

УДК 519.63

МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

© 2000 г. Академик А. А. Самарский, В. И. Мажукин, П. П. Матус, М. М. Чуйко

Поступило 01.10.99 г.

В настоящей работе на основе комбинации двух известных разностных схем второго порядка аппроксимации [1] построены схемы, удовлетворяющие принципу максимума при произвольных знакопеременных коэффициентах. Такие схемы принято называть монотонными. Для этих алгоритмов получены априорные оценки устойчивости в сильной норме \bar{C} . Отметим, что уравнения со смешанными производными возникают при рассмотрении вычислительных методов для классических уравнений (Лапласа, Пуассона и др.) на произвольных неортогональных сетках. Вследствие этого полученные результаты могут быть применены к построению эффективных вычислительных методов на адаптивных сетках. Кроме того, они могут послужить теоретической основой для обоснования вопросов устойчивости и сходимости хорошо известного метода динамической адаптации [2].

1. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СО ЗНАКОПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В прямоугольнике $\bar{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ с границей Γ рассмотрим задачу Дирихле для эллиптического уравнения, содержащего смешанные производные:

$$\begin{aligned} Lu &= -f(x), \quad x \in G, \quad u = \mu(x), \\ x &\in \Gamma, \quad x = (x_1, x_2), \end{aligned} \quad (1)$$

$$Lu = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 L_{\alpha\beta} u, \quad L_{\alpha\beta} u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right). \quad (2)$$

Предполагаются выполненными следующие условия эллиптичности:

Институт математического моделирования
Российской Академии наук, Москва
Институт математики
Академии наук Беларуси, Минск

$$c_1 \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha, \beta=1}^2 k_{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \xi_\beta \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2, \quad x \in G, \quad (3)$$

где $c_1 > 0, c_2 > 0$ – постоянные, а $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ – любой вектор. Из (3), в частности, следует, что

$$0 < c_1 \leq k_{\alpha\alpha} \leq c_2, \quad \alpha = 1, 2, \quad k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} \geq c_1^2.$$

В прямоугольнике G построим равномерную сетку $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$, $\omega_h = \{x_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}), i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha - 1, x_\alpha^0 = 0, x_\alpha^{N_\alpha} = l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ с постоянными шагами $h_1 = x_1^{(i)} - x_1^{(i-1)}, h_2 = x_2^{(i)} - x_2^{(i-1)}$, γ_h – множество граничных узлов. На сетке ω_h введем сеточные операторы

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\alpha} y &= (a_{\alpha\alpha} y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} = \\ &= \frac{a_{\alpha\alpha}^{(+1_\alpha)} (y^{(+1_\alpha)} - y) - a_{\alpha\alpha} (y - y^{(-1_\alpha)})}{h_\alpha^2}, \end{aligned}$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^- y = 0.5((k_{\alpha\beta} y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta} y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}),$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^+ y = 0.5((k_{\alpha\beta} y_{x_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta} y_{\bar{x}_\beta})_{\bar{x}_\alpha}),$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$a_{\alpha\alpha} = 0.5(k_{\alpha\alpha}(x_\alpha, x_{3-\alpha}) + k_{\alpha\alpha}(x_\alpha - h_\alpha, x_{3-\alpha})),$$

$$v^{(\pm 1_\alpha)} = v(x_\alpha \pm h_\alpha, x_{3-\alpha}).$$

В вычислительной практике при аппроксимации уравнения (1) используются следующие разностные схемы второго порядка локальной аппроксимации [1]:

$$\Lambda^- y = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \quad (4)$$

$$\Lambda^+ y = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \quad (5)$$

где $\Lambda^- = \Lambda_{11}^- + \Lambda_{12}^- + \Lambda_{21}^- + \Lambda_{22}^-$, $\Lambda^+ = \Lambda_{11}^+ + \Lambda_{12}^+ + \Lambda_{21}^+ + \Lambda_{22}^+$.

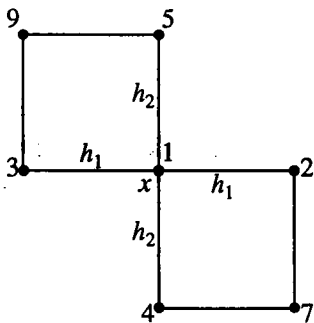


Рис. 1. Шаблон схемы (4).

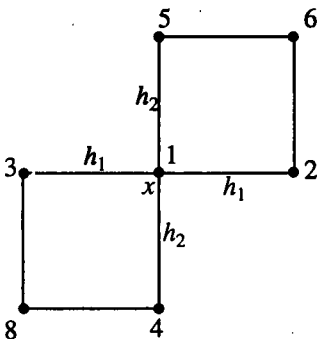


Рис. 2. Шаблон схемы (5).

Для применения принципа максимума схемы (4), (5) следует привести к каноническому виду [1]

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{W}(x)} B(x, \xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h, \quad (6)$$

и проверить следующие достаточные условия на коэффициенты

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0,$$

$$D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \mathcal{W}(x)} B(x, \xi) \geq 0, \quad x \in \omega_h.$$

Здесь $\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(x) \setminus \{x\}$, $\mathcal{W}(x)$ – шаблон схемы.

Узлы шаблона пронумеруем согласно рис. 1, 2. Тогда для схемы (4) будем иметь

$$\sum_{\xi \in \mathcal{W}(x)} B(x, \xi) = \sum_{k=2}^5 B^k + B^7 + B^9,$$

соответственно для схемы (5)

$$\sum_{\xi \in \mathcal{W}(x)} B(x, \xi) = \sum_{k=2}^6 B^k + B^8.$$

Выпишем значения коэффициентов B^k :

$$B^2 = \frac{k_{11} + k_{11}^m}{2h_1^2} + \frac{k_{21} + k_{12}^m}{2h_1h_2},$$

$$B^3 = \frac{k_{11} + k_{11}^m}{2h_1^2} - \frac{k_{21} + k_{12}^m}{2h_1h_2}, \quad m = 2, 3,$$

$$B^4 = \frac{k_{22} + k_{22}^m}{2h_2^2} + \frac{k_{12} + k_{21}^m}{2h_1h_2},$$

$$B^5 = \frac{k_{22} + k_{22}^m}{2h_2^2} - \frac{k_{12} + k_{21}^m}{2h_1h_2}, \quad m = 4, 5,$$

$$B^7 = -\frac{k_{12} + k_{21}^2}{2h_1h_2}, \quad B^8 = \frac{k_{12} + k_{21}^5}{2h_1h_2},$$

$$B^9 = -\frac{k_{12} + k_{21}^3}{2h_1h_2}, \quad B^{10} = \frac{k_{12} + k_{21}^4}{2h_1h_2},$$

$$A^- = k + \frac{k_{11}^1}{h_1^2} + \frac{k_{12} + k_{21}^1}{h_1h_2} + \frac{k_{22}^1}{h_2^2},$$

$$k = \frac{k_{11}^2 + k_{11}^3}{2h_1^2} + \frac{k_{22}^4 + k_{22}^5}{2h_2^2} > 0,$$

$$A^+ = k + \frac{k_{11}^1}{h_1^2} - \frac{k_{12} + k_{21}^1}{h_1h_2} + k_{22}.$$

Пользуясь условием эллиптичности (3) и гая $\xi^- = (\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2})$, $\xi^+ = (-\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2})$, убеждаемся в положительности коэффициентов A^-, A^+ . Из формулы коэффициентов B^m, B^+ видно, что разностную схему (4) следует применять в отрицательных коэффициентах $k_{\alpha\beta}$, $\alpha \neq \beta$, (5) – при положительных.

Теорема 1. Пусть при всех $x \in \omega_h$ выполнены условия положительности коэффициентов B^m, B^+ , $m = 2, 3, 4, 5$:

$$\max_{m=4,5} \frac{|k_{12} + k_{21}^m|}{k_{22} + k_{22}^m} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \min_{m=2,3} \frac{k_{11} + k_{11}^m}{|k_{21} + k_{12}^m|}.$$

Тогда при $k_{\alpha\beta}(x) \leq 0$, $\alpha \neq \beta$, разностная схема (4) при $k_{\alpha\beta}(x) \geq 0$ – разностная схема (5) устойчива.

по правой части, граничным условиям и имеет место оценка

$$\|y\|_C \leq 0.25(l_1^2 + l_2^2)\|\varphi\|_C + \|\mu\|_{C_\gamma}, \quad (8)$$

где

$$\|y\|_C = \max_{x \in \omega_h} |y(x)|, \quad \|\mu\|_{C_\gamma} = \max_{x \in \gamma_h} |\mu(x)|.$$

Доказательство теоремы проводится стандартным образом [3].

З а м е ч а н и е 1. Если матрица коэффициентов уравнения (1) имеет диагональное преобладание по строкам и столбцам: $k_{\alpha\alpha} \geq |k_{\alpha\beta}|$, $\alpha, \beta = 1, 2$, $\alpha \neq \beta$, то в (7) можно положить $h_1 = h_2 = h$, т.е. условия (7) в этом случае всегда выполнены.

2. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В данном пункте будем рассматривать краевую задачу (1) с недивергентным оператором L вида

$$Lu = k_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2k_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + k_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \quad (9)$$

и знакопеременными коэффициентами $k_{12}(x)$.

Дифференциальную задачу (1), (9) аппроксимируем монотонной разностной схемой второго порядка локальной аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2)$ вида

$$\Delta u = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \quad (10)$$

в которой

$$\Delta u = k_{11} y_{\bar{x}_1 x_1} + k_{12}^+ \Lambda_{12}^+ u + k_{12}^- \Lambda_{12}^- u + k_{22} y_{\bar{x}_2 x_2}, \quad (11)$$

$$k_{12}^+ = 0.5(k_{12} + |k_{12}|) \geq 0, \quad \Lambda_{12}^+ = y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + y_{x_1 x_2}, \quad (12)$$

$$k_{12}^- = 0.5(k_{12} - |k_{12}|) \leq 0, \quad \Lambda_{12}^- = y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}. \quad (13)$$

Шаблон схемы (10)–(13) в общем случае является 9-точечным (рис. 3).

Разностная схема (10) записывается в каноническом виде (6) с коэффициентами

$$\frac{2}{B} = \frac{3}{B} = \frac{k_{11}}{h_1^2} - \frac{|k_{12}|}{h_1 h_2}, \quad \frac{4}{B} = \frac{5}{B} = \frac{k_{22}}{h_2^2} - \frac{|k_{12}|}{h_1 h_2},$$

$$\frac{6}{B} = \frac{8}{B} = \frac{2k_{12}^+}{h_1 h_2} \geq 0, \quad \frac{7}{B} = \frac{9}{B} = -\frac{2k_{12}^-}{h_1 h_2} \geq 0, \quad (14)$$

$$A(x) = \sum_{m=1}^9 B_m.$$

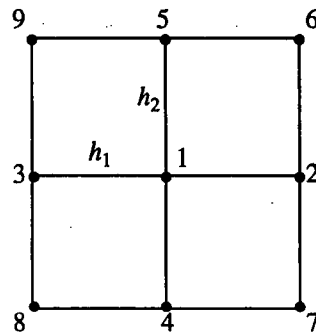


Рис. 3. Шаблон схемы (10).

Очевидно, что все коэффициенты (14) являются положительными при любом $x \in G$ и

$$\frac{|k_{12}|}{k_{22}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \frac{k_{11}}{|k_{12}|}. \quad (15)$$

Следовательно, если шаги сетки h_1, h_2 удовлетворяют соотношениям (15), то схема (10)–(13) является монотонной и для ее решения имеет место априорная оценка (8). К сожалению, непосредственно монотонных разностных схем для дивергентных (консервативных) уравнений (1), (2) в случае знакопеременных коэффициентов при смешанных производных построить не удастся. Чтобы приведенные выше результаты имели законченный характер, необходимо также рассмотреть задачи с наличием младших производных.

3. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА

Вновь рассмотрим дифференциальную задачу (1) с оператором

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^2 \left(k_{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + 2k_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - q(x)u, \quad (16)$$

где $|k_\alpha| \leq c_3$, $q(x) \geq 0$, а коэффициенты $k_{\alpha\beta}$ удовлетворяют требованию эллиптичности (3). Для построения соответствующих монотонных схем воспользуемся идеей А.А. Самарского [1, с. 184]. Входящие в (16) производные на неравномерной сетке ω_h заменим конечно-разностными соотношениями

$$k_{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \frac{k_{\alpha\alpha}}{1 + R_\alpha} u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + k_\alpha^+ u_{x_\alpha} + k_\alpha^- u_{\bar{x}_\alpha} + O(h_\alpha^2),$$

$$R_\alpha = \frac{0.5|k_\alpha|h_\alpha}{k_{\alpha\alpha}}, \quad k_\alpha^\pm = 0.5(k_\alpha \pm |k_\alpha|),$$

$$2k_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = k_{12}^+ \Lambda_{12}^+ u + k_{12}^- \Lambda_{12}^- u + O(h_1^2 + h_2^2).$$

В результате получим следующую разностную схему второго порядка локальной аппроксимации:

$$\sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{k_{\alpha\alpha}}{1+R_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\alpha} + k_\alpha^+ y_{x_\alpha} + k_\alpha^- y_{\bar{x}_\alpha} \right) +$$

$$+ k_{12}^+ \Lambda_{12}^+ y + k_{12}^- \Lambda_{12}^- y - dy = \varphi,$$

$$x \in \omega_h, \quad y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h.$$

Здесь d , φ – некоторые шаблонные функционалы [1], которые, в частности, могут быть взяты в виде

$$d(x) = q(x), \quad \varphi(x) = f(x), \quad x \in \omega_h.$$

Для того чтобы схема (16) была монотонной удовлетворяла принципу максимума, достаточно потребовать выполнения условия

$$\frac{|k_{12}|(1+R_2)}{k_{22}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \frac{k_{11}}{|k_{12}|(1+R_1)}.$$

З а м е ч а н и е 2. Полученные выше результаты естественным образом обобщаются на трехмерные задачи и многомерные параболические уравнения со смешанными производными. Подробному изложению этих результатов будет посвящена отдельная работа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
2. Дарьин Н.А., Мажукин В.И., Самарский А.А. ДАН. 1988. Т. 302. № 5. С. 1078–1081.
3. Вабищевич П.Н., Матус П.П., Самарский А.А. ЖВМиМФ. 1998. Т. 38. № 3. С. 413–424.