УДК 519.63

А.А. Самарский, В.И. Мажукин

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОМАССООБМЕНА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИИ

Институт математического моделирования РАН, Москва

Введение

Основные вычислительные особенности нестационарных задач тепломассообмена связаны с формированием и распространением фронтов (тепловой волны /1/, горения /2/, фазовых превращений /3/, контактных и свободных границ , ударных волн /4/), возникновением и перемещением зон больших градиентов /5/. В подобных ситуациях эффективность численного решения нелинейных дифференциальных задач определяется не только способами разностной аппроксимации и численной реализации сеточных уравнений, но и тем, насколько удачно было выполнено построение расчетных сеток. Проблема построения расчетных сеток с оптимальным распределением узлов особенно актуальна в задачах эволюционного типа, в которых особенности решения могут возникать и распространяться во всей области определения решения. При фиксированном общем числе узлов погрешность численного решения можно значительно уменьшить за счет управляемого перераспределения их из области медленного в область сильного изменения решения. В эволюционных задачах оптимальность расчетных сеток может быть достигнута посредством последовательной, на каждом шаге интегрирования, адаптации имеющейся сетки к решению.

Целью данной работы является всесторонняя демонстрация возможностей метода динамической адаптации /6-8/ применительно к задачам тепломассообмена. Для этого рассматриваются две важных и широко распространенных проблемы тепломассообмена: горение вещества и быстрые фазовые переходы в металле. В проблеме горения вычислительной особенностью решения является возникновение и распространение зон больших (одномерных по пространству) градиентов. В проблеме фазовых превращений вычислительные особенности обусловлены наличием двух взаимодействующих двумерных фазовых фронтов: плавления и испарения.

Проблема горения

Постановка задачи. Рассматривается гомогенная в тепловом и концентрационном отношении неподвижная газовая среда. Распространение фронта экзотермической реакции формулируется в простейшем варианте одностадийного горения. Процесс горения полагается изобарическим и описывается в диффузионно-тепловом приближении с помощью нелинейной системы из двух уравнений параболического типа: теплопроводности и диффузии. Процессы переноса характеризуются постоянными коэффициентами температуропроводности a и диффузии D. Скорость химической реакции имеет линейную зависимость от плотности ρ и экспоненциальную (аррениусовскую) от температуры T. В одномерном физическом пространстве $\Omega_{\tilde{x},\tilde{t}}:\ \tilde{x}_0 \le \tilde{x} \le \tilde{x}_1,\ \tilde{t} \ge 0$ задача о горении имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial}\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{t}} = D\frac{\partial^2}{\partial}\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{x}^2} - \tilde{\rho}\, K \exp\left(-\frac{E}{R\tilde{T}}\right), \qquad (1)$$

$$C_p\rho_o \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = k\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \Delta h\tilde{\rho}\; K\exp\left(-\frac{E}{R\tilde{T}}\right), \tag{2}$$

где $\tilde{t}$ и $\tilde{x}$ -независимые временная и пространственная координаты, Δh_A -массовая теплота сгорания, E -энергия активации реакции, k, C_p - коэффициент теплопроводности и удельная теплоёмкость вещества; Le - число Льюиса, $Le = D/\alpha$, $\alpha = k/C_p\rho_o$. В обезразмеренном виде система (1) - (2) приобретает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = Le\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \rho A\exp\left(-\frac{\theta}{T}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \rho A\exp\left(-\frac{\theta}{T}\right), \tag{4}$$

$$0 = x_0 \le x \le x_1 = L, \quad t \ge 0,$$

где

$$\alpha = \frac{k}{C_p\rho_o}, \quad Le = \frac{D}{\alpha}, \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_o}, \quad x = \frac{\tilde{x}}{L}, \quad t = \frac{\tilde{t}\alpha}{L^2}, \quad T = \frac{\tilde{T}C_p}{\Delta h}, \quad \theta = \frac{EC_p}{R(\Delta h)}, \quad A = \frac{KL^2}{\alpha}.$$

Начальные условия и граничные условия задаются в следующем виде:

$$t = 0: \quad T(x,0) = T_0, \quad \rho(x,0) = \rho_o;$$

$$x = 0: \quad T(x_1,t) = \begin{cases} T_0 + c*t, & t \le \dfrac{1}{c} \\ T_F = T_a & t > \dfrac{1}{c} \end{cases}, \; c^* \text{ - constant}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0; \tag{5}$$

$$x = L: \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Построение адаптирующейся сетки. Характерные особенности решения задачи (3)-(5) обуславливаются наличием процессов с сильно различающимися характерными временами: малым временем химической реакции и большим временем диффузионного механизма тепловой релаксации. Соответственно, высокая скорость химического превращения вещества и медленное распространение тепловых возмущений и диффузионного перемешивания реагирующей смеси приводят к формированию узкой зоны горения, характеризующейся большими градиентами температуры T и плотности ρ. Фронт горения зарождается на левой границе и быстро перемещается к противоположной. При численном решении требуется, чтобы в зоне реакции находилось определенное число узлов сетки. Эти два обстоятельства не позволяют при использовании сеток с фиксированными узлами производить дискретизацию пространственных переменных с крупным шагом. При больших отношениях размера рассматриваемой области к характерной толщине зоны горения эффективность вычислительных алгоритмов с фиксированными сетками становится очень низкой из-за большого числа используемых узлов. Значительно более эффективными в подобных ситуациях оказываются сетки, динамически адаптирующиеся к решению, которые позволяют оперативно концентрировать необходимое число узлов в зонах быстрого изменения.

В методе динамической адаптации /6/ построение расчетной сетки осуществляется на основе перехода к произвольной нестационарной системе координат с переменными (q,τ), принадлежащими некоторому расчетному пространству $\Omega_{q,\tau}$. Переход из физического пространства $\Omega_{x,t}$ в расчётное $\Omega_{q,\tau}$ осуществляется с помощью замены переменных общего вида $x=\xi\ (q,\tau)$, $t=\tau$, имеющей обратное преобразование $q=\varphi\ (x,t)$, $\tau=t$. Якобианом такого преобразования является функция $\psi=\partial x/\partial q$. Частные производные зависимых переменных выражаются обычным образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial}{\partial q}=\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial x}{\partial\tau}\frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial q}=\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{Q}{\psi}\frac{\partial}{\partial q},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial}{\partial q}=\frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial q},\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial}{\partial q}=\frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial q}\frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial q},$$

где $\partial x/\partial\tau=-Q$ - скорость движения нестационарной системы координат. В новых переменных (q,τ) задача (3), (4) запишется в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial\tau}+\frac{Q}{\psi}\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{1}{\psi}\frac{\partial W}{\partial q}+\rho A\exp\left(-\frac{\theta}{T}\right),\quad W=-\frac{1}{\psi}\frac{\partial T}{\partial q},\tag{6}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau}+\frac{Q}{\psi}\frac{\partial\rho}{\partial q}=Le\frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial q}\frac{1}{\psi}\frac{\partial\rho}{\partial q}-\rho A\exp\left(-\frac{\theta}{T}\right),\tag{7}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau}=-\frac{\partial Q}{\partial q},\quad \frac{\partial x}{\partial q}=\psi,\tag{8}$$

$$0=q_0\le q\le q_L=L,\quad \tau\ge 0.$$

Функция Q по-прежнему является произвольной. Ее задание определяет конкретный вид преобразования координат и служит управляющим параметром движения узлов сетки. Правильный выбор функции преобразования Q обеспечивает движение узлов, согласованное с решением, и является одной из наиболее важных проблем в методе динамической адаптации. Для определения необходимой функции преобразования воспользуемся методом квазистационарности /8/. Согласно этому подходу полагается, что существует такая нестационарная система координат, в которой все процессы протекают стационарно, т.е. временные производные решения равны нулю или достаточно малы. Распространив принцип квазистационарности на систему уравнений (6), (7), полагаем, что имеется такая система координат, в которой $\partial T/\partial\tau=\partial\rho/\partial\tau=0$. Тогда, разрешая систему уравнений (6), (7) относительно Q, получим:

$$Q=\frac{\frac{1}{\psi}\left(Le_A\frac{\partial}{\partial q}\left|\frac{\partial\rho}{\partial q}\right|+\frac{\partial}{\partial q}\left|\frac{\partial T}{\partial q}\right|\right)}{\left|\frac{\partial}{\partial q}(\rho+T)\right|+\frac{reg}{h}}+\frac{\left(\frac{\partial}{\partial q}\frac{1}{\psi}\right)*\left(Le\left|\frac{\partial\rho}{\partial q}\right|+\left|\frac{\partial T}{\partial q}\right|\right)}{\left|\frac{\partial}{\partial q}(\rho+T)\right|+\frac{reg}{h}}+\psi\frac{\left(\rho\ A\exp\left(-\frac{\theta}{T}\right)\right)}{\left|\frac{\partial}{\partial q}(\rho+T)\right|+\frac{reg}{h}}.$$

Первое и третье слагаемые в этой формуле обеспечивают сгущение узлов сетки, а второе ограничивает сближение двух соседних узлов до некоторой конечной величины. Учитывая немонотонный характер решения, первые производные плотности и температуры взяты по модулю, reg << 1 - постоянная, предотвращающая обращение в нуль знаменателя в тех точках, где пространственные производные обращаются в нуль.

С целью повышения эффективности метода динамической адаптации задачу (6)-(8) целесообразно представить в виде задачи со свободной границей. Учитывая, что процесс горения инициируется на левой границе $q = q_0$, а затем волна горения распространяется по холодному фону в направлении правой границы $q = q_L$, целесообразно исключить из рассмотрения область, не охваченную возмущением. Для этого произвольная точка $q_* \in (q_0, q_L)$, удовлетворяющая условиям $q_* > q_0$, $q_* << q_L$, объявляется новой границей с граничными условиями /7/:

$$T(q_*, t) = T_0, \quad u = \lim_{q \to q_*} \frac{k}{cT} \frac{1}{\psi} \frac{\partial T}{\partial q}. \tag{9}$$

Для уравнения (8) граничные и начальные условия запишутся в виде:

$$Q(q_0, t) = 0, \quad Q(q_*, t) = -u, \quad \psi(q,0) = 1. \tag{10}$$

Результаты моделирования. Анализ результатов численного решения системы (6) - (8) показал, что в зависимости от соотношения между коэффициентами температуропроводности α и диффузии D существуют два качественно различающихся режима распространения фронта реакции.

В первом режиме $Le = D/\alpha$ = 1 после того, как влияние левого граничного условия (греющаяся стенка) становится малым, устанавливается режим стационарного горения, характеризующийся перемещением пространственных профилей T(x) и ρ(x) с постоянной скоростью u(t), рис. 1.

Во втором случае, когда $Le = D/\alpha$ < 1 и при выполнении дополнительных соотношений между адиабатической температурой T_a и энергией активации θ_A, горение приобретает колебательный характер, переходящий по мере удаления от границы устойчивости ($Le << 1$) в автоколебательный режим, рис.2. Автоколебательный режим горения характеризуется пульсирующим распространением плоского фронта горения с определенной частотой и постоянной средней скоростью на всем временном интервале. На диаграмме движения этим колебаниям соответствуют периодические сгущения узлов сетки, рис. 3. Динамика узлов адаптирующейся сетки характеризуется также пространственными профилями функции ψ, рис. 4, представленными на различные моменты времени. Функция $\psi(x)$ характеризует изменение пространственного шага h_x и показывает, во сколько раз изменилось расстояние между соседними узлами в физическом пространстве. В моменты вспышек, которым соответствуют максимальные значения температуры и скорости, узлы сетки концентрируются в зонах теплового и диффузионного фронтов, что проявляется на графиках $\psi(x)$ в виде резких провалов.

Эффективность используемых алгоритмов определялась сравнением затрат компьютерного времени и количества узлов, необходимых для расчетов одних и тех же вариантов на адаптирующихся и эйлеровых сетках с фиксированными узлами. Сравнение показало, что во всех исследуемых режимах для адаптирующихся сеток достаточным было 30÷50 узлов, в то время как на эйлеровых сетках для сходящихся значений скорости u требовалось от 1000 до 6000 узлов. Затраты компьютерного времени для алгоритмов с адаптирующимися сетками оказались в 5-20 раз, меньше чем для алгоритмов с эйлеровыми сетками.

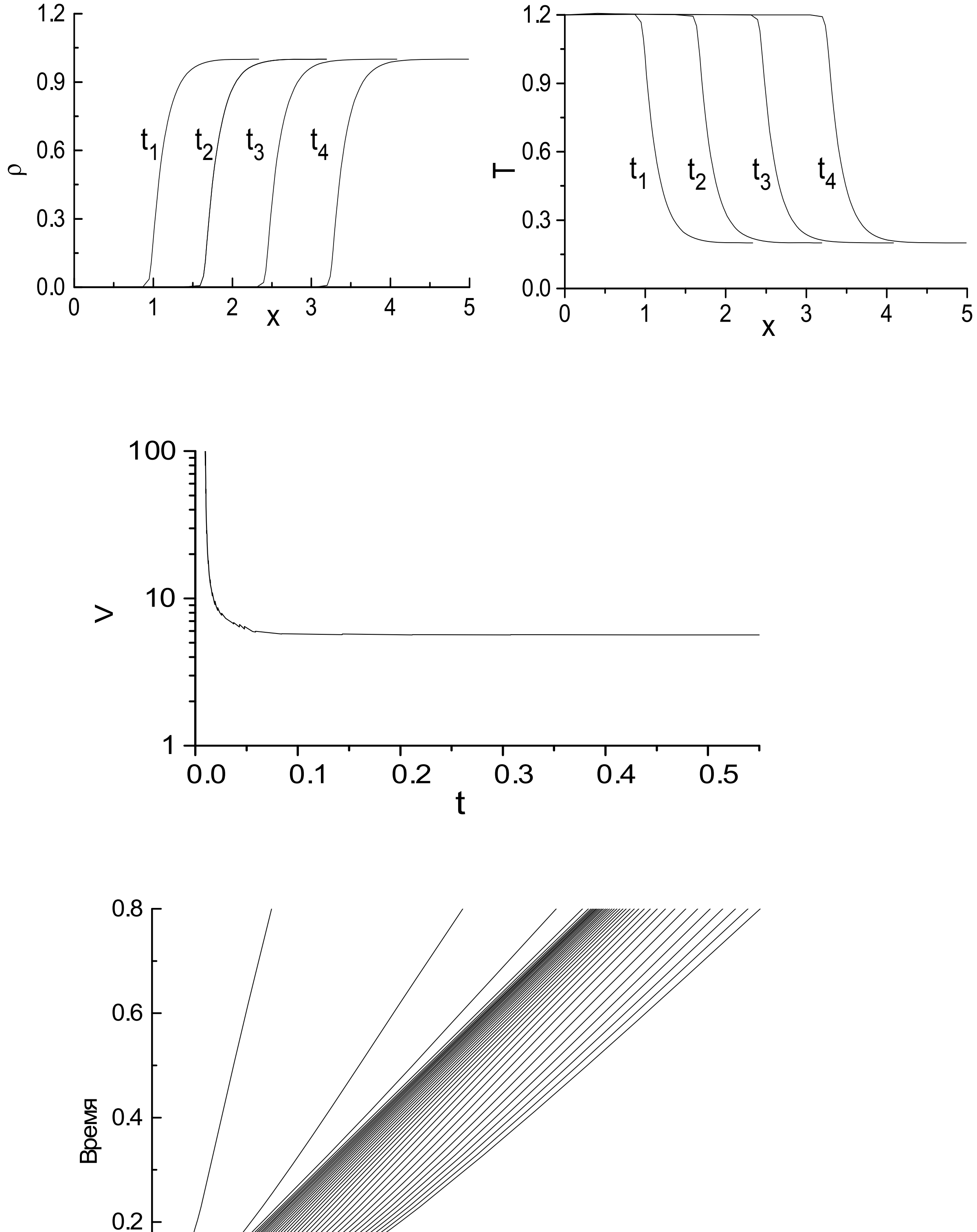
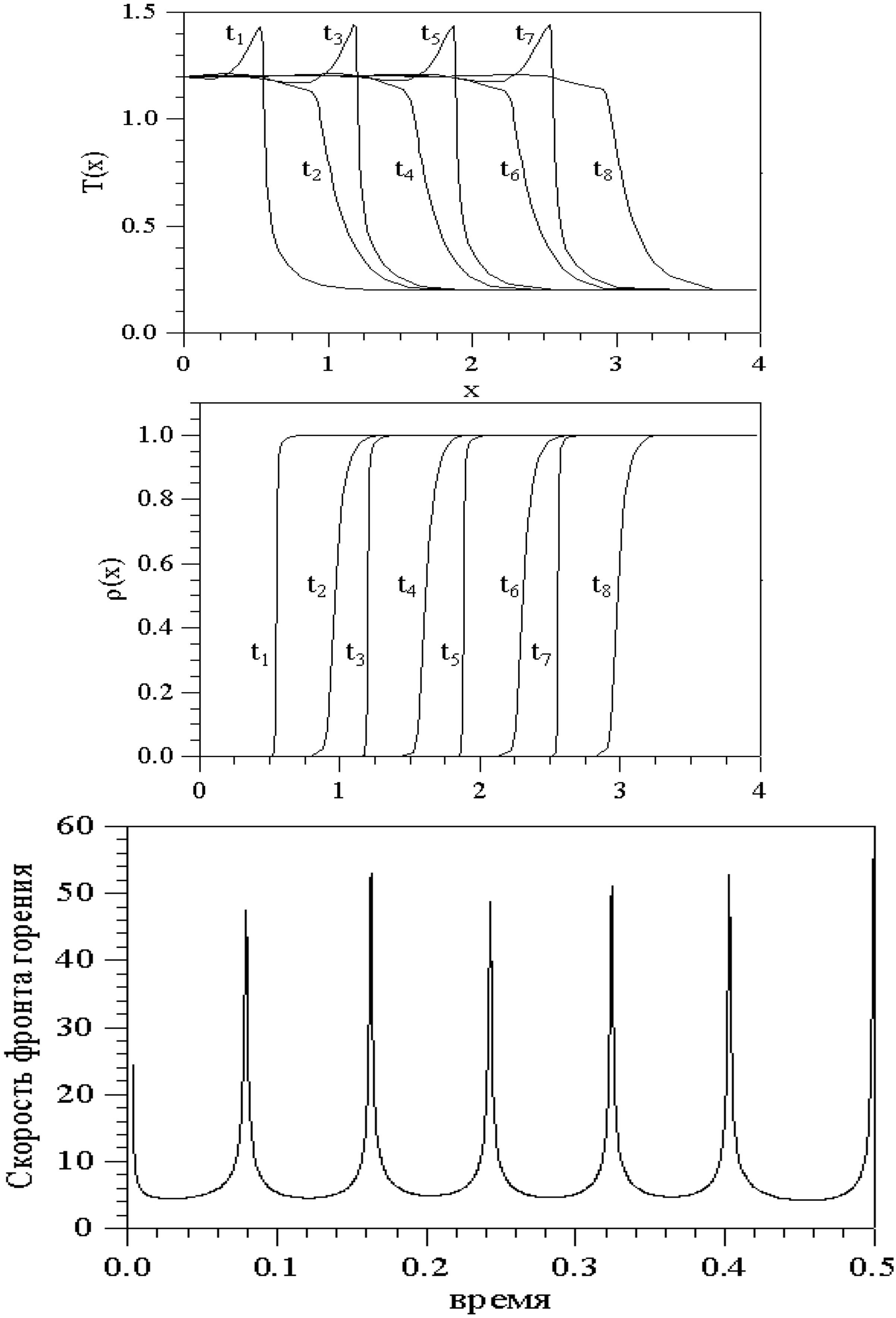


Рис. 1



1.5
1.0
0.5
0.0
T(x)
t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 t_7 t_8
0 1 2 3 4
x
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
ρ(x)
0 1 2 3 4
60
50
40
30
20
10
0
Скорость фронта горения
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5
время

Рис. 2

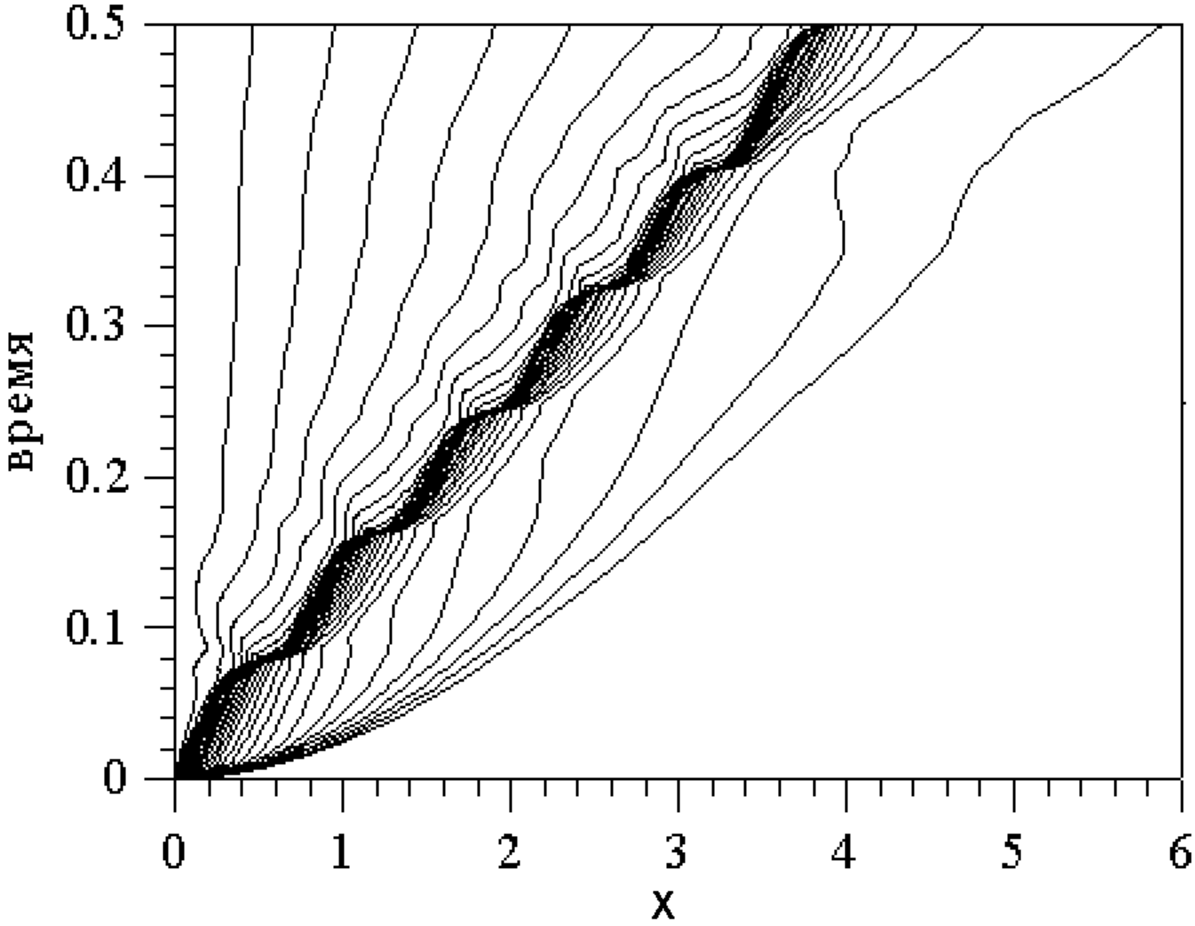


Рис. 3

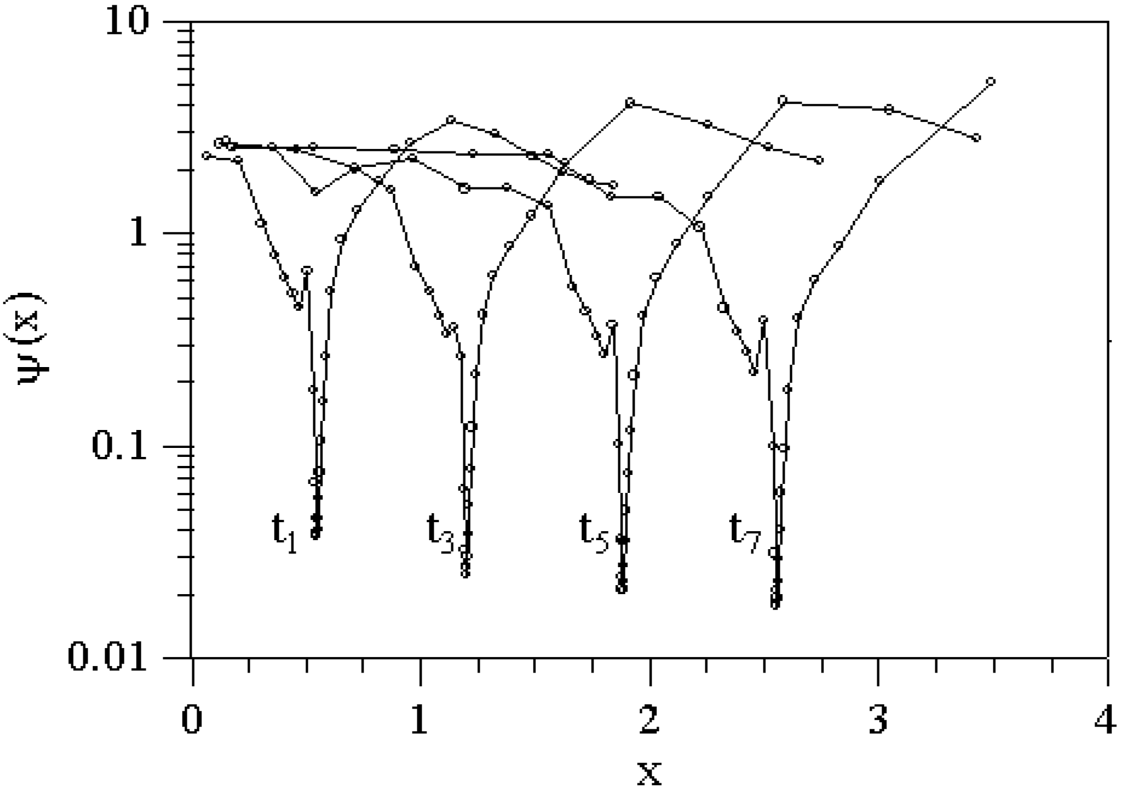


Рис. 4

Двумерная многофронтовая задача Стефана

Интерес к задачам типа Стефана вызван как их теоретической значимостью /9/, связанной с развитием математического аппарата для нелинейных задач с подвижными и свободными границами, так и важными физическими и технологическими приложениями, возникающими, в области тепломассообмена /10/. Возможности метода динамической адаптации применительно к многомерным постановкам рассматриваются на примере численного решения многофронтовой нестационарной двумерной по пространству задачи Стефана с явным выделением межфазных границ в произвольных областях.

Математическая формулировка классического варианта нестационарной двумерной задачи Стефана сводится к квазилинейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{div}\lambda(T)\operatorname{grad}T = -\frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\partial W_2}{\partial y} \qquad (11)$$

в области $\Omega_{x,y}$, состоящей из двух подобластей $\Omega_s(t)$ и $\Omega_l(t)$: $\Omega_{x,y} = \Omega_s(t) \cup \Omega_l(t)$, разделенных подвижной межфазной границей $\Gamma_{sl}(t)$, на которой выполняются дифференциальное условие Стефана $W_l^n - W_s^n = L_m \rho_s \vartheta_{sl}^n$ и равенство температур $T_s = T_l = T_m$. Здесь $H = c_p \rho T$ - энтальпия, $\vec{W} = (W_1, W_2)$ - тепловой поток, T_m, L_m - температура и теплота плавления (кристаллизации), ϑ_{sl} - скорость движения границы раздела фаз, индексы s,l обозначают принадлежность вещества к твердой и жидкой фазам, а n - нормальную компоненту. Учет испарения осуществляется в рамках однофазного варианта задачи Стефана и приводит к появлению второй подвижной границы раздела фаз $\Gamma_{lv}(t)$: жидкость-пар в области $\Omega_{x,y}(t) = \Omega_s(t) \cup \Omega_l(t)$. Процесс развитого поверхностного испарения описывается с помощью трех законов сохранения (массы, импульса, энергии):

$$\rho_l \vartheta_{lv}^n = \rho_v\left(u - \vartheta_{lv}^n\right),\ P_l + \rho_l\left(\vartheta_{lv}^n\right)^2 = P_v + \rho_v\left(u - \vartheta_{lv}^n\right)^2,\ -\lambda\,\partial T/\partial n = G^n - L_v \rho_l \vartheta_{lv}^n,$$

и двух дополнительных соотношений, характеризующих кинетику фазового перехода и определяющихся из приближения кнудсеновского слоя $T_v = T_v(T_l, M)$, $\rho_v = \rho_v(\rho_H, M)$.

Предположим, что для некоторого расчетного пространства $\Omega_{\xi,\eta,\tau}$, в котором определена произвольная нестационарная криволинейная система координат с переменными (ξ, η, τ), и физического $\Omega_{x,y,t}$ с переменными (x,y,t) на каждый момент времени существует невырожденное взаимно-однозначное преобразование $\xi = \xi(x, y, t)$, $\eta = \eta(x, y, t)$, $\tau = t$, отображающее физическую область произвольной формы $\Omega_{x,y}$ в прямоугольник $\Omega_{\xi,\eta}$ в плоскости криволинейных координат (ξ, η). Якобианом такого преобразования является функция J:

$$\rho J^{-1} = \rho\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) = \psi.$$

Математическая постановка задачи (11) в произвольной нестационарной криволинейной системе координат (ξ, η, τ) приобретает вид:

$$\left[\frac{\partial(\psi H)}{\partial\tau} = -\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{(\rho W_1 + HQ_1)\frac{\partial y}{\partial\eta} - (\rho W_2 + HQ_2)\frac{\partial x}{\partial\eta}\right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial\eta}\left\{-(\rho W_1 + HQ_1)\frac{\partial y}{\partial\xi} + (\rho W_2 + HQ_2)\frac{\partial x}{\partial\xi}\right\}\right]_m, \quad m = s, l, \tag{12}$$

$$\left[\frac{\partial x}{\partial\tau} = -\frac{Q_1}{\rho}\right]_k, \quad Q_1 = -\rho\left(D_\xi\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2} + D_\eta\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}\right), \tag{13}$$

$$\left[\frac{\partial y}{\partial\tau} = -\frac{Q_2}{\rho}\right]_k, \quad Q_2 = -\rho\left(D_\xi\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2} + D_\eta\frac{\partial^2 y}{\partial\eta^2}\right), \tag{14}$$

$$W_1 = -\frac{\lambda\rho}{\psi}\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial T}{\partial\xi} - \frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial T}{\partial\eta}\right), \quad W_2 = -\frac{\lambda\rho}{\psi}\left(-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial T}{\partial\xi} + \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial T}{\partial\eta}\right),$$

$$(\xi, \eta = \eta_{sl}) \in \Gamma_{sl} : \left[\left(-\frac{\partial y}{\partial\xi}W_1 + \frac{\partial x}{\partial\xi}W_2\right)_l - \left(-\frac{\partial y}{\partial\xi}W_1 + \frac{\partial x}{\partial\xi}W_2\right)_s\right]\gamma^{-1/2} = -L_m Q_{sl}^n,$$

$$(\xi, \eta) \in \Gamma_{lv} : \qquad Q_{lv}^n = -\rho_v\left(u + Q_{lv}^n / \rho_l\right),$$

$$P_l + \left(Q_{lv}^n\right)^2 / \rho_l = P_v + \rho_v\left(u + Q_{lv}^n / \rho_l\right)^2,$$

$$\left(-\frac{\partial y}{\partial\xi}W_1 + \frac{\partial x}{\partial\xi}W_2\right)_l \gamma^{-1/2} = G^n + L_v Q_{lv}^n, \quad \eta = \text{const},$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}W_1 - \frac{\partial x}{\partial\eta}W_2\right)_l \alpha^{-1/2} = G^n + L_v Q_{lv}^n, \quad \xi = \text{const}.$$

Сетки с динамическим распределением узлов использовались на этапе решения задачи Стефана, связанном с зарождением и распространением фазовых границ $\Gamma_{sl}(t)$ и $\Gamma_{lv}(t)$. Динамическое распределение основывалось на стремлении получить на каждый момент времени квазиравномерное распределение координатных линий по каждому направлению. Достижение этой цели осуществлялось заданием уравнений обратного преобразования (13), (14) в виде уравнений типа диффузии, где D_ξ, D_η имеют смысл коэффициентов диффузии, определяемых через параметры задачи. Численное решение уравнений (13), (14) позволяет определять координаты узлов сетки на каждый момент времени.

Рассмотрим пример задачи с сильно деформирующейся областью, численное решение которой сопровождается радикальной перестройкой сетки. В металлическом треугольнике на одну из вершин воздействует источник энергии, вызывающий его последовательный нагрев, плавление и испарение. Геометрические размеры треугольника (высота и длина основания) во много раз превосходят линейные размеры источника энергии, интенсивность которого составляла $G = 10^5$ Вт/см^2.

На этапе нагрева в расчетах использовалась сетка с фиксированными узлами общим количеством 19×23. В физическом пространстве $\Omega_{x,y}$ координатные линии криволинейной сетки концентрируются в области воздействия источника энергии и остаются неподвижными вплоть до момента плавления, рис. 5. Расчеты с динамическим распределением узлов начинались с момента достижения облучаемым участком поверхности температуры плавления T_m. При этом в области $\Omega_{x,y}$ вводится новая подобласть Ω_l, в которой строится расчетная сетка с общим числом узлов 19×6. С появлением скорости ϑ_{sl} во всей области $\Omega_{x,y} = \Omega_s \cup \Omega_l$ происходит радикальная перестройка сетки, осуществляемая посредством решения уравнений (13),(14). Численное решение этих уравнений позволяет получить квазиравномерное распределение координатных линий по каждому направлению. В дальнейшем пропорционально росту скорости ϑ_{sl} происходит деформация подобластей Ω_s, Ω_l, сопровождаемая динамическим распределением координатных линий, рис. 6. Достижение на поверхности температуры равновесного кипения приводит к формированию нового фазового фронта, характеризующегося скоростью ϑ_{lv} и дополнительной деформации подобласти Ω_l. В частности, процесс развитого поверхностного испарения вызывает удаление вершины треугольника, рис. 7. Дальнейший нагрев поверхности приводит к росту скорости ϑ_{lv} и формированию в жидкой фазе глубокого кратера, рис. 8.

Отметим, что появление второй подвижной границы $\Gamma_{lv}(t)$, вызывающее сильную деформацию подобласти Ω_l, не приводит к усложнению вычислительного алгоритма и не требует дополнительных вычислительных усилий, поскольку в методе динамической адаптации возникновение подвижной границы $\Gamma(t)$ связано лишь с появлением в граничных условиях отличного от нуля потока Q_Γ: $Q_\Gamma \neq 0$. Полученные результаты свидетельствуют об отсутствии серьезных ограничений, накладываемых используемым математическим аппаратом на наличие подвижных границ. По этой причине число подвижных границ может быть любым, и их количество будет определяться физическими условиями задачи. Рассмотренный пример свидетельствует также о том, что динамическая адаптация является надежным средством решения целого ряда задач, ранее считавшихся не решаемыми, к которым, в частности, относятся проблемы, связанные с сильной динамической деформацией области определения.

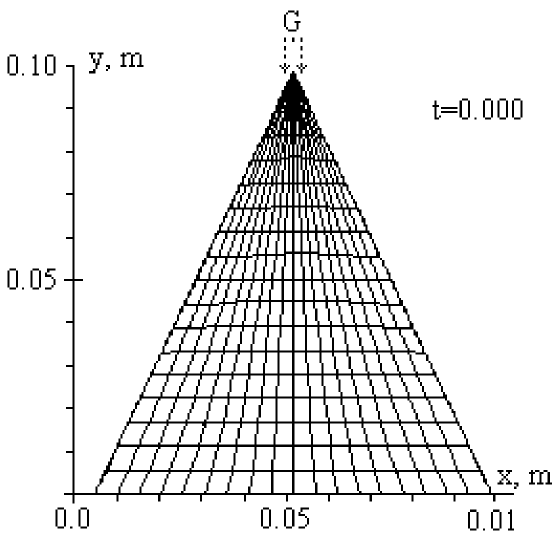


Рис. 5

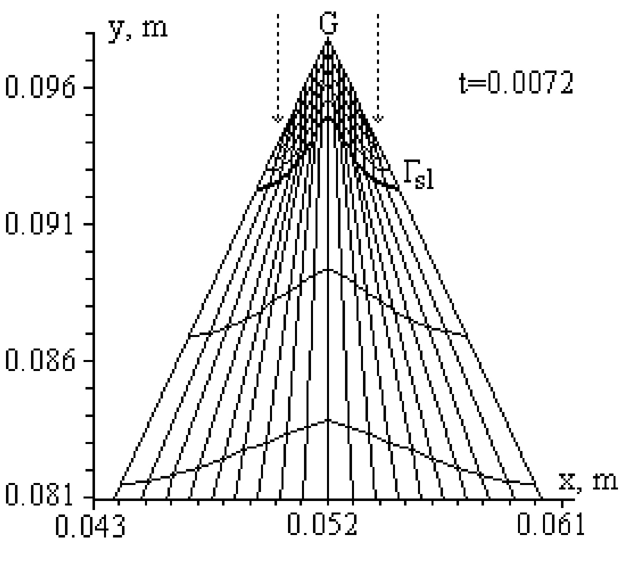


Рис. 6

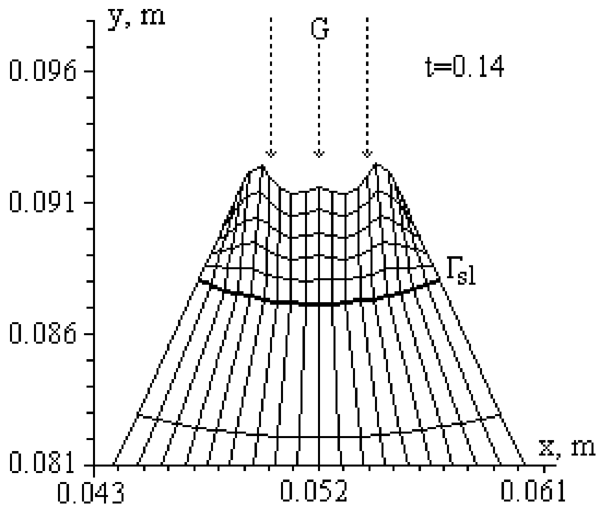


Рис. 7

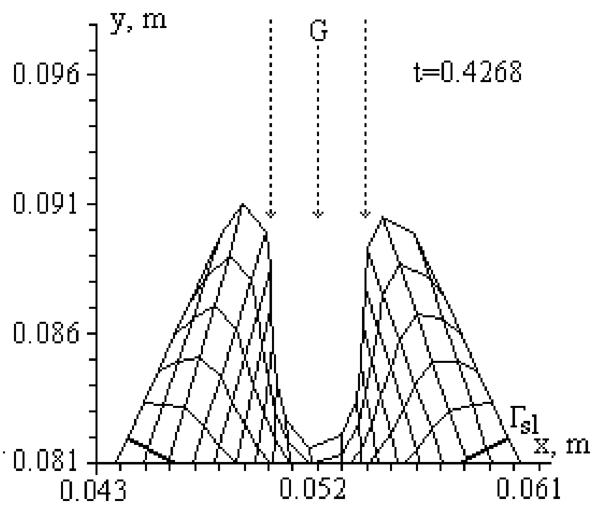


Рис. 8

Литература

1. Самарский А.А., Соболь И.М. Примеры численного расчета температурных волн // ЖВ и МФ, 1963, т.298, №1, с.64-68.
2. Льюис Б., Эльбе Г. Горение, пламя и взрывы в газах. М.: Мир, 1968, 592 с.
3. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Мир, 1964.
4. Баренблатт Г.И., Вишик И.М. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // Прикл. Матем. и мех., 1956, т.20, №3, с.411-417.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
6. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Математическое моделирование задачи Стефана на адаптивной сетке. Дифференциальные уравнения. // 1987, т.23, № 7, с. 1154-1160.
7. Мажукин В.И., Такоева Л.Ю. Принципы построения динамически адаптирующихся к решению сеток в одномерных краевых задачах // Мат.моделир.1990, т.2, №3, с.101-118.
8. Мажукин В.И., Самарский А.А. и др. Метод динамической адаптации для нестационарных задач с большими градиентами. // Мат.моделир.1993, т.5, №4, с.32-56.
9. Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосиб.: Наука, 1986. 239 с.
10. Дьюли У. Лазерная технология и анализ материалов. М.: Мир.1986. 502 с.