

УДК 519.633

## ДИНАМИЧЕСКИ АДАПТИРУЮЩИЕСЯ СЕТКИ ДЛЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ<sup>1)</sup>

© 2007 г. П. В. Бреславский, В. И. Мажукин

(125047 Москва, Миусская пл., 4, ИММ РАН)

e-mail: immras@orc.ru

Поступила в редакцию 13.11.2006 г.

Рассматривается дальнейшее развитие метода динамической адаптации для газодинамических задач, описывающих многократное взаимодействие ударных волн, волн разрежения и контактных границ. На примере тестовых задач Вудварда–Колеллы и неравномерно ускоряющегося поршня показана эффективность предлагаемого метода для задач газовой динамики с явным выделением ударных волн и контактных границ. Управляемое распределение узлов сетки осуществляется с помощью диффузионного приближения. Обоснован выбор коэффициента диффузии для получения в каждой из подобластей решения как квазиравномерных, так и сильно неравномерных сеток. Взаимодействие разрывов между собой разрешается при помощи задачи о распаде произвольного разрыва. Применение метода динамической адаптации к решению задачи Вудварда–Колеллы позволило получить решение на 420 ячейках, практически совпадающее с результатами WENO5-метода на 12800 ячейках. В задаче о неравномерно ускоряющемся поршне при помощи выбора соответствующего коэффициента диффузии в функции преобразования построены сильно неравномерные расчетные сетки. С их помощью выполнено моделирование взаимодействия серии ударных волн с явным выделением ударных волн и контактных разрывов. Библиографический список: 50. Фиг. 17.

**Ключевые слова:** газодинамические задачи, численный метод динамической адаптации разрывных сеток, многократное взаимодействие ударных волн разрежения, контактные границы.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в научной литературе имеется большое количество работ, посвященных проблемам построения и адаптации расчетных сеток [1]–[7]. Под адаптацией понимается процесс построения сеток с оптимальным по отношению к искомому решению распределением узлов. Обычно построение оптимальных сеток для той или иной задачи математической физики связано с наличием априорной информации о решении. Но если подобная информация отсутствует или структура и особенности решения быстро меняются с течением времени, что характерно для нестационарных задач, то построение оптимальных сеток сталкивается с рядом трудностей. Практическая возможность решения данной проблемы заключается в представлении поиска численного решения и построения расчетной сетки в виде единого процесса. По количеству опубликованных работ выделяются два основных направления построения адаптивных сеток для нестационарных задач: адаптивно встраивающиеся и динамически адаптирующиеся.

Адаптивно встраивающиеся алгоритмы (см. [8]–[10]), получившие в последние годы широкое распространение (см. [11], [12]), используются для повышения точности численного решения посредством дробления ячеек исходной сетки в областях резкого изменения решения. Дробление может применяться многократно, что определяет появление измельченных ячеек высоких (от 3-го до 6-го) уровней. Адаптивно встраивающиеся сетки отличаются сложным алгоритмом построения, связанным с переменным числом узлов и наличием зон сшивания разномасштабных ячеек.

В методах динамической адаптации (см. [13]–[21]), менее сложных алгоритмически и позволяющих работать как с постоянным (см. [19]), так и с переменным числом узлов (см. [18]), управляемое распределение узлов достигается посредством использования информации о динамике искомого решения. Это позволяет концентрировать большое количество узлов в зонах резкого изменения решения (см. [13]). Тесная взаимосвязь между динамикой решения и положением узлов сетки приводит к необходимости переопределения координат узлов на каждом временном слое. Это обстоятельство вынуждает предъявлять более жесткие требования к согласованию

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 04-01-00701, 06-07-89191-а).

динамики численного решения с движением узлов и к степени автоматизации построения сетки, из-за чего преимущественно обладают алгоритмы, в которых отсутствуют любые подгоночные параметры (см. [15]). Наиболее ярко эти особенности проявляются при построении адаптивных сеток для нестационарных задач газовой динамики (см. [16]–[22]), описывающих быстротеняющиеся процессы. Решение дифференциальных уравнений гиперболического типа, лежащих в основе газодинамических задач, накладывает дополнительные требования к механизму адаптации, которые заключаются в необходимости рассмотрения и учета разрывных решений, типа ударных волн и контактных границ.

Существующие методы решения задач газовой динамики можно условно разделить на два класса: методы сквозного счета (см. [23]) и методы с явным выделением границ (см. [24]). Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки.

Методы решения гиперболических систем уравнений без выделения разрывов – так называемые методы сквозного счета – в последнее время постоянно развиваются и улучшаются. Основная проблема при построении разностных схем в методах сквозного счета заключается в желании повысить точность аппроксимации и одновременно обеспечить получение монотонных численных решений, что при наличии сильных и слабых разрывов является нетривиальной задачей. Теорема С.К. Годунова (см. [25]) говорит, что в линейном случае монотонность можно обеспечить только в разностных схемах первого порядка аппроксимации. Первоначально для получения монотонных решений вводили в модель искусственную вязкость (линейную, квадратичную или их комбинации). В последние годы методы с искусственной вязкостью, как правило, не используются. Связано это не в последнюю очередь с тем, что разработаны новые алгоритмы решения задач газовой динамики со сглаживанием разрывов.

На первом этапе развитие “монотонизированных” разностных схем повышенного порядка точности связано с работами [26], [27] и методом антидиффузии с коррекцией потока (FCT-метод) (см. [28]–[30]). Следующим шагом в развитии разностных схем для решения систем уравнений гиперболического типа можно считать появление TVD-схем (см. например, работы [31], [32], [33], [34]) и возникновение ENO- и WENO-методом, (см. [35], [36]). Другое, достаточно близкое к указанным выше методам направление основано на монотонной или квазимонотонной интерполяции сеточных решений. Методы, использующие данную технику, получили название методов реконструкции сеточных решений. В том числе конечно-параболическая реконструкция, так называемый PPM-метод (piecewise parabolic method, см. [37]). Более детально с названными методами решения задач газовой динамики можно ознакомиться в монографии [38] или обзоре [39].

Основными недостатками всех методов сквозного счета является использование слишком большого числа узлов сетки для достижения требуемой точности и необходимость использования монотонных разностных схем. Существенного ослабления этих факторов можно достичь применением алгоритмов с процедурами управляемого сгущения узлов сетки в областях возникновения разрывных решений.

Необходимость применения методов с явным выделением границ диктуется в первую очередь рядом практических приложений, таких, как например выделение энергии или строгий учет кинетики различных реакций в области разрыва. Методы явного выделения разрывов (см. [40]–[42]), несмотря на некоторые затруднения, связанные с относительной сложностью определения места и момента возникновения разрыва и построением сетки в области с изменяющейся геометрией в многомерных постановках, обладают несомненным преимуществом для широкого класса задач. В последние годы активно развиваются методы отслеживания фронтов (front tracking method) (см. [40], [43]), как правило применяемые совместно с AMR (adaptive mesh refinement) алгоритмами, и методы с адаптацией под градиенты, основывающиеся на вариационных подходах (см. [44]), гармонических отображениях (см. [45]) и динамической адаптации (см. [4]).

Целью данной работы является дальнейшее развитие метода динамической адаптации для газодинамических задач, содержащих взаимодействующие разрывные решения типа ударных волн, волн разрежения и контактных границ.

В основу рассматриваемого метода динамической адаптации положен переход к произвольной нестационарной системе координат, в которой неизвестными являются не только сеточные функции, но и координаты узлов сетки. Преобразование координат производится с помощью искомого решения, и в зависимости от особенностей решения получают то или иное распределение узлов сетки (см. [4], [15], [19], [46]). Указанный подход позволяет производить вычисления как методами сквозного счета с автоматическим сгущением узлов к особенностям решения, так и методами с явным выделением подвижных границ и разрывов, когда это необходимо. Обои

этими способами ранее исследовалась задача о равномерно ускоряющемся поршне (см. [19]). Была оценена эффективность алгоритма и выход на автомодельное решение.

Особенности метода динамической адаптации будут показаны на примере решения тестовой задачи Вудварда–Колеллы (см. [37]), являющейся в настоящее время наиболее распространенным тестом для всех новых методов решения задач газовой динамики, и задачи о неравномерно ускоряющемся поршне.

Основные проблемы в рассматриваемых примерах связаны с выделением разрывов и их взаимодействием. Выделение разрыва требует разработки надежного средства определения момента и местоположения возникающего разрыва. Многократное взаимодействие разрывов отличается большим разнообразием, которое может быть сведено к рассмотрению ряда элементарных взаимодействий: столкновение двух встречных ударных волн, поглощение одной ударной волны догоняющей ее другой ударной волной и прохождение ударной волны через контактную границу.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дальнейшее моделирование производится в приближении динамики идеального газа. Тогда математически задача сводится к решению системы уравнений газовой динамики: дифференциальных законов сохранения массы, импульса и энергии, дополненных соответствующими каждой из задач начальными и граничными условиями. Ниже приведена форма записи этих уравнений в эйлеровой системе координат в одномерной постановке:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(P + \rho u^2) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}(P u + \rho u E) = 0, \text{ или } \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathcal{E}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \mathcal{E}) + P \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

где  $E = \mathcal{E} + \frac{u^2}{2}$ ,  $P = \rho R T$ ,  $\mathcal{E} = \frac{R}{\gamma - 1} T$ .

Принятые обозначения  $\rho$  – плотность,  $u$  – скорость,  $P$  – давление,  $\mathcal{E}$ ,  $T$  – внутренняя энергия и температура,  $R$  – газовая постоянная,  $\gamma$  – показатель адиабаты.

Используя замену переменных общего вида, в соответствии с методом динамической адаптации выполняем переход к производной нестационарной системе координат с переменными  $(q, \tau)$ , в которых система уравнений (2.1) запишется следующим образом (см. [19]):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\Psi}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{Q}{\rho} - u \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\Psi u) + \frac{\partial}{\partial q}(P + Qu) = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\Psi \mathcal{E}) + \frac{\partial}{\partial q}(Q \mathcal{E}) + P \frac{\partial u}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\Psi}{\rho},$$

где  $\frac{\Psi}{\rho}$  – якобиан преобразования,  $Q$  – функция преобразования физический смысл которой представляет собой поток вещества через границу,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{Q}{\rho} \quad (2.3)$$

есть скорость движения системы координат.

В итоге в переменных  $(q, \tau)$  получили расширенную дифференциальную систему (2.2), в которой последнее дифференциальное уравнение является уравнением обратного преобразования;

совместно с якобианом преобразования оно используется для определения координат узлов сетки, т.е. для построения расчетной сетки. Управляемое распределение узлов на каждый момент времени осуществляется с помощью функции преобразования  $Q$ , конкретный вид которой подлежит определению.

### 3. РАСПАД ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА

Задача о распаде произвольного разрыва детально исследована. Анализ ее решения для идеального газа можно найти, например, в [23], [47]. Как уже говорилось, задача о распаде произвольного разрыва может возникать при моделировании в двух случаях. Во-первых, это может происходить, когда разрыв изначально присутствует и требуется рассмотреть процессы, происходящие в результате его распада. Во-вторых, к задаче о распаде сводится любое взаимодействие ударной волны с ударными волнами или контактными границами. Применительно к исследованию процессов в идеальном газе можно предложить следующий алгоритм определения структуры решения и величин газодинамических функций после распада произвольного разрыва.

Пусть индекс  $n = 1$  соответствует параметрам  $P_1, u_1, \rho_1, T_1$  с левой стороны, а  $n = 2$  – параметрам  $P_2, u_2, \rho_2, T_2$  с правой стороны произвольного разрыва. Нужно найти параметры  $P_3 = P_4, u_3 = u_4, \rho_3, \rho_4, T_3, T_4$  после распада, где (3–4) – это контактная граница, которая разделяет газ в состоянии  $n = 3$ , примыкающий с другой стороны к волне (1–3), и газ в состоянии  $n = 4$  со второй границей, соответствующей волне (4–2). В силу автомодельности решения задачи о распаде разрыва, как было показано в [23], [47], волны (1–3) и (2–4), если таковые существуют, представляют собой либо ударную волну, либо волну разрежения. Поэтому если  $P_1 < P_3$ , то (1–3) является ударной волной. Параметры  $P_3, u_3$  состояния 3 в этом случае находятся на адиабате Гюгонио, которая проходит через точку  $P_1, u_1$ . Если же, наоборот,  $P_1 > P_3$ , то (1–3) является волной разрежения. Тогда параметры  $P_3, u_3$  состояния 3 находятся на адиабате Пуассона, проходящей через точку  $P_1, u_1$ . Аналогично определяется и тип волны (4–2) в зависимости от того, как соотносятся друг с другом давления  $P_2$  и  $P_4$ .

Исходя из сказанного, определяем функцию  $F_n(P)$  для каждого из состояний 1 и 2 рассматриваемого произвольного разрыва (см. [23]):

$$F_n(P) = \begin{cases} P_n + \frac{\gamma + 1}{4} \left[ \rho_n (u_3 - u_n)^2 + \sqrt{\rho_n^2 (u_3 - u_n)^4 + \frac{16\gamma}{(\gamma + 1)^2} P_n \rho_n (u_3 - u_n)^2} \right], & P > P_n, \\ P_n \left[ 1 - \frac{\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma P_n / \rho_n}} (u_3 - u_n) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}, & P < P_n. \end{cases}$$

В этом определении функции первое уравнение описывает адиабату Гюгонио, второе – адиабату Пуассона. Приравняв  $F_1(P)$  и  $F_2(P)$ , по значениям на разрыве  $P_1, u_1, \rho_1, P_2, u_2, \rho_2$  методом Ньютона найдем газодинамическую скорость  $u_3 = u_4$  на контактной границе. После вычисления  $u_3 = u_4$  определим  $P_3 = P_4$ , а затем и остальные величины: плотности  $\rho_3, \rho_4$ , температуры  $T_3, T_4$  и (при наличии ударных волн) скорости разрывов, используя условия Гюгонио:

$$\begin{aligned} \rho_-(u_- - V) &= \rho_+(u_+ - V) = Q, \\ P_- + \rho_-(u_- - V)^2 &= P_+ + \rho_+(u_+ - V)^2, \\ \mathcal{E}_- + P_-/\rho_- + (u_- - V)^2/2 &= \mathcal{E}_+ + P_+/\rho_+ + (u_+ - V)^2/2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Индексы (–) и (+) относятся к параметрам на разных сторонах разрыва,  $V$  и  $Q$  – скорость и поток массы через границу.

Рассмотрим две ситуации:

1) левая ударная волна проходит правую контактную границу или догоняет правую ударную волну, движущуюся в одном направлении с левой;

2) две встречные ударные волны взаимодействуют между собой.

В первом случае найденное давление удовлетворяет неравенству  $P_1 > P_3 = P_4 > P_2$  и алгоритм продолжения расчета будет следующим. Слева вместо ударной волны устанавливается контактный разрыв, на котором заданы  $u_3 = u_4$  и  $P_3 = P_4$ , а также значения  $\rho_3, T_3$  слева и  $\rho_4, T_4$  справа от разрыва; правая граница заменяется ударной волной со значениями  $P_4, u_4, \rho_4, T_4$  за фронтом и  $P_2$ ,

$u_2, \rho_2, T_2$  перед фронтом. В области между разрывами все газодинамические величины предполагаются равными  $P_4, u_4, \rho_4, T_4$ . В области левой контактной границы располагается не выделяемая явно волна разрежения.

Во втором случае выполнены неравенства  $P_3 = P_4 > P_1$  и  $P_3 = P_4 > P_2$ , что несколько усложняет алгоритм расчета. На левой границе вместо ударной волны, движущейся слева направо, устанавливается ударная волна, распространяющаяся в противоположном направлении со значениями  $P_3, u_3, \rho_3, T_3$  за фронтом и  $P_1, u_1, \rho_1, T_1$  перед фронтом. Справа вместо ударной волны устанавливается контактная граница, на которой заданы  $u_3 = u_4, P_3 = P_4$  и значения  $\rho_3, T_3$  слева от разрыва, а  $\rho_4, T_4$  – справа от него. Затем вводится дополнительная подобласть, левой границей которой является контактный разрыв, а правой – ударная волна с параметрами  $P_4, u_4, \rho_4, T_4$  за фронтом и  $P_2, u_2, \rho_2, T_2$  перед фронтом. В области между левой ударной волной и контактной границей все газодинамические величины предполагаются равными  $P_3, u_3, \rho_3, T_3$ , а между контактной границей и правой ударной волной равными  $P_4, u_4, \rho_4, T_4$ .

#### 4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В процессе решения на границах в каждой из расчетных подобластей могут использоваться различные граничные условия. Для рассматриваемых в данной публикации задач эти условия классифицируются следующим образом.

На внешних неподвижных границах ставится условие непротекания:

$$u = 0, \quad Q = 0. \quad (4.1)$$

На внешней границе, связанной с поршнем, задается закон движения поршня:

$$u = V(t), \quad Q = -\rho V(t). \quad (4.2)$$

На внешней границе, отслеживающей распространение возмущения по фону, используются граничные условия

$$u = 0, \quad \rho = \rho_0, \quad T = T_0, \quad Q = -\frac{\partial P}{\partial u}. \quad (4.3)$$

На контактных границах выполняются равенства

$$u_+ = u_-, \quad P_- = P_+, \quad Q_- = Q_+ = 0, \quad (4.4)$$

где индексы (–) и (+) относятся к параметрам на разных сторонах разрыва (слева и справа соответственно).

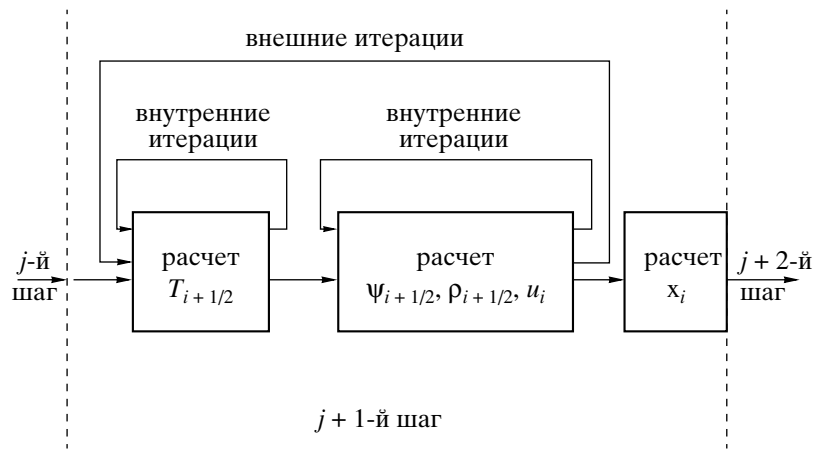
На ударных волнах требуется выполнение соотношений Гюгонио (3.1). Так как при этом три уравнения задают связь семи величин, то четыре из них определяются из решения системы (2.2) в граничных точках, а именно плотность, скорость и температура перед фронтом ударной волны и скорость за фронтом. Остальные три (скорость движения разрыва, плотность и температура за фронтом ударной волны) определяются собственно из соотношений (3.1). Например, при движении ударной волны в направлении слева направо из соотношений (3.1) будут найдены величины  $V, \rho_-, T_-$ .

Данная классификация граничных условий для системы дифференциальных уравнений (2.2) полностью замыкает исследуемую математическую модель. Конечный вид граничных условий приводится ниже в ходе рассмотрения каждой конкретной проблемы.

#### 5. РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Численная реализация модельной системы уравнений (2.1) в расчетном пространстве в каждой из подобластей производилась на разностной сетке с целыми и полужелыми узлами

$$\omega_{h, \Delta\tau} = \left\langle (q_i, \tau^j), (q_{i+1/2}, \tau^j), q_{i+1} = q_i + h, q_{i+1/2} = q_i + 0.5h, i = 0, 1, \dots, N-1 \right\rangle. \\ \tau^{j+1} = \tau^j + \Delta\tau^j, j = 0, 1, \dots$$



Фиг. 1. Блок-схема алгоритма расчета.

В физическом пространстве ей соответствует расчетная сетка

$$\omega_{h, \Delta t} = \left\langle \begin{array}{l} (x_i^j, t^j), (x_{i+1/2}^j, t^j), x_{i+1}^j = x_i^j + h_{x,i}^j, x_{i+1/2}^j = x_i + 0.5h_{x,i}^j, i = 0, 1, \dots, N-1 \\ h_{x,i}^j = h \left( \frac{\Psi}{\rho} \right)_{i+1/2}^j \\ t^{j+1} = t^j + \Delta t^j, j = 0, 1, \dots \end{array} \right\rangle.$$

Для аппроксимации дифференциальных уравнений использовался метод конечных разностей на разнесенных сетках, выписывалось семейство разностных схем из [19], в которых в полудельных точках определяются плотность  $\rho_{i+1/2}$ , температура  $T_{i+1/2}$ , давление  $P_{i+1/2}$  и внутренняя энергия  $\mathcal{E}_{i+1/2}$ , а в целых – скорость  $u_i$  и функция  $Q_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_{i+1/2}^{j+1} - \Psi_{i+1/2}^j}{\Delta \tau^j} &= -\frac{Q_{i+1}^{\sigma_1} - Q_i^{\sigma_1}}{h_{i+1/2}}, \\ \frac{\Psi_{i+1/2}^{j+1}/\rho_{i+1/2}^{j+1} - \Psi_{i+1/2}^j/\rho_{i+1/2}^j}{\Delta \tau^j} &= -\frac{Q_{i+1}^{\sigma_1}/\rho_{i+1}^{\sigma_2} - Q_i^{\sigma_1}/\rho_i^{\sigma_2} - u_{i+1}^{\sigma_3} + u_i^{\sigma_3}}{h_{i+1/2}}, \\ \frac{\Psi_{i+1/2}^{j+1} u_i^{j+1} - \Psi_{i+1/2}^j u_i^j}{\Delta \tau^j} &= -\frac{P_{i+1/2}^{\sigma_4} - P_{i-1/2}^{\sigma_4} - Q_{i+1/2}^{\sigma_1} u_{i+1/2}^{\sigma_3} - Q_{i-1/2}^{\sigma_1} u_{i-1/2}^{\sigma_3}}{0.5(h_{i+1/2} + h_{i-1/2})}, \\ \frac{\Psi_{i+1/2}^{j+1} \mathcal{E}_{i+1/2}^{j+1} - \Psi_{i+1/2}^j \mathcal{E}_{i+1/2}^j}{\Delta \tau^j} &= -\frac{Q_{i+1}^{\sigma_1} \mathcal{E}_{i+1}^{\sigma_5} - Q_i^{\sigma_1} \mathcal{E}_i^{\sigma_5}}{h_{i+1/2}} - P_{i+1/2}^{\sigma_4} \frac{u_{i+1}^{\sigma_3} - u_i^{\sigma_3}}{h_{i+1/2}}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $f^{\sigma_r} = \sigma_r f^{j+1} + (1 - \sigma_r) f^j$ , а  $\sigma_r = \sigma_1, \sigma_2, \dots$  – весовые множители, определяющие степень неявности разностной схемы. Если  $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = 0$ , получаем полностью явную разностную схему с погрешностью аппроксимации  $O(\Delta t + h^2)$ . В случае  $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = 1$  схема будет полностью неявной с тем же порядком аппроксимации. Значению  $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = 0.5$  соответствует схема с порядком аппроксимации  $O(\Delta t^2 + h^2)$ . Вычисления производились как по полностью неявной разностной схеме, так и по смешанной с весовыми множителями, равными 0.5. На результатах расчетов выбор весов практически не сказывался, но шаг интегрирования был в полтора-два раза больше в схеме со вторым порядком аппроксимации по времени. В настоящей работе представлены результаты, полученные по полностью неявной разностной схеме с первым порядком аппроксимации по времени и вторым по пространству.

Для функций  $\{u, Q\} = f$ , заданных в целых узлах сетки  $\omega$ , их значения в полуцелых определялись по формуле  $f_{i+1/2} = 0.5(f_i + f_{i+1})$ . Аналогично, значения остальных функций  $\{\psi, \rho, T, P, \mathcal{E}\} = f$  в целых узлах находились через известные значения этих функций в полуцелых:  $f_i = 0.5(f_{i-1/2} + f_{i+1/2})$ .

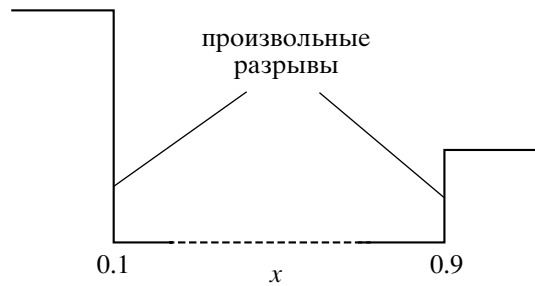
Алгоритм расчета системы конечно-разностных уравнений (5.1) описан в [19], показан на схеме и заключается в последовательных итерациях методом Ньютона двух блоков, первый из которых содержит разностный аналог уравнения энергии, а второй – аналоги уравнений неразрывности, движения и уравнения, отвечающего за перестройку сетки (первых трех уравнений системы (5.1)). Оба блока включались в глобальный итерационный цикл. В случае если количество итераций в глобальном цикле превышало 7 или во внутренних блоках 10, временной шаг уменьшался в два раза. Когда количество глобальных итераций становилось меньше 4, следующий шаг по времени увеличивался на 20%. В качестве начального приближения для каждой из искомым сеточных функций выбиралось значение  $f^{j+1(0)} = f^j + (f^j - f^{j-1}) \frac{\Delta\tau^j}{\Delta\tau^{j-1}}$ .

Используемый для решения задач класс разностных схем относится к неявным схемам с центральными разностями по пространству, поэтому в случае сходимости итерационного цикла рассматриваемые разностные схемы являются абсолютно устойчивыми и сходятся к решению с точностью, обусловленной порядком аппроксимации (см. [23]). Согласно известной теореме Годунова, не существует монотонных разностных схем с порядком аппроксимации выше первого по пространству. Тем не менее использование схем высоких порядков аппроксимации более предпочтительно, нежели схем первого порядка, так как позволяет в случае гладких решений получать более точные решения на грубых пространственных сетках. Очевидно, что предложенные в данном исследовании разностные схемы не будут монотонными, так как имеют второй порядок аппроксимации по пространству и не используют никакого механизма монотонизации. Однако следует отметить, что с помощью метода динамической адаптации большая часть особенностей задачи (ударные волны и контактные границы) выделяются явным образом и тем самым из решения исключаются источники немонотонности. Из областей с большими градиентами, которые могли бы повлиять на нарушение монотонности решения, остаются лишь волны разрежения. Области волн разрежения со временем увеличиваются по пространству, тем самым уменьшая первоначальные градиенты искомым функций. Этот факт, а также согласованное с искомым решением управляемое движение узлов расчетной сетки в физическом пространстве позволяют существенно уменьшаться возникающие осцилляции решения. Оба указанных обстоятельства позволили обойтись без выделения границ волны разрежения и не вводить в разностную схему процедуру монотонизации для исследуемых задач. Хотелось бы отдельно подчеркнуть, что использование метода динамической адаптации никоим образом не противоречит использованию различных разностных схем и монотонных алгоритмов (например, TVD или WENO) для широкого класса задач, а является существенным дополнением к ним в тех случаях, когда необходимо добиться перестройки расчетной сетки в местах особенностей решения. Хотя, как показывает данное исследование, в ряде задач можно обходиться и без разработанных алгоритмов монотонизации. Основное преимущество метода динамической адаптации состоит в том, что отмеченный механизм перестройки сетки вводится на дифференциальном уровне (в каждом из начальных уравнений присутствует метрическая функция  $\psi$  и функция адаптации  $Q$ , взаимосвязь которых отражена в дополнительном дифференциальном уравнении). Как было показано в [13], [15], за счет согласованного с решением движения узлов сетки удается существенно уменьшить дисперсию разностных схем.

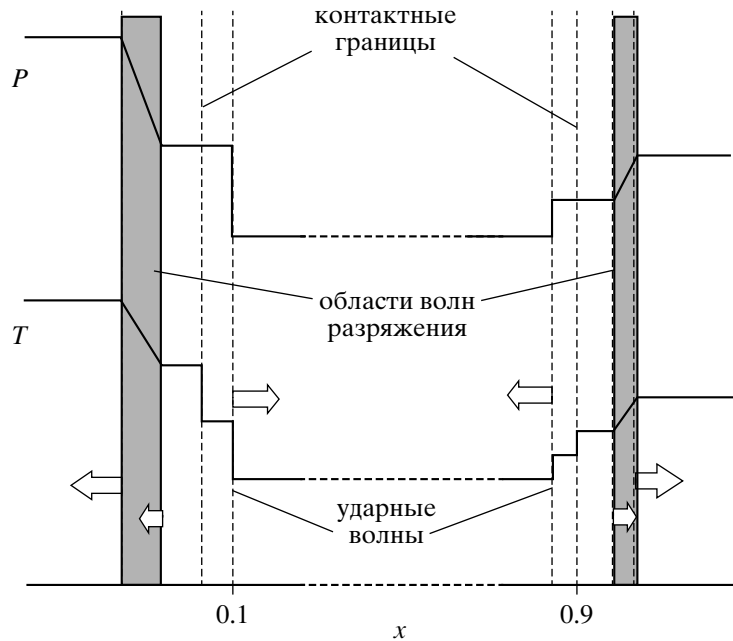
## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

### 1. Задача Вудварда–Колеллы

Задача Вудварда–Колеллы описывает взаимодействие двух взрывных волн, движущихся навстречу друг другу, возникших в результате распада двух произвольных разрывов (см. фиг. 2, 3). Математически задача сводится к решению системы уравнений газовой динамики (2.1): дифференциальных законов сохранения массы, импульса и энергии в областях  $l, m, r$ :  $x_l \in [0, 0.1]$ ,  $x_m \in (0.1, 0.9)$ ,  $x_r \in (0.9, 1]$ . По условию, в начальном состоянии газ с показателем адиабаты  $\gamma = 1.4$  в



**Фиг. 2.** Схематический профиль давления и температуры в начальный момент времени в задаче Вудварда–Коллеллы.



**Фиг. 3.** Схема распада произвольных разрывов в начальный момент времени (профили давления  $P$  и температуры  $T$ ; области волн разрежения заштрихованы), стрелками указаны направления движения фронтов.

этих трех областях находится в трех различных состояниях:

$$t = 0 : \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ P \end{pmatrix}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ P \end{pmatrix}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ P \end{pmatrix}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^2 \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

На границах  $x = 0$  и  $x = 1$  задается условие непроницаемости  $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ . В точки  $x = 0.1$  и  $x = 0.9$  в начальный момент времени помещаются два произвольных разрыва.

В результате распада произвольных разрывов, расположенных в точках  $x = \{0.1, 0.9\}$  (фиг. 2) (6.1), в прилегающих к этим точкам областях образуется сложная структура, содержащая волны разрежения, контактные разрывы и ударные волны (фиг. 3). Для того чтобы определить эту структуру, необходимо до начала расчетов решить задачу о распаде произвольного разрыва. Разрешая распад двух произвольно заданных разрывов при помощи приведенного выше алгоритма (см. разд. 3), получаем структуру, приведенную на фиг. 3. На месте начальных разрывов располагаются контактные границы, по направлению к внешним границам области от них распространяются волны разрежения, а навстречу друг друга – ударные волны. Математически дан-



ный факт можно записать следующим образом:

$$t \approx 0 : \begin{cases} x \in [0, 0.099], & \rho = 1, & u = 0, & P = 10^3, \\ x \in (0.099, 0.0995), & f(x) = f(0.099) + (x - 0.099)(f(0.0995) - f(0.099))/0.0005, \\ x \in [0.0995, 0.1), & \rho = 0.59, & u = 19.5976, & P = 460.9, \\ x \in (0.1, 0.101), & \rho = 5.99924, & u = 119.5976, & P = 460.9, \\ x \in [0.101, 0.899], & \rho = 1, & u = 0, & P = 10^{-2}, \\ x \in (0.899, 0.9), & \rho = 5.99242, & u = -6.1964, & P = 46.09, \\ x \in (0.9, 0.9005), & \rho = 0.583, & u = -6.1964, & P = 46.09, \\ x \in (0.9005, 0.901), & f(x) = f(0.9005) + (x - 0.9005)(f(0.901) - f(0.9005))/0.0005, \\ x \in [0.901, 1], & \rho = 1, & u = 0, & P = 10^2, \end{cases} \quad (6.2)$$

где  $f(x)$  – любая газодинамическая функция  $\rho$ ,  $u$ ,  $P$  определяется по формуле линейной интерполяции для  $x$  в указанном интервале. В начальный момент времени на контактных границах  $x = 0.1$  и  $x = 0.9$  предполагается выполнение условий  $u_+ = u_-$ ,  $P_- = P_+$ , а в точки  $x = 0.101$  и  $x = 0.899$  помещаются две ударные волны, для которых выполняются условия Гюгонио (3.1).

В переменных  $(q, \tau)$  расширенная дифференциальная система (2.2), (2.3) должна быть дополнена соответствующими граничными и начальными условиями. При выборе  $\psi = \rho$  якобиан преобразования становится равен единице, поэтому координаты в физическом и расчетном пространствах на начало расчета совпадают друг с другом. В связи с этим начальные условия (6.2) в переменных  $(q, \tau)$  не изменяются и, чтобы избежать повторения, не приводятся.

В расчетном пространстве границы  $q = 0$  и  $q = 1$  неподвижны и непроницаемы (см. (4.1)):

$$u(\tau, 0) = Q(\tau, 0) = 0, \quad u(\tau, 1) = Q(\tau, 1) = 0.$$

Через контактные разрывы  $q = 0.1$ ,  $q = 0.9$  отсутствует поток массы, следовательно (см. (4.4)),

$$u_-(\tau, 0.1) = u_+(\tau, 0.1) = 0, \quad P_-(\tau, 0.1) = P_+(\tau, 0.1) = 0, \quad Q(\tau, 0.1) = 0,$$

$$u_-(\tau, 0.9) = u_+(\tau, 0.9) = 0, \quad P_-(\tau, 0.9) = P_+(\tau, 0.9) = 0, \quad Q(\tau, 0.9) = 0.$$

Границы  $q = 0.101$  и  $q = 0.899$  объявляются подвижными и выделяются явным образом. Скорость их движения оценивается из законов сохранения (3.1).

В эволюции данной проблемы можно выделить несколько основных моментов.

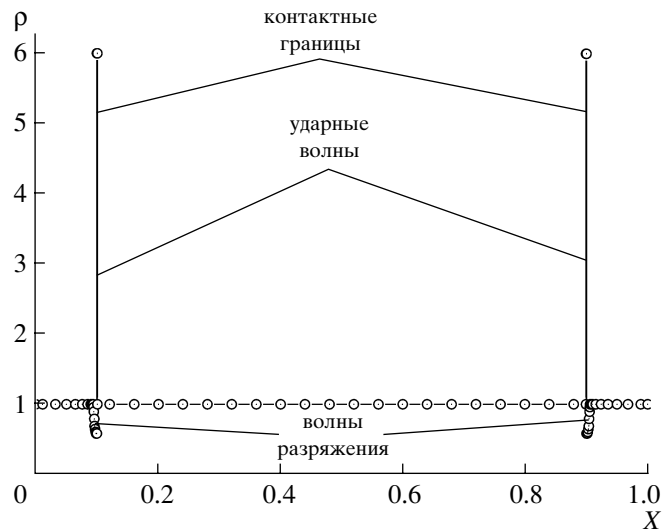
1. Распад двух произвольных разрывов неподалеку от внешних границ рассматриваемой области (см. фиг. 2) и, как следствие, возникновение на местах распадов контактных границ, от которых по направлению к внешним границам отходят волны разрежения, а навстречу друг другу распространяются две ударные волны различной интенсивности (фиг. 3). Характерный профиль плотности показан на фиг. 4.

2. Столкновение этих ударных волн, в результате чего образуется контактная граница с отходящими от нее ударными волнами.

3. Прохождение одной из ударных волн контактной границы, вследствие чего в сторону, противоположную направлению распространения ударной волны от контактной границы, отойдет волна разрежения.

В процессе решения ударные волны. Бегущие навстречу друг другу, столкнутся. Их взаимодействие приведет к образованию контактной границы и двух отходящих от нее ударных волн. Данная ситуация также моделируется как распад произвольного разрыва с параметрами, которые соответствуют газодинамическим характеристикам за фронтами ударных волн. Математически это столкновение приведет к появлению еще одной дополнительной расчетной области из-за необходимости выделения возникшей контактной границе (см. разд. 3).

Как уже отмечалось, для желаемого распределения узлов сетки функция преобразования  $Q$  должна зависеть от искомого решения или его особенностей. Основной особенностью решения задачи о взаимодействии двух встречных ударных волн является наличие подвижных границ. Предварительный анализ показал, что для решения данной задачи достаточно ограничиться применением квазиравномерной на каждый момент времени сеткой. Динамическое квазиравномерное распределение узлов можно получить, воспользовавшись одной из наиболее простых



Фиг. 4.

форм функции  $Q$ , получаемой с помощью так называемого диффузионного приближения (см. [46], [48]):

$$Q = -D \frac{\partial \Psi}{\partial q}, \quad (6.3)$$

где  $D$  – свободный параметр, имеющий смысл коэффициента диффузии. Его значение можно определить через параметры задачи: геометрические размеры области и скорость движения границ (см. [48]). В основу определения положена линейная оценка размера зоны, охваченной возмущением, для дифференциальных уравнений параболического типа:

$$L \approx \sqrt{D \Delta t}.$$

В (6.3) коэффициент  $D$  выбирается таким, чтобы за время  $\Delta t$  возмущение успело пробежать расстояние  $L$ , равное расстоянию между подвижными границами. Выражая  $\Delta t$  через скорость движения границ  $v$ :  $\Delta t = \frac{\Delta L}{|v_l - v_r|}$ , коэффициент  $D$  можно представить в виде  $D = \frac{L^2 |v_l - v_r|}{\Delta L}$ , где  $\Delta L = \frac{\Psi}{\rho} L$  – приращение области за время  $\Delta t$ ,  $v_l, v_r$  – скорости движения левой и правой границ соответственно. С учетом выражения для скорости  $v_{l,r} = -\left(\frac{Q}{\rho}\right)_{l,r}$  коэффициент  $D$  в окончательном виде запишется так:

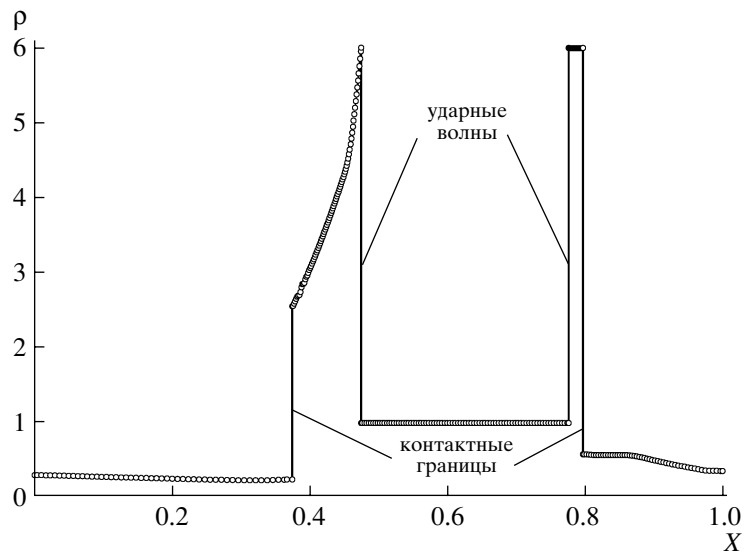
$$D = \frac{|Q_l - Q_r| L}{\Psi}.$$

В дискретном пространстве сеточных функций, где определен пространственный шаг  $h$ , а длина области  $L = hN$ , выражается через количество разбиений  $N$ , коэффициент  $D$  можно представить в виде

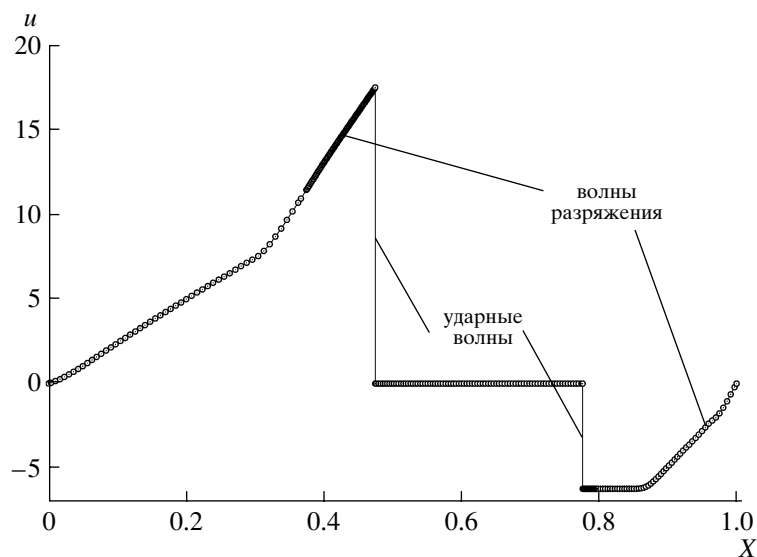
$$D = \frac{Nh |Q_l - Q_r|}{\Psi_{\min}}. \quad (6.4)$$

Таким образом, функция преобразования  $Q$  оказывается связанной с особенностями рассматриваемой задачи – с изменяющимся размером области и скоростью перемещения границ области  $v_{l,r}$ .

Моделирование процессов в задаче Вудварда–Колеллы проводилось с учетом приведенных выше начальных и граничных условий для системы (2.2) и конкретного вида функции адаптации  $Q$  (см. (6.3), (6.4)).



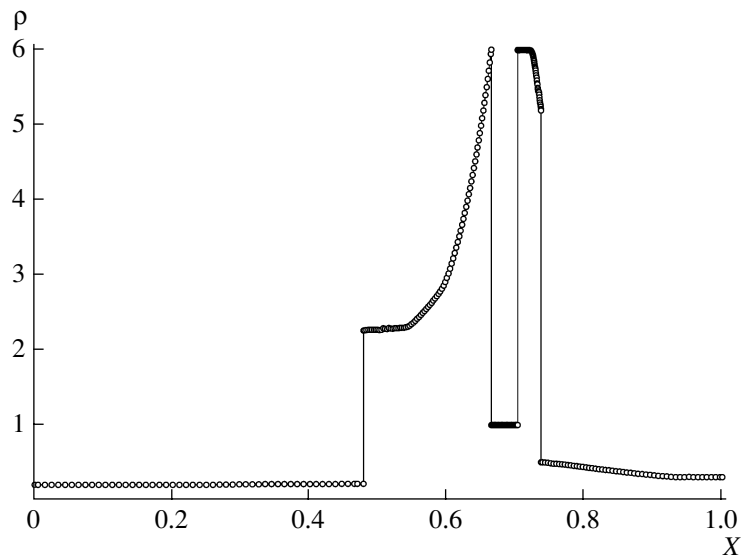
Фиг. 5.



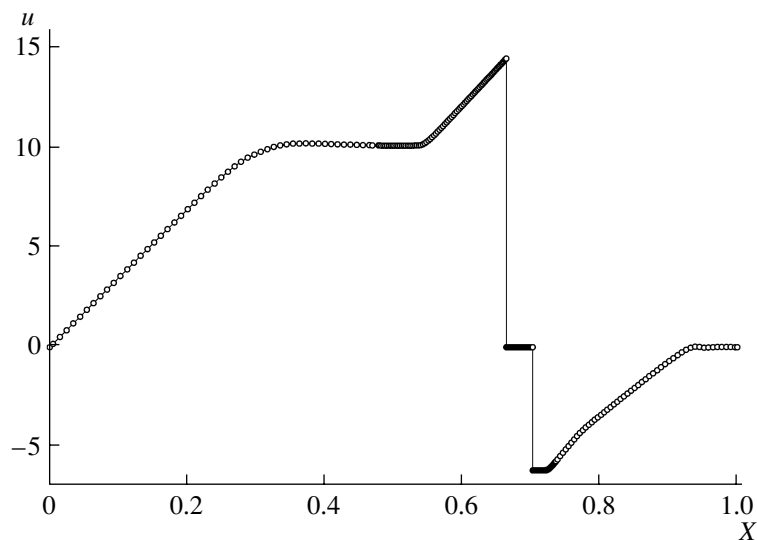
Фиг. 6.

На фиг. 5–12 показаны пространственные профили скорости и плотности на различные моменты времени, найденные из решения задачи Вудварда–Колеллы методом динамической адаптации с явным выделением границ. На всех графиках показано решение, полученное на расчетной сетке с общим числом узлов  $N = 420$ , содержащей во внутренних областях по 80 ячеек, а в областях, примыкающих к внешним границам, – по 50. В силу заданных начальных условий (6.2), эволюция каждого из разрывов будет иметь свои особенности. В частности, на процесс в целом определяющее влияние оказывает взаимодействие ударных волн различной интенсивности. Фиг. 5, 6 соответствуют моменту времени. Когда левая волна разрежения отразилась от внешней границы и подошла к левой ударной волне, в то время как правая волна разрежения лишь подошла к противоположной внешней границе ( $t = 0.016$ ). Дальнейшее распространение ударных волн навстречу друг другу приводит к еще большему разрежению в областях между ударными волнами и внешними границами.

Профили плотности и скорости при  $t = 0.026$  непосредственно перед столкновением ударных волн показаны на фиг. 7, 8, а на фиг. 9, 10 при  $t = 0.032$  – сразу после столкновения. Окончанию



Фиг. 7.

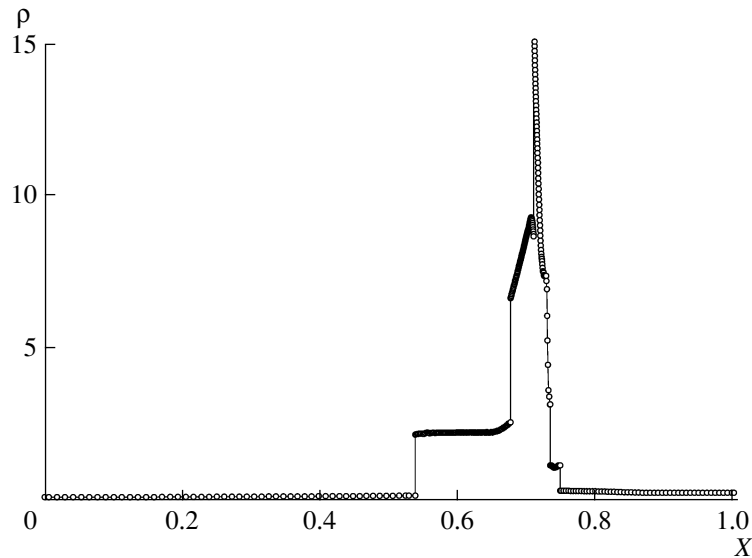


Фиг. 8.

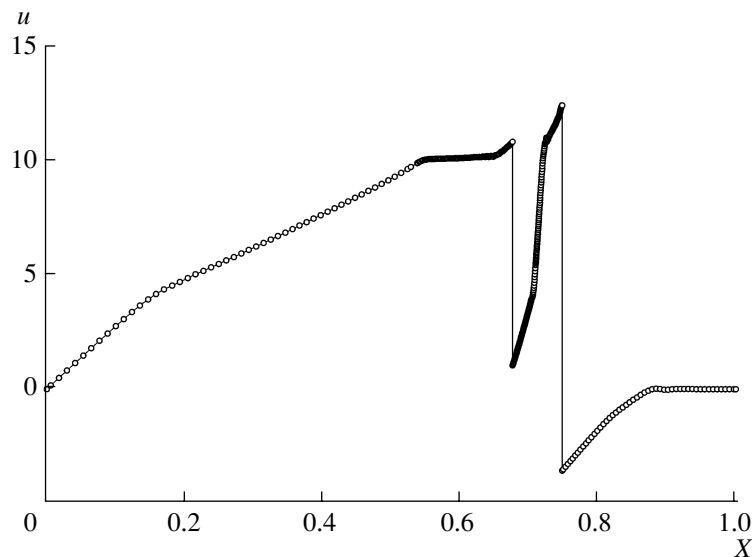
расчета соответствовал момент прохождения правой ударной волной правой контактной границы (фиг. 11, 12,  $t = 0.038$ ), когда отчетливо видны все характерные для этого времени разрывы: две ударные волны и три контактные границы. Следует отметить, что решения, получаемые при помощи различных методов с общим числом узлов менее 500, передают лишь качественное поведение газодинамических функций, допуская количественные ошибки, например для плотности – в районе 10–50%. На фиг. 13 представлено сравнение профилей плотности, рассчитанных с использованием метода динамической адаптации и при помощи модифицированной WENO схемы (см. [49]). Видно, что метод динамической адаптации позволил получить решение на 420 ячейках (точки), практически совпадающее с решением на 12800 ячейках WENO5м (сплошная линия); для 400 ячеек – ромбики.

## 2. Задача о неравномерно ускоряющемся поршне

Задача о неравномерно ускоряющемся поршне может быть получена посредством модуляции закона движения равномерно ускоряющегося поршня одной из периодических функций типа



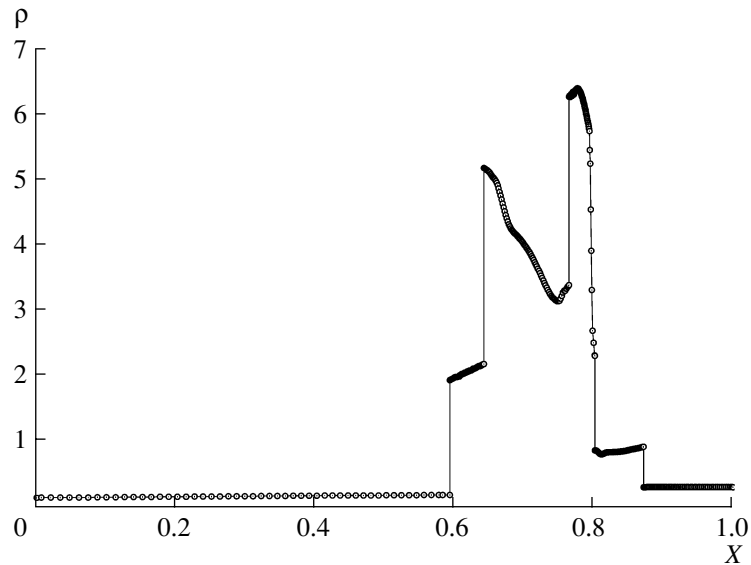
Фиг. 9.



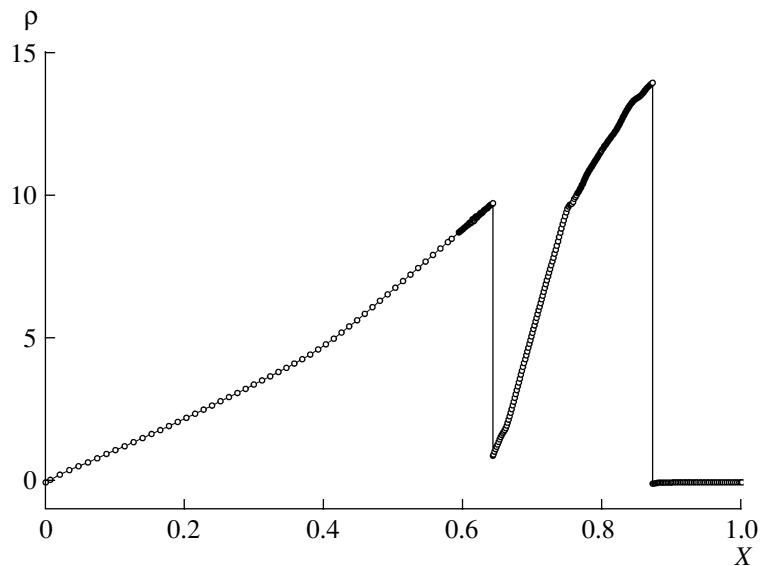
Фиг. 10.

$$u = V(t) = a_0 t + V_0 [1 - \cos(\omega t)].$$

Исследуемая задача по постановке очень близка к имеющей автомодельное решение задаче о равномерно ускоряющемся поршне, но в отличие от нее закон движения поршня имеет не только равномерно ускоряющуюся составляющую, но и периодическую. Периодический закон движения приводит к генерации серии ударных волн. Ударные волны в газовой среде возникают вблизи поверхности поршня на стадии его ускорения и отходят вглубь области на стадии замедления. Поскольку закон движения поршня содержит ускоряющуюся составляющую, то последующая ударная волна оказывается более интенсивной, чем предыдущая, и в процессе распространения она догоняет и поглощает волну, возникшую ранее. На месте этого поглощения образуется контактная граница, от которой в сторону поршня отходит волна разрежения, а в противоположном направлении распространяется ударная волна. Поскольку характер движения поршня периодический, то с каждой вновь сформированной ударной волной картина газодина-



Фиг. 11.



Фиг. 12.

мического течения будет все более усложняться, приводя к необходимости рассматривать взаимодействия не только ударных волн между собой, но и ударных волн с контактными разрывами.

Применение метода динамической адаптации к задаче о неравномерно ускоряющемся поршне сводится к решению системы уравнений (2.2) с соответствующими начальными и граничными условиями.

**Начальные условия:**  $u = 0$ ,  $P = P_0 = 1$  бар,  $T = T_0 = 273^\circ\text{K}$ ,  $\psi_0 = 1$ .

**Граничные условия:**

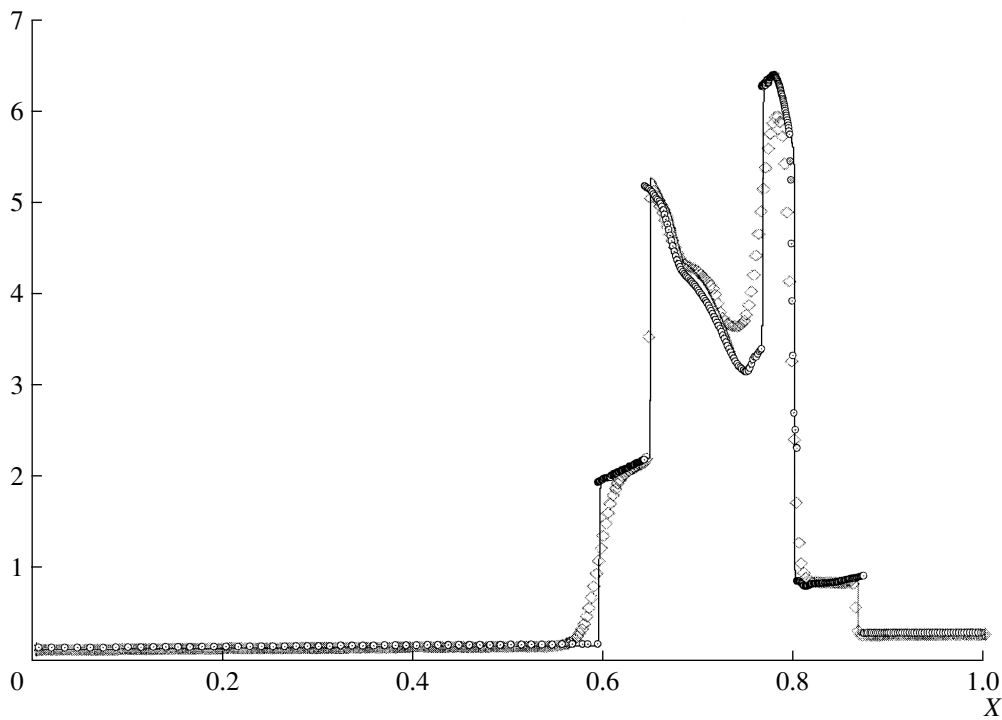
а) на поршне:

$$u = V(t) = a_0 t + V_0 [1 - \cos(\omega t)] \quad (\text{см. (4.2)}),$$

где  $a_0 = 2.5 \times 10^{11}$  см/с<sup>2</sup>,  $V_0 = 3 \times 10^4$  см/с,  $\omega = (\pi/2) \times 10^8$  1/с;

б) на свободной границе:

$$u = 0, P = P_0, T = T_0, Q = -\frac{\partial P}{\partial u} \quad (\text{см. (4.3)}).$$



Фиг. 13.

Теплофизические характеристики:  $C_v = 6.93 \times 10^{-1}$  J/g K,  $R = 2.8668 \times 10^{-1}$  J/gK.

Численная реализация рассматриваемой задачи осуществлялась с помощью семейства разностных схем, записанных на разнесенных сетках (см. разд. 5 и [19]). Изменения в алгоритмической части касались лишь механизма ввода зарождающихся ударных волн и взаимодействия между возникающими в ходе решения разрывами (ударная волна – ударная волна и ударная волна – контактная граница).

В процессе расчетов при выполнении неравенства  $u_{i-1} - u_{i+1} > \epsilon$  ( $\epsilon$  – малая величина) в любой ячейке. Примыкающей к поршню подобласти, из центров  $i - 1/2$  и  $i + 1/2$  ячеек выпускались  $C_+$ -характеристики:

$$C_{+,i-1/2}^j = 0.5(u_{i-1} + u_i) + \sqrt{\gamma R T_{i-1/2}},$$

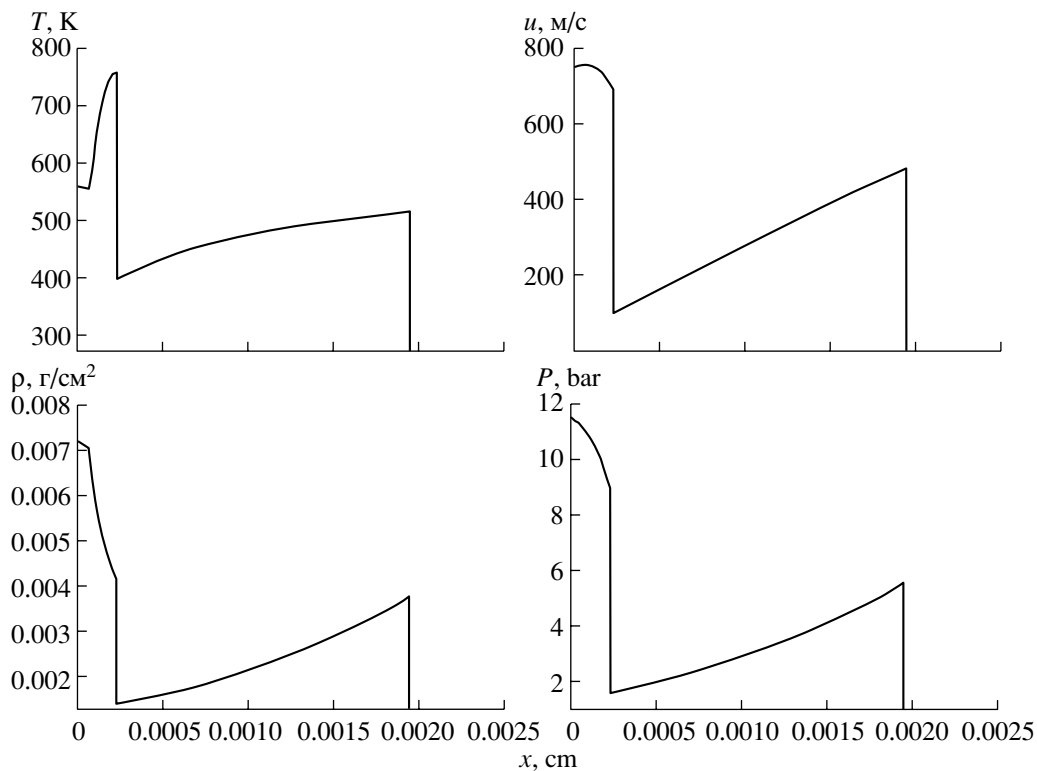
$$C_{+,i+1/2}^j = 0.5(u_{i+1} + u_i) + \sqrt{\gamma R T_{i+1/2}}.$$

Время пересечения характеристик можно вычислить по формуле

$$t_c^j = (x_{i+1/2} - x_{i-1/2}) / (C_{+,i-1/2}^j - C_{+,i+1/2}^j).$$

Когда  $t^j + t_c^j$  достигало своего минимума и координата пересечения попадала в расчетную подобласть, фиксировалось  $t_{sw} = t + 0.95t_c$  (время генерации ударной волны), а расчет продолжался. Коэффициент 0.95 вводится для того, чтобы избежать нарушения монотонности газодинамических величин, вызываемого чрезмерным укрупнением пространственных профилей. Как только время превышало  $t_{sw}$ , на левой границе ячейки с максимальным градиентом скорости явным образом вводился разрыв, на котором предполагалось выполнение законов сохранения (условий Гюгонио) (3.1).

Все последующие взаимодействия между разрывами, как и в задаче Вудварда–Колеллы, сводятся к задаче о распаде произвольного разрыва (см. разд. 3), в результате решения которой возникают контактная граница и отходящие в разные стороны от нее ударная волна и волна разрежения. Так как волны разрежения в данной трактовке явно не выделяются, то количество выделенных границ до и после такого взаимодействия не меняется, что позволяет достаточно просто алгоритмически произвести изменения процедуры расчета для этого случая.



Фиг. 14.

**Выбор функции преобразования  $Q$ .** основные проблемы выбора функции адаптации для задачи о взаимодействии ударных волн, генерируемых неравномерно ускоряющимся поршнем. Связаны с необходимостью использовать сильно неравномерные сетки. Узлы в области, примыкающей к поршню, должны как можно дальше не отходить от поверхности поршня, поскольку именно в этой области из-за неравномерности движения поршня возникают большие градиенты решения и генерируются ударные волны. Применение равномерных сеток в данной ситуации не представляется целесообразным из-за необходимости использовать большое количество узлов. В методе динамической адаптации, как уже отмечалось ранее, контролируемое распределение узлов осуществляется соответствующим выбором функции  $Q$ . Для построения неравномерных сеток используется несколько видов функции  $Q$  (см. [4], [13], [19]).

Диффузионное приближение с функцией  $Q = -D \frac{\partial \psi}{\partial q}$  привлекает своей простотой, но оно применялось ранее в [46], [48], [50] для построения только квазиравномерных сеток. Однако если в этом приближении отказаться от требования распространения возмущения функции  $\psi$  на всю область с подвижными границами. А ограничиться только несколькими ячейками сетки, то его можно использовать для построения сильно неравномерных сеток. Степень неравномерности сетки в этом случае будет зависеть от размеров области (или количества ячеек) распространения возмущения функции  $\psi$ .

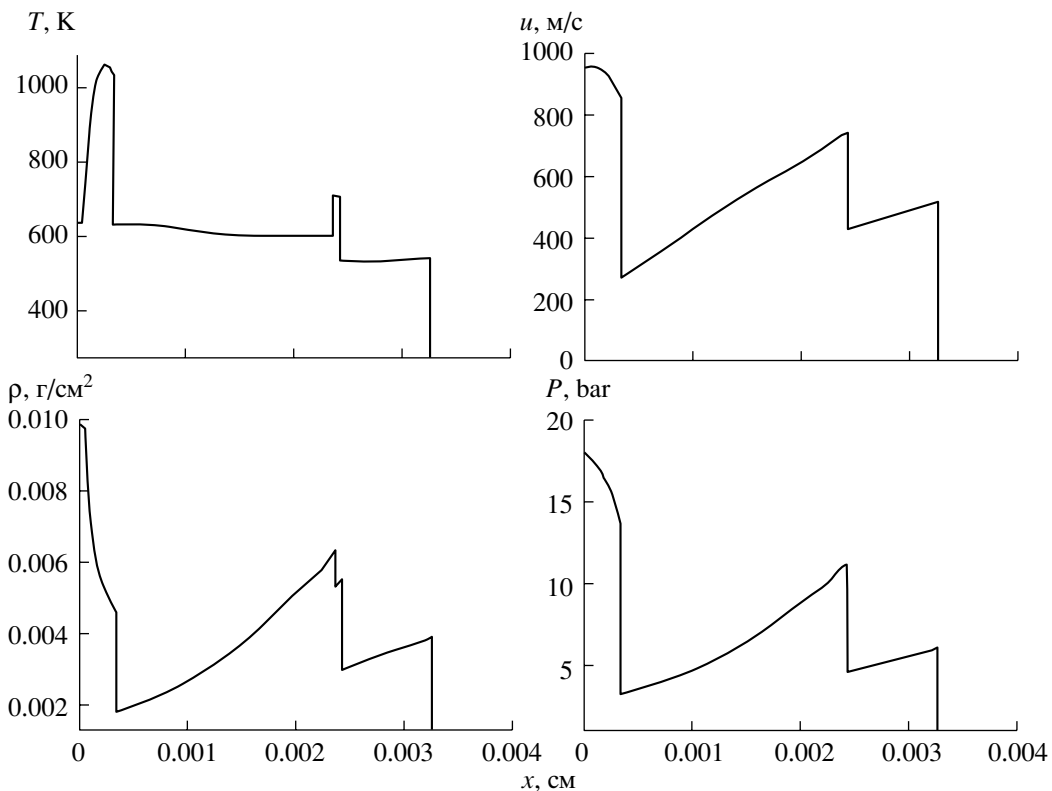
Воспользовавшись выводом коэффициента диффузии  $D$  в предыдущей задаче Вудварда–Коллеллы и предположив, что возмущение должно охватывать всего два интервала ( $N = 2$ ), формулу (6.4) можно модифицировать следующим образом:

$$D = A(\psi) \frac{Nh|Q_l - Q_r|}{\Psi_{\min}},$$

$$\text{где } N = 2, A(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi \geq 1, \\ 1/\psi^2, & \psi < 1. \end{cases}$$

Множитель  $A(\psi)$  введен для предотвращения схлопывания двух соседних ячеек при  $\psi \ll 1$ .





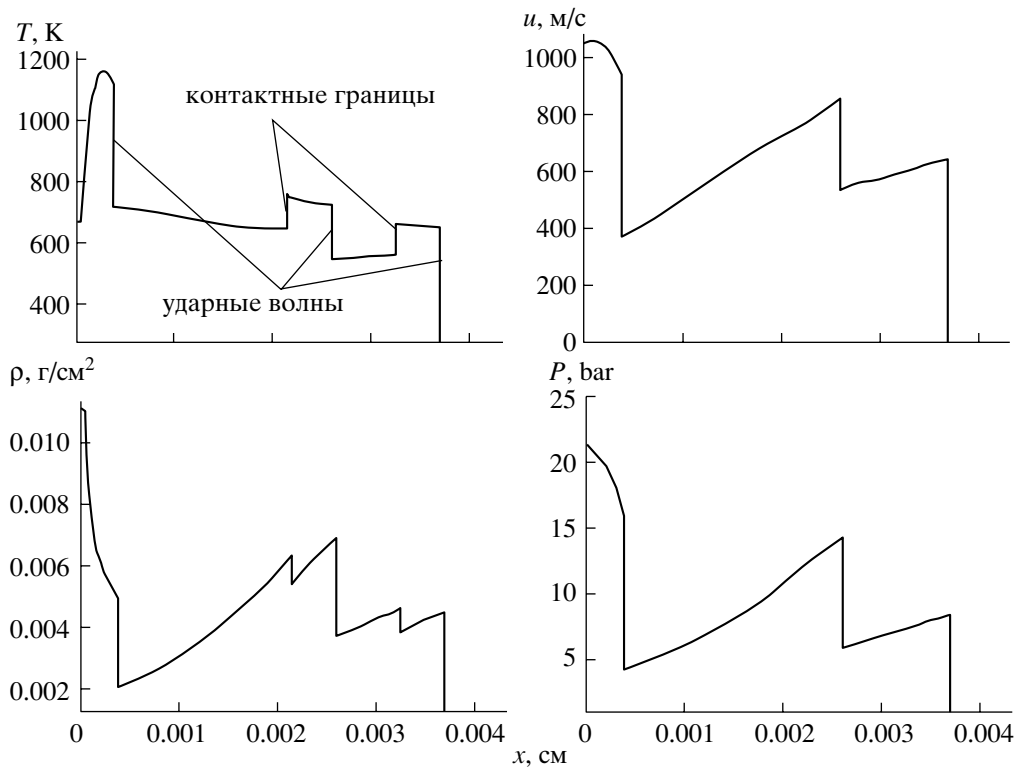
Фиг. 15.

Результаты моделирования. Моделирование процессов, происходящих в задаче о неравномерно ускоряющемся поршне, проводилось с учетом приведенных выше начальных и граничных условий для системы (2.2) и конкретного вида функции адаптации  $Q$ . Толщина начальной области и количество ячеек задавались равными  $L = 3.2 \times 10^{-4}$  см,  $N = 380$ .

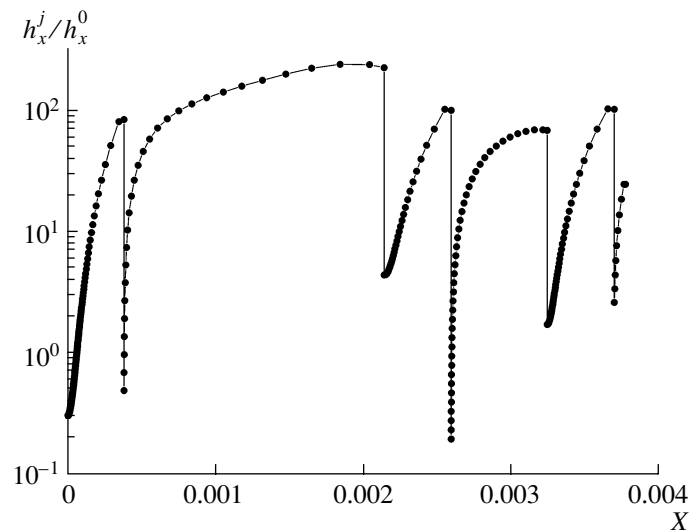
На фиг. 14–16 показаны пространственные профили газодинамических величин и температуры на различные моменты времени. Положению поршня на всех рисунках соответствует координата  $x = 0.0$  см. В момент времени  $t = 6 \times 10^{-8}$  с (фиг. 14) явно видны две ударные волны, одна из которых была сформирована ранее и уже отошла от поршня, а вторая, только что возникшая, имеет большую скорость и в конце концов поглотит первую. На фиг. 15 в момент  $t = 1.4 \times 10^{-7}$  с это взаимодействие уже произошло, и возникли еще две ударные волны, причем одна из них прошла через контактную границу, которая образовалась на месте этого поглощения. И, наконец, при  $t = 1.8 \times 10^{-7}$  с (фиг. 16) видны три явно выделенные ударные волны и два контактных разрыва, т.е. к данному моменту произошло двукратное поглощение внешней ударной волны ударными волнами, сформировавшимися впоследствии. По пространственной переменной этим явлениям соответствует шесть расчетных областей с одной неподвижной и шестью явно выделенными подвижными границами.

На фиг. 17 (для  $t = 1.8 \times 10^{-7}$  с) приведена зависимость  $\frac{h_x^j}{h_x^0} = \left(\frac{\Psi}{\rho}\right)^j$ , характеризующая изменение пространственного размера ячеек в физическом пространстве к концу расчета относительно их размера в начальный момент времени. По ходу расчетов отношение  $\frac{h_x^j}{h_x^0}$  для различных областей изменялось от  $10^{-4}$  (перед взаимодействием разрывов) до 400,

т.е. изменение величины пространственного шага достигало более чем 6 порядков. Никаких осложнений при проведении расчетов подобное изменение пространственного шага не вызывало.



Фиг. 16.



Фиг. 17.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен метод динамической адаптации применительно к задачам газовой динамики с многократным взаимодействием возникающих в процессе решения разрывов. На примере тестовой задачи (проблема Вудварда–Колеллы) показана эффективность и применимость предлагаемого подхода. Результаты, полученные в задаче о неравномерно ускоряющемся поршне, свидетельствуют о возможности использования метода динамической адаптации для задач с многократным взаимодействием разрывов, когда необходимо их выделение. Для обеих задач выбрана функция адаптации диффузионного типа. Этот выбор позволяет с помощью простой вариации

коэффициентов диффузии добиться для каждой из задач существенно отличающихся с точки зрения адаптации результатов. В случае задачи Вудварда–Колеллы, где нет необходимости сгущать узлы к особенностям решения, коэффициент диффузии выбирается таким образом, чтобы добиться квазиравномерной сетки во всех подобластях решения. В задаче о неравномерно уско-ряющемся поршне, в отличие от задачи Вудварда–Колеллы, существуют два взаимоисключаю-щих желания для построения расчетной сетки. Во-первых, на начальной стадии формирования ударных волн перед фронтом необходимо добиться сгущения узлов. Во-вторых, по мере умень-шения области между разрывами желательнее, чтобы сетка становилась все более равномерной. Обоснован выбор соответствующего коэффициента диффузии для функции адаптации, кото-рый позволяет реализовать оба требования к расчетной сетке, приводя к адаптации у подвижных границ и, как следствие, к существенной неравномерности сетки в больших подобластях реше-ния и к постепенному выравниванию пространственного шага в уменьшающихся подобластях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thompson J.F., Warsi Z.U.Z., Mastin C.W.* Numerical grid generation. North-Holland, 1985.
2. *Anderson D.A.* Equidistribution schemes, Poisson generators, and adaptive grid // *Appl. Math. and Comput.* 1987. V. 24. P. 211–227.
3. *Лисейкин В.Д.* Об универсальном эллиптическом методе построения адаптивных разностных сеток // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2004. Т. 44. № 12. С. 2167–2193.
4. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И.* Об одном подходе к построению адаптивных разностных сеток // *Докл. АН СССР.* 1988. Т. 298. № 1. С. 64–68.
5. *Андерсон Д.А., Таннехилл Дж., Флетчер Р.* Вычислительная гидродинамика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 1, 2.
6. *Иваненко С.А., Прокопов Г.П.* Методы построения адаптивно-гармонических сеток // *Ж. вычисл. ма-тем. и матем. физ.* 1997. Т. 37. № 6. С. 643–662.
7. *Прикладная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления* // *Тр. Всерос. конф.* Т. 1, 2 / Под ред. Ю.Г., Евтушенко, М.К. Керимова, В.А. Гаранжи. М.: ВЦ РАН, 2004.
8. *Berger M.J., Colella P.* Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics // *J. Comput. Phys.* 1989. V. 82. P. 64–84.
9. *Berger M.J.* Data structures for adaptive grid generation // *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* 1986. V. 3. P. 904–916.
10. *Hyman J.M., Li Sh.* Iterative and dynamic control of adaptive mesh refinement with nested hierarchical grids: Los Alamos Lab. Rep. № 5462. 1998.
11. *Andersen A., Zheng X., Cristini V.* Adaptive unstructured volume remeshing. I: The method // *J. Comput. Phys.* 2005. V. 208. № 2. P. 616–625.
12. *Nourgaliev R.R., Dinh T.N., Theofanous T.G.* Adaptive characteristics-based matching for compressible multiflu- id dynamics // *J. Comput. Phys.* 2006. V. 213. № 2. P. 500–529.
13. *Мажукин В.И., Самарский А.А., Шапранов А.В.* Метод динамической адаптации в проблеме Бюргер-са // *Дол. РАН.* 1993. Т. 333. № 2. С. 165–169.
14. *Лисейкин В.Д.* Обзор методов построения структурных адаптивных сеток // *Ж. вычисл. матем. и ма-тем. физ.* 1996. Т. 36. № 1. С. 3–41.
15. *Мажукин В.И., Кастельянос О., Самарский А.А., Шапранов А.В.* Метод динамической адаптации для нестационарных задач с большими градиентами // *Матем. моделирование.* 1993. Т. 5. № 4. С. 32–56.
16. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И., Самарский А.А.* Конечно-разностный метод решения одномерных урав-нений газовой динамики на адаптивных сетках // *Докл. АН СССР.* 1988. Т. 302. № 5. С. 1078–1081.
17. *Лисейкин В.Д.* Технология конструирования трехмерных сеток для задач аэрогазодинамики. (Обзор) // *Вопр. атомная науки и техн. Сер. Матем. моделирование физ. процессов.* 1991. Вып. 3. С. 31–45.
18. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И., Самарский А.А.* Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с использованием адаптивных сеток, динамически связанных с решением // *Ж. вычисл. ма-тем. и матем. физ.* 1998. Т. 28. № 8. С. 1210–1225.
19. *Бреславский П.В., Мажукин В.И.* Метод динамической адаптации в задачах газовой динамики // *Ма-тем. моделирование.* 1995. Т. 7. № 12. С. 48–78.
20. *Гильманов А.Н.* Применение динамически адаптивных сеток к исследованию течений с многомас-штабной структурой потока // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2001. Т. 41. № 2. С. 311–326.
21. *Руденко Д.В., Утюжников С.В.* Применение динамически адаптивных к решению сеток для модели-рования пространственных нестационарных течений газа с большими градиентами // *Ж. вычисл. ма-тем. и матем. физ.* 2002. Т. 42. № 3. С. 395–409.
22. *Азаренок Б.Н.* Об одной схеме расчета детонационных волн на подвижных сетках // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2005. Т. 45. № 12. С. 2260–2282.

23. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики: Учебн. пособие. Для вузов. Изд. 3-е, доп. М.: Наука, 1992.
24. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
25. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
26. Van Leer B. Towards the ultimate conservative finite difference scheme. I. The quest of monotonicity // Lect. Notes Phys. 1973. V. 18. № 1. P. 163–168.
27. Van Leer B. Towards the ultimate conservative finite difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme // J. Comput. Phys. 1974. V. 14. № 4. P. 361–376.
28. Boris J.P., Book D.L., Hain K. Flux-corrected transport. II. Generalization of the method // J. Comput. Phys. 1975. V. 18. № 3. P. 248–283.
29. Boris J.P., Book D.L. Flux-corrected transport. III Minimal-error FCT algorithms // J. Comput. Phys. 1976. V. 20. № 4. P. 397–431.
30. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков М.: Мир, 1990.
31. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393.
32. Harten A. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes // SIAM J. Numer. Analys. 1984. V. 21. № 1. P. 1–23.
33. Osher S. Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximation // SIAM J. Numer. Analys. 1984. V. 21. № 2. P. 217–235.
34. Osher S., Shu C.-W. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes // J. Comput. Phys. 1988. V. 77. № 2. P. 439–471.
35. Harten A. ENO schemes with subcell resolution // J. Comput. Phys. 1989. V. 83. P. 148–184.
36. Liu X.-D., Osher S., Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes // J. Comput. Phys. 1994. V. 115. P. 200–212.
37. Colella Ph., Woodward P.R. The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations // J. Comput. Phys. 1984. V. 54. № 1. P. 174–201.
38. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических уравнений. М.: Физматлит, 2001.
39. Бондаренко Ю.А., Башуров В.В., Янилкин Ю.В. Математические модели и численные методы для решения задач нестационарной газовой динамики. Обзор зарубежной литературы: Препринт 88-2003, РФЯЦ-ВНИИЭФ. 53 с.
40. LeVeque R.J., Shyue K.M. One-dimensional front tracking based on high resolution wave propagation methods // SISC. 1995. V. 16. № 2. P. 348–377.
41. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunol's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. P. 101–136.
42. Henshaw W.D. A scheme for numerical solution of hyperbolic systems of conservation laws // J. Comput. Phys. 1987. V. 68. № 1. P. 25–47.
43. Shyue K.M. An efficient shock-capturing algorithm for compressible multicomponent problems // J. Comput. Phys. 1998. V. 142. P. 208–242.
44. Иваненко С.А., Чарахчян А.А. Криволинейные сетки из выпуклых четырехугольников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 4. С. 503–514.
45. Liseikin V.D. On some interpretations of a smoothness functional used in constructing regular and adaptive grids // Russ. J. Numer. Analys Modelling. 1993. V. 8. № 6. С. 507–518.
46. Бреславский П.В., Мажукин В.И. Математическое моделирование процессов импульсного плавления и испарения металла с явным выделением фазовых границ // Инж.-физ. журнал. 1989. Т. 57. № 1. С. 107–114.
47. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных иссл., 2003.
48. Королева О.Н., Мажукин В.И. Математическое моделирование лазерного плавления и испарения многослойных материалов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 5. С. 887–901.
49. Henrick A.K., Aslam T.D., Powers J.M. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: Achieving optimal order near critical points // J. Comput. Phys. 2005. V. 207. P. 542–567.
50. Mazhukin V.I., Smurov I., Dupuy C., Jeandel D. Simulation of laser induced melting and evaporation processes in superconducting ceramics // J. Numer. Heat Transfer Part A. 1994. V. 26. P. 587–600. Фиг. 17.