

## МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ СТЕФАНА

© 1999 г. В. И. Мажукин, академик А. А. Самарский, М. М. Чуйко

Поступило 18.05.99 г.

1. Интерес к задачам типа Стефана вызван как их теоретической значимостью [1], связанной с развитием математического аппарата для нелинейных задач с подвижными и свободными границами, так и важными физическими и технологическими приложениями, возникающими, в частности, при воздействии концентрированных потоков энергии на металлы и керамики [2]. В работе рассматривается метод численного решения многофронтных нестационарных двумерных по пространству задач Стефана с явным выделением межфазных границ в произвольных областях. В основу метода положена идея динамической адаптации расчетной сетки, выполняемой посредством перехода к произвольной нестационарной системе координат. Преобразование координат осуществляется автоматически с помощью искомого решения.

Изложение метода проводится на примере решения задачи, типичной для обработки материалов концентрированными потоками энергии. Основными особенностями подобных задач является наличие двух фазовых переходов: плавления–кристаллизации и испарения – и существенное, достигающее нескольких порядков различие между характерными размерами рассматриваемой области и зоны выделения энергии (пятно фокусировки) [3].

2. Явления плавления–кристаллизации чистых веществ в простейшем приближении описываются классической задачей Стефана, в рамках которой процесс рассматривается как движение среды с сильным разрывом, соответствующим положению фазового фронта. На межфазной границе при этом скачком изменяются внутренняя энергия, плотность и теплофизические характеристики вещества: теплоемкость и теплопроводность. Математическая формулировка классического варианта нестационарной двумерной задачи Стефана сводится к квазилинейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{div} \lambda(T) \operatorname{grad} T = -\frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\partial W_2}{\partial y} \quad (1)$$

в области  $\Omega_{x,y}$ , состоящей из двух подобластей  $\Omega_s(t)$  и  $\Omega_l(t)$ :  $\Omega_{x,y} = \Omega_s(t) \cup \Omega_l(t)$ , разделенных подвижной межфазной границей  $\Gamma_{sl}(t)$ , на которой выполняются дифференциальное условие Стефана и равенство температур

$$W_l^n - W_s^n = L_m \rho_s \vartheta_{sl}^n, \quad T_s = T_l = T_m, \quad (2)$$

где  $H = c_p \rho T$  – энтальпия,  $W = (W_1, W_2)$  – тепловой поток,  $T_m, L_m$  – температура и теплота плавления (кристаллизации),  $\vartheta_{sl} = (\vartheta_{sl}^n, \vartheta_{sl}^\tau)$  – скорость движения границы раздела фаз, индексы  $s, l$  обозначают принадлежность вещества к твердой и жидкой фазам,  $n, \tau$  – нормальную и тангенциальную компоненты.

Учет испарения осуществляется в рамках однофазного варианта задачи Стефана [4] и приводит к появлению второй подвижной границы раздела фаз  $\Gamma_{lv}(t)$ : жидкость–пар в области  $\Omega_{x,y} = \Omega_s(t) \cup \Omega_l(t)$ . Процесс развитого поверхностного испарения описывается с помощью трех законов сохранения массы, импульса и энергии на этой границе

$$\rho_l \vartheta_{lv}^n = \rho_v (u - \vartheta_{lv}^n), \quad (3)$$

$$P_l + \rho_l (\vartheta_{lv}^n)^2 = P_v + \rho_v (u - \vartheta_{lv}^n)^2, \quad (4)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = G^n - L_v \rho_l \vartheta_{lv}^n \quad (5)$$

и двумя дополнительными соотношениями, характеризующими кинетику фазового перехода и определяемыми из приближения Кнудсеновского слоя [5]:

$$T_v = T_v(T_b, M), \quad \rho_v = \rho_v(\rho_H, M), \quad (6)$$

где  $G = (G^n, G^\tau)$  – поток энергии,  $\vartheta_{lv}^n$  – скорость фронта испарения,  $L_v$  – теплота испарения,  $M$  – число Маха,  $u$  – газодинамическая скорость,  $\rho_H$  – плотность насыщенного пара. При испарении в вакуум постоянным по времени источником энергии  $M = 1$ , а  $T_v = 0.633 T_b$ ,  $\rho_v = 0.326 \rho_H$ .

3. Введем некоторое расчетное пространство  $\Omega_{\xi,\eta}$ , в котором определена произвольная нестационарная криволинейная система координат  $(\xi, \eta, \tau)$ . Предположим, что на каждый момент времени

Институт математического моделирования  
Российской Академии наук, Москва

Институт математики Академии наук Беларуси,  
Минск

существует невырожденное взаимно однозначное преобразование  $\xi = \xi(x, y, t)$ ,  $\eta = \eta(x, y, t)$ ,  $\tau = t$ , отображающее физическую область произвольной формы  $\Omega_{x,y}$  в прямоугольник  $\Omega_{\xi,\eta}$  в плоскости криволинейных координат  $(\xi, \eta)$ . Границы области и границы раздела фаз в  $\Omega_{\xi,\eta}$  сопряжены с соответствующими координатными линиями и остаются неизменными во времени. Якобианом такого преобразования является функция  $J$

$$\rho J^{-1} = \rho \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = \psi.$$

Математическая постановка задачи (1)–(6) в произвольной нестационарной криволинейной системе координат  $(\xi, \eta, \tau)$  приобретает вид

$$\left[ \frac{\partial(\psi H)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (\rho W_1 + H Q_1) \frac{\partial y}{\partial \eta} - (\rho W_2 + H Q_2) \frac{\partial x}{\partial \eta} \right\} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ -(\rho W_1 + H Q_1) \frac{\partial y}{\partial \xi} + (\rho W_2 + H Q_2) \frac{\partial x}{\partial \xi} \right\} \right]_m, \quad (7)$$

$$m = s, l,$$

$$\left[ \frac{\partial x}{\partial \tau} = -\frac{Q_1}{\rho} \right]_m, \quad (8)$$

$$\left[ \frac{\partial y}{\partial \tau} = -\frac{Q_2}{\rho} \right]_m, \quad (9)$$

где

$$W_1 = -\frac{\lambda \rho}{\psi} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right),$$

$$W_2 = -\frac{\lambda \rho}{\psi} \left( -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right),$$

$(\xi, \eta = \eta_{sl}) \in \Gamma_{sl}$ :

$$\left[ \left( -\frac{\partial y}{\partial \xi} W_1 + \frac{\partial x}{\partial \xi} W_2 \right)_l - \left( -\frac{\partial y}{\partial \xi} W_1 + \frac{\partial x}{\partial \xi} W_2 \right)_s \right] \gamma^{\frac{1}{2}} = -L_m Q_{sl}^n, \quad (10)$$

$(\xi, \eta) \in \Gamma_{lv}$ :

$$Q_{lv}^n = -\rho_v \left( u + \frac{Q_{lv}^n}{\rho_l} \right),$$

$$P_l + \frac{(Q_{lv}^n)^2}{\rho_l} = P_v + \rho_v \left( u + \frac{Q_{lv}^n}{\rho_l} \right)^2, \quad (11)$$

$$\left( -\frac{\partial y}{\partial \xi} W_1 + \frac{\partial x}{\partial \xi} W_2 \right)_l \gamma^{\frac{1}{2}} = G^n + L_v Q_{lv}^n, \quad \eta = \text{const},$$

$$\left( \frac{\partial y}{\partial \eta} W_1 - \frac{\partial x}{\partial \eta} W_2 \right)_l \alpha^{\frac{1}{2}} = G^n + L_v Q_{lv}^n, \quad \xi = \text{const},$$

$Q_1, Q_2$  – произвольные функции.

4. Полное решение задачи плавления–испарения, описываемой в приближении двумерной нестационарной задачи Стефана (7)–(11), состоит из двух этапов: простого нагрева тела без фазовых превращений и нагрева, сопровождающегося фазовыми переходами твердое тело – жидкость и жидкость–пар под воздействием потока энергии.

На первом этапе решение осуществляется на сетке с фиксированными узлами, построенной до начала расчетов. Ее построение осуществляется с помощью численного решения специальных эллиптических уравнений [6], позволяющего построить преобразование, отображающее произвольную область  $\Omega_{x,y}$  на прямоугольник  $\Omega_{\xi,\eta}$ . Задача генерации сетки состоит в установлении связи между точками  $(\xi, \eta)$  регулярной расчетной области  $\Omega_{\xi,\eta}$  и точками  $(x, y)$  области  $\Omega_{x,y}$ , которая достигается решением системы эллиптических уравнений

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + (J^{-1})^2 \left( P_1 \frac{\partial x}{\partial \xi} + P_2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0,$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + (J^{-1})^2 \left( P_1 \frac{\partial y}{\partial \xi} + P_2 \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0,$$

где

$$\alpha = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2,$$

$$\beta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \gamma = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2,$$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}.$$

Специальным выбором управляющих функций  $P_1(\xi, \eta)$ ,  $P_2(\xi, \eta)$  узлы сетки могут сгущаться как внутри области  $\Omega_{x,y}$ , так и на границе  $\partial\Omega_x$ . В рамках рассматриваемой задачи сгущение узлов сетки является обязательным в зоне действия источника концентрированной энергии. Управляемое распределение узлов внутри области осуществляется с помощью функций  $P_1, P_2$  [6], а на границе – с помощью двухпараметрической функции растяжения [7].

На втором этапе решения задачи Стефана, связанном с зарождением и распространением фазовых границ  $\Gamma_{sl}(t)$  и  $\Gamma_{lv}(t)$ , использовались расчетные сетки с динамическим распределением узлов. Динамическое распределение основывалось на стремлении получения на каждый момент времени квазиравномерного распределения координатных линий по каждому направлению. Достижение указанного стремления осуществлялось заданием уравнений обратного преобразования

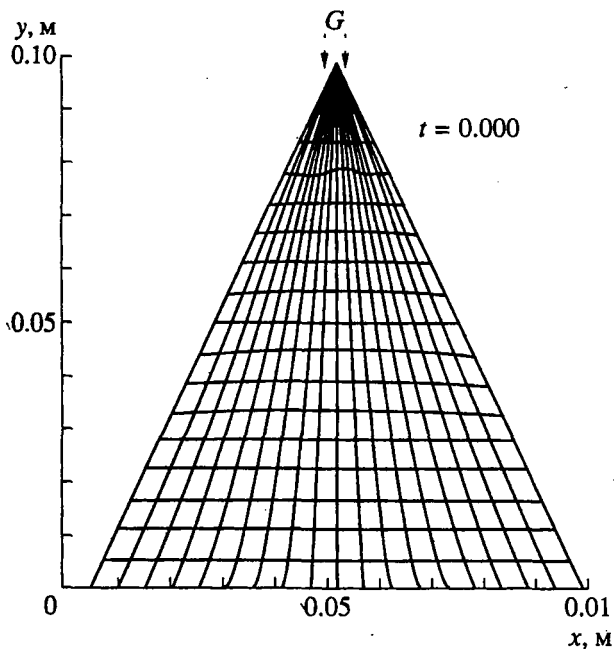


Рис. 1.

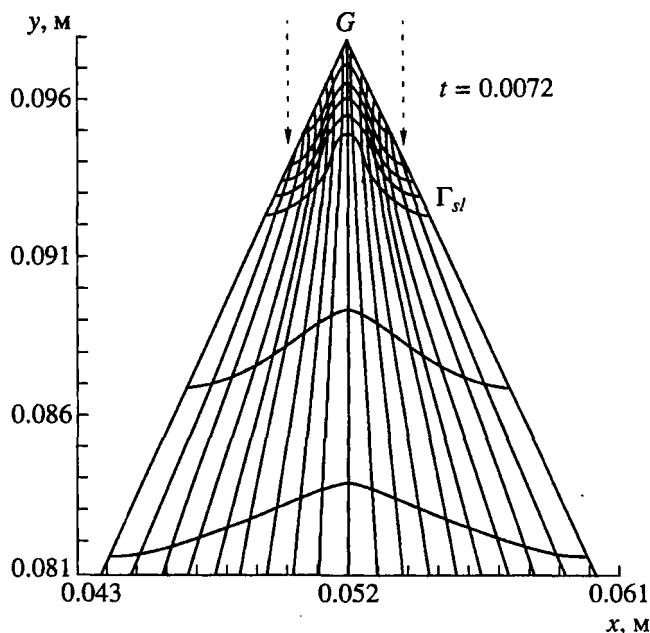


Рис. 2.

(8), (9) в виде уравнений диффузии, что достигается выбором функций  $Q_1, Q_2$  в виде

$$Q_1 = -\rho \left( D_\xi \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + D_\eta \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right), \quad (12)$$

$$Q_2 = -\rho \left( D_\xi \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + D_\eta \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right), \quad (13)$$

где коэффициенты уравнений  $D_\xi, D_\eta$  имеют смысл коэффициентов диффузии, определяемых через параметры задачи:

$$D_\eta = \left( \frac{L_y(\tau)}{L_\eta^0} \right)^2 \left( \frac{\Delta l_\eta^0}{\Delta l_y(\tau)} \right)^2 \frac{1}{h_\eta} (|v_{sl}^n| + |v_{lv}^n|),$$

$$D_\xi = \left( \frac{L_x(\tau)}{L_\xi^0} \right)^2 \left( \frac{\Delta l_\xi^0}{\Delta l_x(\tau)} \right)^2 \frac{1}{h_\xi} (|v_{sl}^\tau| + |v_{lv}^\tau|).$$

Здесь  $L_x(\tau), L_y(\tau), L_\xi, L_\eta, \Delta l_x(\tau), \Delta l_y(\tau), \Delta l_\xi, \Delta l_\eta$  — длины координатных линий и длины ребер ячеек в физическом и расчетном пространствах соответственно. Численное решение уравнений (8), (9) с функциями (12), (13) позволяет определять координаты узлов сетки на каждый момент времени.

Численная реализация математической модели (7)–(13) на каждом временном шаге  $\Delta t^j$  осуществлялась с помощью двух вложенных итерационных циклов. В первом из них определялись скорости движения узлов разностной сетки  $Q_{1,i,k}^j, Q_{2,i,k}^j$  и их координаты, а во втором вычислялось распределение температур в областях  $\Omega_s(t), \Omega_l(t)$ .

Тестирование метода динамической адаптации проводилось на задаче Стефана о промерзании с

плоской границей раздела, приведенной в [8] и допускающей автомодельное решение. Результаты тестирования показали высокую точность в определении положения границы раздела фаз при использовании в каждой из подобластей  $\Omega_s(t)$  и  $\Omega_l(t)$  расчетной сетки с числом узлов порядка 10 по каждой переменной.

5. Рассмотрим пример решения задачи в сильно деформирующейся области, численное решение которой сопровождается радикальной перестройкой сетки.

В треугольной области на одну из вершин воздействует источник энергии, вызывающий ее последовательный нагрев, плавление и испарение. Геометрические размеры треугольника (высота  $h$  и основание  $a$ )  $h = a = 10$  см во много раз превосходят линейные размеры источника энергии  $d = 0.38$  см. Интенсивность источника составляла  $G = 10^5$  Вт/см<sup>2</sup>. В качестве исследуемого вещества использовался материал, теплофизические свойства которого близки к свойствам свинца.

На этапе нагрева в расчетах использовалась сетка с фиксированными узлами общим количеством  $19 \times 23$ . В физическом пространстве  $\Omega_{x,y}$  координатные линии криволинейной сетки концентрируются в области воздействия источника энергии и остаются неподвижными вплоть до момента плавления (рис. 1).

Второй этап расчетов начинается с момента достижения облучаемым участком поверхности температуры плавления  $T_m$ . Для введения новой фазы допускался перегрев облучаемой поверхности на 0.1 К. Затем из соотношения энергии перегрева твердой фазы и теплоты фазового перехода

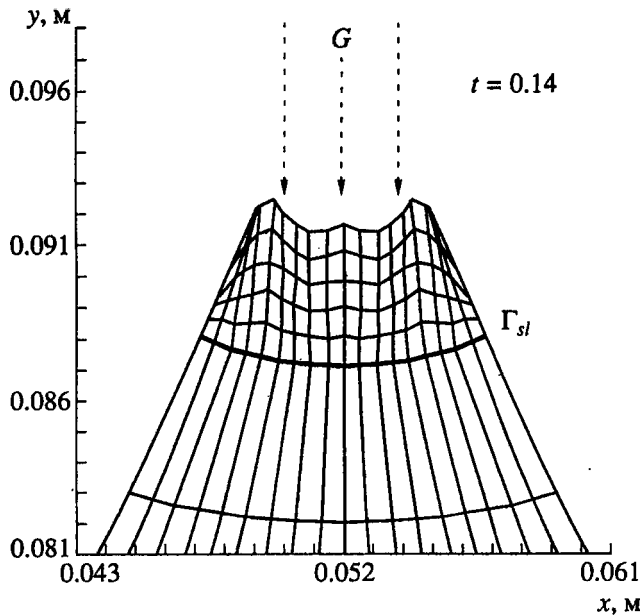


Рис. 3.

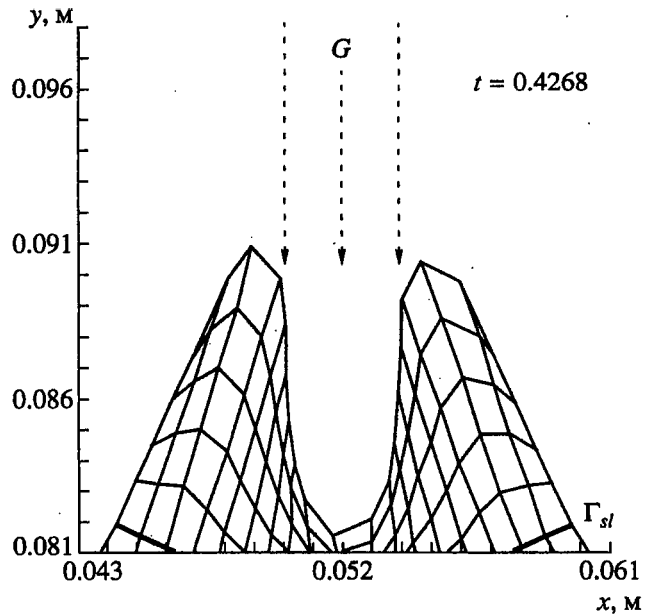


Рис. 4.

$L_m$  определяется толщина новой (жидкой) фазы порядка  $10^{-7}$ – $10^{-6}$  см. В области  $\Omega_{x,y}$  вводится новая подобласть  $\Omega_l$  (тем самым  $\Omega_{x,y} = \Omega_s \cup \Omega_l$ ), в которой строится расчетная сетка с общим числом узлов  $19 \times 6$ . С появлением скорости  $\vartheta_{sl}$  во всей области  $\Omega_{x,y} = \Omega_s \cup \Omega_l$  происходит радикальная перестройка сетки, осуществляемая посредством решения уравнений (8), (9), (12), (13). Численное решение этих уравнений позволяет получить квазиравномерное распределение координатных линий по каждому направлению. В дальнейшем пропорционально росту скорости  $\vartheta_{sl}$  происходит деформация под областей  $\Omega_s, \Omega_l$ , сопровождаемая динамическим распределением координатных линий (рис. 2).

Ситуация усложняется после достижения на поверхности температуры равновесного кипения, при которой становятся заметными процессы испарения. Их появление приводит к формированию нового фазового фронта, характеризующегося скоростью  $\vartheta_{lv}$  и вызывающего дополнительную деформацию под области  $\Omega_l$ . В частности, процесс развитого поверхностного испарения вызывает удаление вершины треугольника (рис. 3). Дальнейший нагрев поверхности приводит к росту скорости  $\vartheta_{lv}$  и формированию в жидкой фазе глубокого кратера (рис. 4).

Отметим, что появление второй подвижной границы  $\Gamma_{lv}(t)$ , вызывающее сильную деформацию под области  $\Omega_l$ , не приводит к усложнению вычислительного алгоритма и не требует дополнительных вычислительных усилий, поскольку в методе динамической адаптации возникновение

подвижной границы  $\Gamma(t)$  связано лишь с появлением в соответствующих граничных условиях потока  $Q_\Gamma$ , отличного от нуля, т.е.  $Q_\Gamma \neq 0$ . Полученные результаты свидетельствуют об отсутствии серьезных ограничений, накладываемых используемым математическим аппаратом на наличие подвижных границ. По этой причине число подвижных границ может быть любым и их количество будет определяться физическими условиями задачи. Рассмотренный пример свидетельствует также о том, что динамическая адаптация является надежным средством решения задач, ранее считавшихся нерешаемыми, к которым, в частности, относятся проблемы, связанные с сильной динамической деформацией области определения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилюк И.И. // УМН. 1985. Т. 40. В. 5(245). С. 133–185.
2. Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Зуев И.В., Кокора А.Н. Лазерная и электронно-лучевая обработка материалов: Справочник. М.: Машиностроение, 1985. 495 с.
3. Mazhukin V.I., Samarskii A.A. // Serv. Math. Industry. 1994. V. 4. № 1. P. 85–149.
4. Masters J.I. // J. Appl. Phys. 1956. V. 27. P. 477–484.
5. Мажукин В.И., Прудковский П.А., Самохин А.А. // Мат. моделирование. 1994. Т. 6. № 11. С. 3–10.
6. Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W. // J. Comput. Phys. 1982. V. 47. P. 1–108.
7. Vinokur M. // J. Comput. Phys. 1983. V. 50. P. 215–234.
8. Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. // ЖВМиМФ. 1965. Т. 5. № 5. С. 816–827.