y}\|_*^2 - \tau c_4 \max_k \|h_{k+} - h_k\|_C^2 \|y_t\|_A^2. \end{aligned}$$

Учитывая теперь тождество (2.10), неравенства (2.13), (2.15), получаем

$$\begin{aligned} 2\tau(\tilde{A}\hat{y}, A\hat{y}) &= 2\tau\left\{\|A\hat{y}\|_*^2 + \left(\frac{h_{2+} - h_2}{3}A_1\hat{y}_{x_2}, A_1\hat{y}\right)_* + \left(\frac{h_{1+} - h_1}{3}A_2\hat{y}_{x_1}, A_2\hat{y}\right)_* + \right. \\ &\left. + \left(\frac{h_{2+} - h_2}{3}A_1\hat{y}_{x_2}, A_2\hat{y}\right)_* + \left(\frac{h_{1+} - h_1}{3}A_2\hat{y}_{x_1}, A_1\hat{y}\right)_*\right\} \geq \frac{2}{3}\tau\|A\hat{y}\|_*^2. \end{aligned}$$

Нам осталось оценить скалярное произведение, содержащее правую часть, т.е. $2\tau(\varphi, A\hat{y})_* \leq (\tau/9)\|A\hat{y}\|_*^2 + 9\tau\|\varphi\|_*^2$. Подставляя полученные оценки в (2.18), приходим к неравенству $\|y_{n+1}\|_1^2 \leq \|y_n\|_1^2 + 9\tau\|\tilde{f}_{n+1}\|_*^2$. Отсюда и следует требуемая оценка устойчивости (2.17). Теорема доказана.

Для нахождения оценок точности подставим $y = z + u$ в уравнения (2.8), (2.3). Получим задачу для погрешности

$$z_t + ((h_{1+} - h_1)/3)z_{t\bar{x}_1} + ((h_{2+} - h_2)/3)z_{t\bar{x}_2} + \tilde{A}z = \psi, \quad (2.19)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad \hat{z}|_{\gamma_h} = 0, \quad t \in \omega_\tau, \quad (2.20)$$

где погрешность аппроксимации определяется согласно (2.5). При выполнении условий теоремы 3 для решения задачи (2.19), (2.20) имеет место априорная оценка $\|z\|_1 \leq 3\sqrt{T} \max_{t \in \omega_\tau} \|\psi\|_*$, подставляя в которую неравенство (2.6), получаем $\|z\|_A^2 + (\tau/3)\|Az\|_*^2 \leq c(h_1^2 + h_2^2 + \tau)^2$, т.е. решение разностной схемы (2.8), (2.3) сходится к решению дифференциальной задачи (2.1), (2.2) в норме $\|\cdot\|_1$ со скоростью $O(h_1^2 + h_2^2 + \tau)$.

Работа выполнена при поддержке Российского (проект 96 — 01 — 00657) и Белорусского (проект Ф96 — 173) фондов фундаментальных исследований.

Литература

1. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П. // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 2. С. 313 — 322.
2. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П. // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40, № 5. С. 9 — 14.
3. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, № 3. С. 413 — 424.
4. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П., Зыль А. Н. // Докл. АН Беларуси. 1998. Т. 42, № 1. С. 13 — 17.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1977.
6. Берковский Б. М., Полевичков В. К. Вычислительный эксперимент в конвекции. Минск, 1988.
7. Ананич С. Э. Монотонные консервативные разностные схемы второго порядка аппроксимации на неравномерных сетках для уравнения Фоккера — Планка. Минск, 1996. (Препринт / Ин-т математики АН Беларуси: 9 (521)).