Доклады Национальной академии наук Беларуси

2000 **ноябрь—декабрь** **Том 44 № 6**

УДК 519.63

В. И. МАЖУКИН, П. П. МАТУС, И. Е. МОЗОЛЕВСКИЙ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ СХЕМ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ ПО ВРЕМЕНИ СЕТКАХ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

1. Введение. Теоретический интерес к неравномерным сеткам обусловлен их широким применением при численном решении задач математической физики. Разностные схемы на неравномерных сетках имеют обычно более низкий порядок локальной аппроксимации. В настоящее время построены и исследованы вычислительные методы на неравномерных по пространству сетках для широкого класса уравнений математической физики с сохранением второго порядка локальной аппроксимации [1]. При этом используются стандартные шаблоны разностных схем. Менее изучены теоретические аспекты трехслойных схем на неравномерных по времени сетках [2, 3].

В настоящей работе исследуются трехслойные операторно-разностные схемы с операторами, действующими в конечномерных гильбертовых пространствах на неравномерных по времени сетках. Доказана устойчивость по начальным данным и получены априорные оценки в сеточных энергетических нормах. Приводится пример трехслойной асимптотически устойчивой схемы второго порядка локальной аппроксимации по времени и пространству для параболического уравнения.

2. Априорные оценки. Пусть задано вещественное конечно-мерное пространство H и сетка по времени

$$\bar{\hat{\omega}}_\tau = \left\{t_n = t_{n-1} + \tau_n,\ t_0 = 0,\ n = 1, 2, \ldots, N_0,\ t_{N_0} = T\right\} = \hat{\omega}_\tau \cup \left\{0, T\right\}.$$

Обозначим через $D(t)$, $B(t)$, $A : H \to H$, $t \in \hat{\omega}_t$, линейные операторы в H. Рассмотрим задачу Коши для однородного операторно-разностного уравнения

$$Dy_{\bar{t}\hat{t}} + By_{\overset{\circ}{t}} + Ay = 0,\ \ y_0 = u_0,\ \ y_1 = u_1, \tag{1}$$

где $y_n = y(t_n) \in H$ — искомая функция, а $u_0, u_1 \in H$ заданы. Здесь и далее используются следующие безындексные обозначения:

$$y_{\bar{t}\hat{t}} = (y_t - y_{\bar{t}}) / \tau^*,\ \ y_t = (y_{n+1} - y_n) / \tau_{n+1},\ \ y_{\bar{t}} = (y_n - y_{n-1}) / \tau_n, \tag{2}$$

причем $\tau^* = \tau_n^* = 0{,}5(\tau_n + \tau_{n+1})$. Через H_R, где $R^* = R \ge 0$, будем обозначать пространство со скалярным произведением $(y, v)_R$ и полунормой $\|y\|_R^2 = (Ry, y)$. Относительно операторов схемы (1) будем предполагать выполненными следующие условия:

$$D(t) = D^*(t) \ge 0,\ \ B(t) \ge 0,\ t \in \hat{\omega}_\tau,\ \ A^* = A > 0, \tag{3}$$

$$D(t) \le D(t - \tau),\ \ \frac{\tau_n}{\tau_{n+1}} \le \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n},\ \ B(t_n) \ge 0{,}5\tau_{n+1}A. \tag{4}$$

В теории устойчивости трехслойных операторно-разностных схем обычно предполагается, что переменный оператор $D(t)$ является липшиц-непрерывным. В случае разностных схем, аппроксимирующих, например, волновое уравнение с постоянными коэффициентами, приводит к необходимости использования квазиравномерной сетки по переменной t.

Т е о р е м а. *Пусть выполнены условия* (3) — (4). *Тогда разностная схема* (1) *равномерно устойчива по начальным данным и имеет место оценка*

$$\left\|y_{\bar{t},n+1}\right\|_{D_n}^2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\tau_n}{\tau_{n+1}}\right)\left\|y_{n+1}\right\|_A^2 \le \left\|y_{\bar{t},1}\right\|_{D_0}^2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\tau_0}{\tau_1}\right)\left\|y_1\right\|_A^2. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножая уравнение (1) скалярно на $2\tau^* y_{t}$ и пользуясь первым условием (4), находим оценки

$$\begin{aligned} &2\tau^*(Dy_{\bar{t}t}, y_t) = 2\tau^*(Dy_{\bar{t}t},\ \frac{1}{2}(y_t + y_{\bar{t}}) + \frac{\tau^*}{2} y_{\bar{t}t}) = \\ &= \left\|y_t\right\|_D^2 - \left\|y_{\bar{t}}\right\|_D^2 + \tau^{*2}\left\|y_{\bar{t}t}\right\|_D^2 \ge \left\|y_{\bar{t},n+1}\right\|_{D_n}^2 - \left\|y_{\bar{t},n}\right\|_{D_{n-1}}^2, \end{aligned} \tag{6}$$

$$2\tau^*(By_t, y_t) = 2\tau^*\left\|y_t\right\|_B^2. \tag{7}$$

При выполнении второго условия (4) имеет место неравенство $\tau_n^* / \tau_{n+1} \le \tau_{n-1}^* / \tau_n$. Тогда с учетом последней оценки находим

$$\begin{aligned} &2\tau^*(Ay, y_t) = \frac{\tau_n^*}{\tau_{n+1}}\left(\left\|y_{n+1}\right\|_A^2 - \left\|y_n\right\|_A^2\right) - \tau_{n+1}\tau_n^*\left\|y_t\right\|_A^2 \ge \\ &\ge \frac{\tau_n^*}{\tau_{n+1}}\left\|y_{n+1}\right\|_A^2 - \frac{\tau_{n-1}^*}{\tau_n}\left\|y_n\right\|_A^2 + 2\tau_n^*\left\|y_t\right\|_{-\frac{\tau_{n+1}}{2}A}^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Суммируя полученные оценки (6)—(8) и пользуясь третьим условием (4), приходим к рекуррентному соотношению

$$\left\|y_{\bar{t},n+1}\right\|_{D_n}^2 + \frac{\tau_n^*}{\tau_{n+1}}\left\|y_{n+1}\right\|_A^2 \le \left\|y_{\bar{t},n}\right\|_{D_{n-1}}^2 + \frac{\tau_{n-1}^*}{\tau_n}\left\|y_n\right\|_A^2.$$

Отсюда немедленно следует оценка (5). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Условие теоремы $\tau_n / \tau_{n+1} \le \tau_{n-1} / \tau_n$ выполняется на любой гармонической сетке $\tau_n = q\tau_{n-1}$, $q = \text{const} > 0$.

П р и м е р 1. Рассмотрим трехслойную операторно-разностную схему с весами

$$y_{\bar{t}t} + Ay^{(\sigma_1,\sigma_2)} = 0, \quad y_0 = u_0, \quad y_1 = u_1. \tag{9}$$

Схема (9) приводится к каноническому виду (1) при

$$D_n = E + \tau_n\tau_n^*\sigma_2 A, \quad B_n = (\tau_{n+1}\sigma_1 - \tau_n\sigma_2)A. \tag{10}$$

Заметим, что условия теоремы

$$D_n - D_{n-1} = \sigma_2(\tau_n\tau_n^* - \tau_{n-1}\tau_{n-1}^*)A \le 0,$$

$$B_n - 0{,}5\tau_{n+1}A = (\tau_{n+1}(\sigma_1 - 0{,}5) - \tau_n\sigma_2)A \ge 0$$

выполнены, если

$$\sigma_2\tau_n\tau_n^* \le \sigma_2\tau_{n-1}\tau_{n-1}^*,\ \sigma_1 \ge \frac{1}{2} + \frac{\tau_n}{\tau_{n+1}}\sigma_2. \tag{11}$$

З а м е ч а н и е 2. На гармонической сетке $\tau_n = q\tau_{n-1}$ первое условие (11) при $\sigma_2 \ge 0$ выполнено на сгущающейся сетке с $q \le 1$, а при $\sigma_2 \le 0$ — на разбегающейся сетке с $q \ge 1$.

З а м е ч а н и е 3. Если $\sigma_2 = 0$, то D — постоянный оператор и схема (9) безусловно устойчива при любых τ_n и $\sigma_1 \ge 0{,}5$.

П р и м е р 2. Схема второго порядка локальной аппроксимации на неравномерной по времени сетке. В прямоугольнике $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0,T]$, $\overline{\Omega} = \{x\colon 0 \le x \le l\}$, $0 \le t \le T$ рассмотрим первую краевую задачу для одномерного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T, \tag{12}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t > 0,\ u(x,0) = u_0(x),\ 0 \le x \le l, \tag{13}$$

в которой $0 < c_1 \le k(x) \le c_2$. На сетке

$$\omega = \omega_h \times \hat{\omega}_\tau,\ \overline{\omega}_h = \left\{x_i = ih,\ \ i = \overline{0,N},\ \ hN = l\right\},$$

равномерной по пространству и неравномерной по времени дифференциальную задачу (12), (13) аппроксимируем следующей разностной схемой

$$y_t + 0{,}5\tau_+ y_{\bar{t}\hat{t}} = (a\hat{y}_{\bar{x}})_x, \tag{14}$$

$$\hat{y}_0 = \hat{y}_N = 0,\ \ y(x,0) = u_0(x). \tag{15}$$

Здесь $\tau_+ = \tau_{n+1}$, $a = 0{,}5(k_{i-1} + k_i)$. Нетрудно убедиться, что относительно узла (x_i, t_{n+1}) трехслойная разностная схема (14), (15) аппроксимирует исходную задачу со вторым порядком, т. е.

$$\psi_i^{n+1} = -u_{t,i} - 0{,}5\tau_{n+1}u_{\bar{t}\hat{t},i} + (au_{\bar{x}}^{n+1})_{x,i} = O(h^2 + \tau_{n+1}^2).$$

Схема (14) представляет собой обобщение известной асимптотически устойчивой схемы [4] второго порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$

$$\frac{3}{2}y_t - \frac{1}{2}y_{\bar{t}} = (a\hat{y}_{\bar{x}})_x$$

на неравномерную по времени сетку. Разностная схема (14) приводится к операторно-разностной схеме (1), если положить $y = (y_1^n, y_2^n, \ldots, y_{N-1}^n)$, $(Ay)_i = -(ay_{\bar{x}})_{x,i}$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, $y_0 = y_N = 0$, $D_n = 0{,}5\tau_{n+1}E$, $B_n = E + \tau_{n+1}A$. Пространство H состоит в данном случае из функций, заданных на сетке $\overline{\omega}_h$ и равных нулю на границе. Скалярное произведение и норму зададим выражениями: $(y,v) = \sum\limits_{i=1}^{N-1} hy_iv_i$, $\|y\| = \sqrt{(y,y)}$. Свойства оператора A хорошо изучены [1]. В частности, $A = A^* > \delta E$, $\delta = (8c_1)/l^2$. Проверим выполнимость условий теоремы. Очевидно, что $D_n \le D_{n-1}$ при $\tau_{n+1} \le \tau_n$, $B_n - 0{,}5\tau_{n+1}A = E + 0{,}5\tau_{n+1} - A > 0$ при любом τ_{n+1}. Следовательно, схема (14), (15) равномерно устойчива по начальным условиям при $\tau_{n+1} \le \tau_n$.

З а м е ч а н и е 4. Любопытно отметить, что если в схеме (1) потребовать липшиц-непрерывность оператора $D(t)$ (т. е. использовать стандартный аппарат исследования устойчивости трехслойных разностных схем [1, 4]), то от условий на сетку типа $\tau_{n+1} \le \tau_n$ можно избавиться за счет требования квазиравномерной по времени сетки: $|\tau_{n+1} - \tau_n| \le c\tau_n\tau_{n+1}$.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «АЛГОРИТМ 4» при частичной поддержке Российского и Белорусского республиканского фондов фундаментальных исследований.

Авторы выражают благодарность профессору П. Н. Вабищевичу за постановку проблемы и обсуждение полученных результатов.

Summary

The stability of three level operator finite difference schemes on non uniform in time grids is studied in Hilbert spaces of finite dimension. A priori estimates for uniform stability relative to initial conditions are obtained under natural conditions for operators and for non uniform time grid steps. The results obtained here are applied to investigate stability of three level weghted schemes and schemes of second order of approximation $O\left(h^2 + \tau_n^2\right)$ for some parabolic equations.

Литература

1. С а м а р с к и й А. А., В а б и щ е в и ч П. Н., М а т у с П. П. Разностные схемы с операторными множителями. Мн., 1998.
2. Б о к о в А. Г. // Годишн. Висш. учебн. завед. Прилож. мат. 1976. Т. 12, № 2. С. 87—96.
3. Д ь я к о н о в Е. Г., Б о к о в А. Г. // Докл. Болг. АН. 1975. Т. 28, № 2. С. 157—160.
4. С а м а р с к и й А. А. Теория разностных схем. М., 1977.

Институт математического моделирования Российской АН,
Институт математики НАН Беларуси,
Федеральный университет Санта Катарина (Бразилия)

Поступило 21.02.2000