

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНЫХ ВОЛН НА ДИНАМИЧЕСКИ АДАПТИРУЮЩИХСЯ СЕТКАХ

© 2007 г. П.В. Бреславский, В.И. Мажукин

Институт математического моделирования РАН, Москва

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 06-07-89191-а, 07-07-00045-а)

В данной работе рассматривается дальнейшее развитие метода динамической адаптации для газодинамических задач, описывающих многократное взаимодействие ударных волн, волн разрежения и контактных границ. На примере тестовой задачи Вудварда-Колелла показана эффективность предлагаемого метода для задач газовой динамики с явным выделением ударных волн и контактных границ. Для решения задачи выбирается простейшая адаптация диффузионного типа. Обоснован выбор коэффициента адаптации для получения в каждой из подобластей решения квазиравномерной сетки. Взаимодействие разрывов между собой разрешается при помощи задачи о распаде произвольного разрыва. Применение метода динамической адаптации позволило получить решение на 420 ячеек, практически совпадающее с результатами WENO5m метода на 12800 ячейках.

### MODELING OF SHOCK WAVES INTERACTION ON DYNAMICALLY ADAPTING GRIDS

*P.V. Breslavskiy, V.I. Mazhukin*

Institute of Mathematical Modeling, Russian Academy of Sciences

The further development of a method of dynamic adaptation for gas dynamics problems describing repeated interaction of shock waves, rarefaction waves and contact boundaries is considered in the present paper. On an example of a test Woodward-Colella problem the efficiency of an offered method for problems of gas dynamics with explicit front tracking of shock waves and contact boundaries is shown. For a problem decision the elementary diffusing type adaptation is used. The choice of adaptation coefficient is reasonable to receive in each of subareas of the decision quasiuniform grid. The interaction of breaks among themselves is given from a Riemann solver. The application of a method of dynamic adaptation has allowed to receive the decision on 420 cells practically coincident with results of WENO5m method on 12800 cells.

**Введение.** За последние пятьдесят лет развитие методов решения систем уравнений гиперболического типа и, как следствие, уравнений газовой динамики практически не прекращалось. Бурный прогресс в этой области говорит о повышенном интересе к данному вопросу и связан с большим числом практических задач, моделирование которых осуществляется системами дифференциальных уравнений гиперболического типа.

Условно существующие методы решения задач газовой динамики можно разделить на два класса: методы сквозного счета и методы с явным выделением границ. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки.

Методы сквозного счета, в которых задача решается, как правило, в неизменной первоначально заданной области, позволяют проводить расчеты без учета особенностей, возникающих внутри этой области. Именно этот факт определяет основные преимущества и недостатки

указанной методики. С одной стороны, методы сквозного счета легко реализуемы вычислительно, так как обладают простой алгоритмической частью, с другой - они неспособны достоверно описывать возникающие в процессе решения слабые и сильные разрывы. Под достоверностью в данном случае понимается именно наличие разрывов в областях решения, а не их сглаженные аналоги. Первоначально это сглаживание достигалось за счет введения в модель искусственной вязкости (линейной, квадратичной или их комбинации). В последние годы использование искусственной вязкости выглядит неким анахронизмом. Связано это не в последнюю очередь с тем, что разработаны новые алгоритмы решения задач газовой динамики со сглаживанием разрывов.

Основная проблема при построении разностных схем в методах сквозного счета заключается в желании повысить точность аппроксимации и одновременно обеспечить получение монотонных численных решений, что при наличии сильных и слабых разрывов является нетривиальной задачей. Теорема Годунова [1] говорит, что в линейном случае монотонность можно обеспечить только в разностных схемах первого порядка аппроксимации. В 70-е годы развитие "монотонизированных" разностных схем повышенного порядка точности связано с работами Ван-Лира [2], и методом антидиффузии с коррекцией потока (FCT-метод) Бориса и Бука [3], [4]. Следующим этапом в развитии разностных схем для решения систем уравнений гиперболического типа можно считать появление TVD схем (см., например, работы Хартена [5], Ошера [6]) и возникновение ENO и WENO методов [7], [8]. Другое, достаточно близкое к вышеуказанным методам направление основано на монотонной или квазимонотонной интерполяции сеточных решений. Методы, использующие данную технику, получили название методов реконструкции сеточных решений. В зарубежной литературе наиболее популярна конечно-параболическая реконструкция, так называемый PPM-метод (piecewise parabolic method) [9]. В отечественных исследованиях (особенно для многомерных постановок) большое распространение получил метод "крупных частиц" [10]. Более детально с существующими методами решения для задач газовой динамики можно ознакомиться в книге [11] или обзоре [12].

Основными недостатками всех методов сквозного счета являются использование слишком большого числа узлов сетки для достижения требуемой точности, применение сложных методик сгущения узлов в местах больших градиентов и невозможность решения с их помощью задач, требующих выделения разрывов (например, задач, в которых необходим строгий учет кинетики на границах).

Методы явного выделения разрывов [13]–[16], несмотря на некоторые недостатки, к которым можно отнести отсутствие априорной информации о месте возникновения разрыва или сложность отслеживания геометрии областей в многомерных постановках, обладают несомненным преимуществом для широкого класса задач. В последнее время наибольшей популярностью пользуется метод отслеживания фронтов (front tracking method) [13], [17], как правило, применяемый совместно с AMR (adaptive mesh refinement) алгоритмами на эйлеровых сетках. Для многократного взаимодействия разрывных решений в работе [16] автором был предложен метод обобщенных характеристик. Следует отметить активное развитие методов решения задач газовой динамики с адаптацией под градиенты и явно выделенные разрывы на подвижных сетках, среди которых можно указать вариационные методы [18], метод гармонических отображений [19] и метод динамической адаптации [20]. Проблемы адаптации для многомерных задач достаточно тесно связаны с задачей построения расчетных сеток для произвольных односвязных областей. С некоторыми подходами к решению этой задачи и возникающими при этом сложностями можно ознакомиться, например, в обзорах [21], [22]. В [23] расчет детонационных волн с выделением разогревающей ударной волны производится на адаптивных сетках, сгущающихся в окрестностях больших градиентов решения. Для построения сетки в каждый момент времени ставится задача минимизации функционала Дирихле. Вариационный принцип

построения сеток наиболее популярен в настоящее время и часто используется для построения начальных сеток для сложных областей [18]. Однако если расчетные области существенно меняются в процессе решения, то порой приходится сталкиваться с основной проблемой вариационных методов, которая заключается в том, что “в экстремальных ситуациях большинство алгоритмов генерирует сетки, ячейки которых могут выворачиваться, и даже возможны ситуации, когда узлы сетки выходят за границу области” [21].

В основу рассматриваемого в данной работе метода динамической адаптации положен переход к произвольной нестационарной системе координат, в которой неизвестными являются не только сеточные функции, но и координаты узлов сетки. Преобразование координат производится с помощью искомого решения и в зависимости от особенностей решения получают то или иное распределение узлов сетки [20],[24]–[26]. Указанный подход позволяет производить вычисления как методами сквозного счета с автоматическим сгущением узлов к особенностям решения, так и с явным выделением подвижных границ и разрывов, когда это необходимо. Обоими этими способами ранее исследовалась задача о равномерно ускоряющемся поршне [24]. Была оценена эффективность алгоритма и выход на автомодельное решение.

Примеры решения многомерных задач при помощи метода динамической адаптации можно найти, например, в [27,28].

Целью данной работы является дальнейшее развитие метода динамической адаптации для газодинамических задач, описывающих многократное взаимодействие ударных волн, волн разрежения и контактных границ.

Особенности метода динамической адаптации будут показаны на примере решения тестовой задачи Вудварда-Колелла [9], являющейся в настоящее время наиболее распространённым тестом для всех новых методов решения задач газовой динамики

Основные проблемы в рассматриваемом примере связаны с выделением разрывов и их взаимодействием. Выделение разрыва требует разработки надежного средства определения момента и местоположения возникающего разрыва. Многократное взаимодействие разрывов отличается большим разнообразием, которое может быть сведено к рассмотрению ряда элементарных взаимодействий: столкновение двух встречных ударных волн, поглощение одной ударной волны догоняющей ее другой ударной волной и прохождение ударной волны через контактную границу.

**1. Задача Вудварда-Колелла [9].** Задача Вудварда-Колелла описывает взаимодействие двух взрывных волн, движущихся навстречу друг другу, возникших в результате распада двух произвольных разрывов, рис.1,2. Математически задача сводится к решению системы уравнений газовой динамики: дифференциальных законов сохранения массы, импульса и энергии, дополненных соответствующими каждой из задач начальными и граничными условиями. В эйлеровой системе координат в одномерной постановке задача формулируется в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial x}(P + \rho \cdot u^2) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u \cdot \varepsilon) + P \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$P = \rho \cdot R \cdot T, \quad \varepsilon = \frac{R}{\gamma - 1} \cdot T, \quad \gamma = 1.4,$$

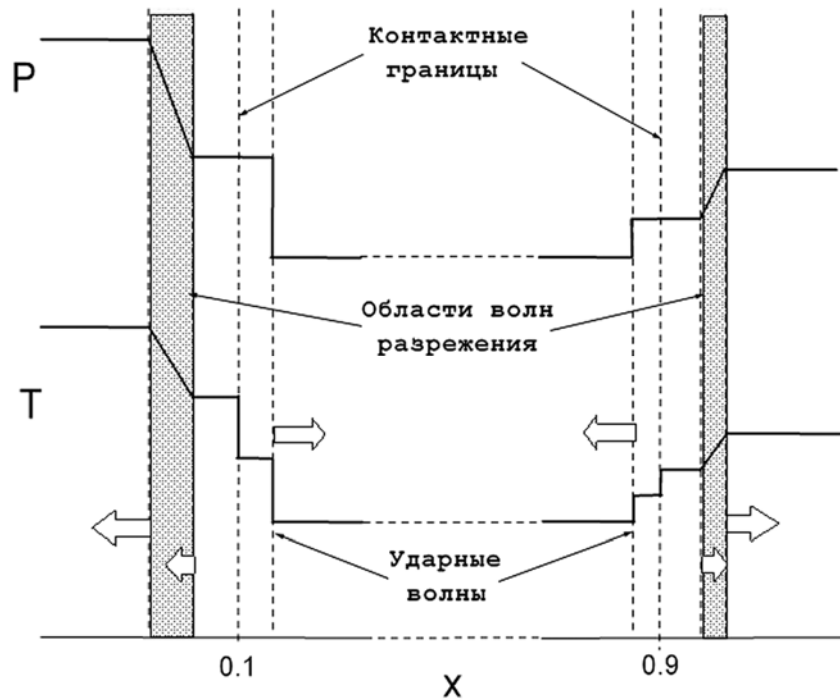
$$t \geq 0, \quad x_l \in [0, 0.1), \quad x_m \in (0.1 \div 0.9), \quad x_r \in (0.9 \div 1].$$

По условию в начальном состоянии газ находится в трех  $\ell, m, r$  областях в трех разных состояниях:

$$t = 0: \quad \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ P \end{pmatrix}_{\ell} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ P \end{pmatrix}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ P \end{pmatrix}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$



**Рис.1.** Схематический профиль давления и температуры в начальный момент времени в задаче Вудварда-Колелла



**Рис.2.** Схема распада произвольных разрывов в начальный момент времени (профили давления  $P$  и температуры  $T$ ; области волн разрежения заштрихованы), стрелками указаны направления движения фронтов

На границах  $x = 0$ ,  $x = 0$ , и  $x = 1$  задается условие непроницаемости:  $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ . В точки  $x = 0.1$  и  $x = 0.9$  в начальный момент времени помещаются два произвольных разрыва.

Принятые обозначения:  $\rho$  – плотность,  $u$  – скорость,  $P$  – давление,  $\epsilon$ ,  $T$  – внутренняя

энергия и температура,  $R$  – газовая постоянная,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $x_\ell, x_m, x_r$  – размеры  $\ell, m, r$  – областей.

В результате решения задачи о распаде произвольного разрыва (метод решения будет обсуждаться позднее) в точках разрывов появятся волны разрежения, контактные разрывы и ударные волны. Математически данный факт можно записать следующим образом:

$$t = 0: \begin{cases} x \in [0, 0.099] & \rho = 1, & u = 0, & P = 10^3, \\ x \in (0.099, 0.0995) & f(x) = f(0.099) + (x - 0.099) \cdot (f(0.0995) - f(0.099)) / 0.0005, \\ x \in [0.0995, 0.1) & \rho = 0.59, & u = 19.5976, & P = 4.609 \cdot 10^2, \\ x \in (0.1, 0.101) & \rho = 5.99924, & u = 19.5976, & P = 4.609 \cdot 10^2, \\ x \in (0.101, 0.899) & \rho = 1, & u = 0, & P = 10^{-2}, \\ x \in (0.899, 0.9) & \rho = 5.99242, & u = -6.1964, & P = 4.609 \cdot 10^1, \\ x \in (0.9, 0.9005] & \rho = 0.583, & u = -6.1964, & P = 4.609 \cdot 10^1, \\ x \in (0.9005, 0.901) & f(x) = f(0.9005) + (x - 0.9005) \cdot (f(0.901) - f(0.9005)) / 0.0005, \\ x \in [0.901, 1] & \rho = 1, & u = 0, & P = 10^2, \end{cases}$$

где  $f(x)$  – любая газодинамическая функция  $\rho, u, P$  определяется по формуле линейной интерполяции для  $x$  в указанном интервале. В начальный момент времени на контактных границах  $x = 0.1$  и  $x = 0.9$  предполагается выполнение условий  $u_0 = u_1, P_0 = P_1$ , а в точки  $x = 0.101$  и  $x = 0.899$  помещаются две ударные волны, для которых выполняются условия Гюгонно

$$\begin{cases} \rho_0 \cdot (u_0 - D_x) = \rho_1 \cdot (u_1 - D_x) = Q_x, \\ P_0 + \rho_0 \cdot (u_0 - D_x)^2 = P_1 + \rho_1 \cdot (u_1 - D_x)^2, \\ \varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{(u_0 - D_x)^2}{2} = \varepsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{(u_1 - D_x)^2}{2}. \end{cases} \quad (3)$$

Индексы 0 и 1 относятся к параметрам на разных сторонах разрыва,  $D_x$  и  $Q_x$  – скорость и поток массы через границу.

Используя замену переменных общего вида, в соответствии с методом динамической адаптации выполним переход к произвольной нестационарной системе координат с переменными  $(q, \tau)$ , в которых система уравнений (1) запишется следующим образом [24]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\psi}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{Q}{\rho} - u \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} (\psi \cdot u) + \frac{\partial}{\partial q} (P + Q \cdot u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} (\psi \cdot \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial q} (Q \cdot \varepsilon) + P \cdot \frac{\partial u}{\partial q} = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = - \frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\psi}{\rho}, \end{cases} \quad (4)$$

$$P = \rho \cdot R \cdot T, \quad \varepsilon = \frac{R}{\gamma - 1} \cdot T, \quad \gamma = 1.4,$$

$$\tau \geq 0, \quad q \in [0, 1],$$

где  $\psi/\rho$  – якобиан преобразования,  $Q$  – функция преобразования, физический смысл которой представляет собой поток вещества через границу,  $\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{Q}{\rho}$  – скорость движения системы координат.

В итоге в переменных  $(q, \tau)$  получили расширенную дифференциальную систему (4), в которой последнее дифференциальное уравнение является уравнением обратного преобразования. Это уравнение совместно с якобианом преобразования используется для определения координат узлов сетки, т.е. для построения расчетной сетки. Управляемое распределение узлов на каждый момент времени осуществляется с помощью функции преобразования  $Q$ , конкретный вид которой подлежит определению.

Начальные и граничные условия (2) имеют вид

$$\tau = 0: \begin{cases} q \in [0, 0.099] & \rho = 1, & u = 0, & P = 10^3, & \psi = \rho, \\ q \in (0.099, 0.0995) & f(q) = f(0.099) + (q - 0.099) \cdot (f(0.0995) - f(0.099)) / 0.0005, \\ q \in [0.0995, 0.1) & \rho = 0.59, & u = 19.5976, & P = 4.609 \cdot 10^2, & \psi = \rho, \\ q \in (0.1, 0.101) & \rho = 5.99924, & u = 19.5976, & P = 4.609 \cdot 10^2, & \psi = \rho, \\ q \in (0.101, 0.899) & \rho = 1, & u = 0, & P = 10^{-2}, & \psi = \rho, \\ q \in (0.899, 0.9) & \rho = 5.99242, & u = -6.1964, & P = 4.609 \cdot 10^1, & \psi = \rho, \\ q \in (0.9, 0.9005) & \rho = 0.583, & u = -6.1964, & P = 4.609 \cdot 10^1, & \psi = \rho, \\ q \in (0.9005, 0.901) & f(q) = f(0.9005) + (q - 0.9005) \cdot (f(0.901) - f(0.9005)) / 0.0005, \\ q \in [0.901, 1] & \rho = 1, & u = 0, & P = 10^2, & \psi = \rho. \end{cases} \quad (5)$$

В расчетном пространстве границы  $q = 0$  и  $q = 1$  неподвижны и непроницаемы:

$$u(\tau, 0) = Q(\tau, 0) = 0, \quad u(\tau, 1) = Q(\tau, 1) = 0. \quad (6)$$

Через контактные разрывы  $q = 0.1$ ,  $q = 0.9$  отсутствует поток массы, следовательно,

$$\begin{aligned} u_0(\tau, 0.1) &= u_1(\tau, 0.1), & P_0(\tau, 0.1) &= P_1(\tau, 0.1), & Q(\tau, 0.1) &= 0, \\ u_0(\tau, 0.9) &= u_1(\tau, 0.9), & P_0(\tau, 0.9) &= P_1(\tau, 0.9), & Q(\tau, 0.9) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Границы  $q = 0.101$  и  $q = 0.899$  объявляются подвижными и выделяются явным образом. Скорость их движения оценивается из законов сохранения (3).

**2. Структура решения.** В эволюции данной проблемы можно выделить несколько основных моментов.

Первый – распад двух произвольных разрывов неподалеку от внешних границ рассматриваемой области, рис.1, и, как следствие, возникновение на местах распадов контактных границ, от которых по направлению к внешним границам отходят волны разрежения, а навстречу друг другу распространяются две ударные волны различной интенсивности, рис.2.

Второй момент – столкновение этих ударных волн, в результате чего образуется контактная граница с отходящими от нее ударными волнами.

Третий – прохождение одной из ударных волн контактной границы, вследствие чего в сторону (противоположную направлению распространения ударной волны) от контактной границы отойдет волна разрежения.

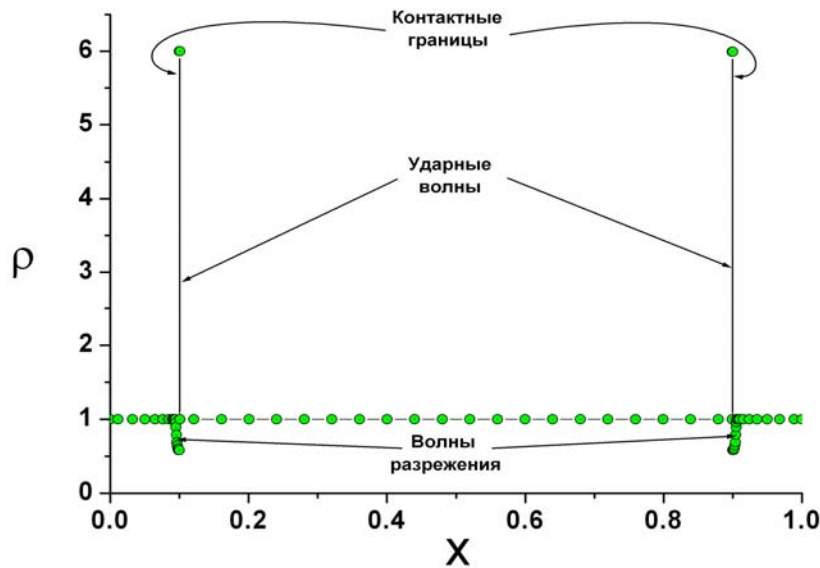


Рис.3. Профиль плотности на начало расчета

Поскольку в данной задаче изначально заданы два произвольных разрыва, для применения метода динамической адаптации с явным выделением границ необходимо на первом этапе решить задачу о распаде произвольного разрыва [29], [30]. В результате решения, вместо одного произвольного разрыва, получится контактная граница, от которой внутрь области задачи распространяется ударная волна, а в другую сторону – волна разрежения, рис.2. В данном исследовании волны разрежения явно не выделяются, хотя следует отметить, что при необходимости возможна реализация алгоритма с выделением как внешней, так и внутренней границ волны разрежения. С учетом вышесказанного, первоначально заданный разрыв заменяется двумя явно выделенными – контактной границей и ударной волной. Характерный профиль плотности показан на рис.3.

В процессе решения ударные волны, бегущие навстречу друг другу, столкнутся. Их взаимодействие приведет к образованию контактной границы и двух отходящих от нее ударных волн. Данная ситуация также моделируется как распад произвольного разрыва с параметрами, которые соответствуют газодинамическим характеристикам за фронтами ударных волн. Математически это столкновение приведет к появлению еще одной дополнительной расчетной области из-за необходимости выделения возникшей контактной границы (алгоритм расчета после распада более подробно рассматривается в следующем пункте).

**3. Распад произвольного разрыва.** Задача о распаде произвольного разрыва детально исследована. Анализ ее решения для идеального газа можно найти, например в [29], [30]. Применительно к настоящему исследованию в случае уравнений состояния для идеального газа и распада разрыва двух типов – расходящиеся ударные волны и расходящиеся ударная волна и волна разрежения, стыкующиеся через контактную границу – можно записать следующий алгоритм.

Пусть  $n=1$  соответствует параметрам  $P_1, u_1, \rho_1, T_1$  с левой стороны, а  $n=2$  – параметрам с правой стороны  $P_2, u_2, \rho_2, T_2$  произвольного разрыва. Нужно найти параметры  $P_3 = P_4, u_3 = u_4, \rho_3, \rho_4, T_3, T_4$  после распада, где 3–4 – это контактная граница, которая разделяет газ в состоянии 3, примыкающий с другой стороны к волне 1–3, и газ в состоянии 4 со второй границей, соответствующей волне 4–2. В силу автомодельности решения задачи о распаде разрыва, как было

показано в [27,28], волны 1–3 и 2–4, если таковые существуют, представляют собой либо ударную волну, либо волну разрежения. Поэтому, если  $P_1 < P_3$ , то 1–3 является ударной волной. Параметры  $P_3, u_3$  состояния 3 в этом случае взаимно однозначно определяются из адиабаты Гюгонио, которая проходит через точку  $P_1, u_1$ . Если же наоборот  $P_1 > P_3$ , то 1–3 является волной разрежения. Тогда параметры  $P_3, u_3$  состояния 3 находятся при помощи адиабаты Пуассона, проходящей через точку  $P_1, u_1$ . Аналогично определяется и тип волны 4–2 в зависимости от соотношения  $P_2, P_4$ .

Исходя из вышесказанного, определим функцию  $F_n(P)$  для каждого из состояний 1 и 2 рассматриваемого произвольного разрыва:

$$F_n(P) = \begin{cases} P_n + \frac{\gamma+1}{4} \cdot \left[ \rho_n \cdot (u_3 - u_n)^2 + \sqrt{\rho_n^2 \cdot (u_3 - u_n)^4 + \frac{16 \cdot \gamma}{(\gamma+1)^2} \cdot P_n \cdot \rho_n \cdot (u_3 - u_n)^2} \right], & P > P_n, \\ P_n \cdot \left[ 1 - \frac{\gamma-1}{2 \cdot \sqrt{\gamma \cdot P_n / \rho_n}} \cdot (u_3 - u_n) \right]^{-2 \cdot \gamma / (\gamma-1)}, & P < P_n. \end{cases} \quad (8)$$

В этом определении функции первое уравнение описывает адиабату Гюгонио, второе – адиабату Пуассона. Приравняв  $F_1(P)$  и  $F_2(P)$ , по значениям на разрыве  $P_1, u_1, \rho_1, P_2, u_2, \rho_2$  методом Ньютона найдем газодинамическую скорость  $u_3 = u_4$  на контактной границе. После вычисления  $u_3 = u_4$  определим  $P_3 = P_4$ , а затем и остальные величины: плотности  $\rho_3, \rho_4$ , температуры  $T_3, T_4$  и при наличии ударных волн, используя условия Гюгонио (3), скорости разрывов.

Рассмотрим две ситуации:

- 1) левая ударная волна проходит правую контактную границу;
- 2) две встречные ударные волны взаимодействуют между собой.

В первом случае найденное давление удовлетворяет неравенству  $P_1 > P_3 = P_4 > P_2$ , и алгоритм продолжения расчета будет следующим: слева вместо ударной волны устанавливается контактный разрыв, на котором заданы  $u_3 = u_4$  и  $P_3 = P_4$ , а также значения  $\rho_3, T_3$  слева и  $\rho_4, T_4$  справа от разрыва; правая граница заменяется ударной волной со значениями  $P_4, u_4, \rho_4, T_4$  за фронтом и  $P_2, u_2, \rho_2, T_2$  перед фронтом. В области между разрывами все газодинамические величины предполагаются равными  $P_4, u_4, \rho_4, T_4$ . В области левой контактной границы располагается невыделяемая волна разрежения.

Во втором случае выполнено неравенство  $P_3 = P_4 > P_1 > P_2$ , что несколько усложняет алгоритм расчета. На левой границе вместо ударной волны, движущейся слева направо, устанавливается ударная волна, распространяющаяся в противоположном направлении со значениями  $P_3, u_3, \rho_3, T_3$  за фронтом и  $P_1, u_1, \rho_1, T_1$  перед фронтом. Справа вместо ударной волны устанавливается контактная граница, на которой заданы  $u_3 = u_4$ ,  $P_3 = P_4$  и значения  $\rho_3, T_3$  слева от разрыва, а  $\rho_4, T_4$  справа от него. Затем вводится дополнительная подобласть, левой границей которой является контактный разрыв, а правой – ударная волна с параметрами  $P_4, u_4, \rho_4, T_4$  за фронтом и  $P_2, u_2, \rho_2, T_2$  перед фронтом. В области между левой ударной волной и контактной границей все газодинамические величины предполагаются равными  $P_3, u_3, \rho_3, T_3$ , а между контактной границей и правой ударной волной –  $P_4, u_4, \rho_4, T_4$ .



**4. Выбор функции адаптации  $Q$  и алгоритм решения.** Как уже отмечалось, для желаемого распределения узлов сетки функция преобразования  $Q$  должна зависеть от искомого решения или его особенностей. Основной особенностью решения задачи о взаимодействии двух встречных ударных волн является наличие подвижных границ. Предварительный анализ показал, что для решения данной задачи достаточно ограничиться применением квазиравномерной на каждый момент времени сеткой. Динамическое квазиравномерное распределение узлов можно получить, воспользовавшись одной из наиболее простых форм функции  $Q$ , получаемой с помощью так называемого диффузионного приближения [25], [31]:

$$Q = -D \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q}, \quad (9)$$

где  $D$  – свободный параметр, имеющий смысл коэффициента диффузии. Его значение можно определить через параметры задачи: геометрические размеры области и скорость движения границ [29]. В основу определения положена линейная оценка размера зоны, охваченной возмущением, для дифференциальных уравнений параболического типа:

$$L \approx \sqrt{D \cdot \Delta t}. \quad (10)$$

В (8) коэффициент  $D$  выбирается таким, чтобы за время  $\Delta t$  возмущение успело пробежать расстояние  $L$ , равное расстоянию между подвижными границами. Выражая  $\Delta t$  через скорость движения границ  $v$   $\Delta t = \frac{\Delta L}{|v_\ell - v_r|}$  коэффициент  $D$  можно представить в виде

$$D = \frac{L^2 \cdot |v_\ell - v_r|}{\Delta L}, \text{ где } \Delta L = \frac{\Psi}{\rho} L - \text{приращение области за время } \Delta t, v_\ell, v_r - \text{ скорости движения}$$

левой и правой границ соответственно. С учетом выражения для скорости  $v_{\ell,r} = -\left(\frac{Q}{\rho}\right)_{\ell,r}$  коэффициент  $D$  в окончательном виде запишется

$$D = \frac{|Q_\ell - Q_r| \cdot L}{\Psi}. \quad (11)$$

В дискретном пространстве сеточных функций, где определен пространственный шаг  $h$ , а длина области  $L = h \cdot N$  выражается через количество разбиений  $N$ , коэффициент  $D$  можно представить в виде

$$D = \frac{|Q_\ell - Q_r| \cdot h \cdot N}{\Psi_{\min}}. \quad (12)$$

Таким образом, функция преобразования  $Q$  оказывается связанной с особенностями рассматриваемой задачи: с изменяющимся размером  $L(t)$  и скоростью перемещения границ области  $v_{\ell,r}$ .

Для численной реализации модели (3)–(12) в расчетном пространстве вводилась разностная сетка с целыми и полуцелыми узлами

$$\omega = \left\langle \left( q_i, \tau^j \right), \left( q_{i+1/2}, \tau^j \right), q_{i+1} = q_i + h, q_{i+1/2} = q_i + 0.5h, i = 0, 1, \dots, N-1 \right\rangle.$$

$$\tau^{j+1} = \tau^j + \Delta \tau^j, j = 0, 1, \dots$$

Для аппроксимации дифференциальных уравнений использовался метод конечных разностей на разнесенных сетках, выписывалось семейство неявных разностных схем [24], в кото-

рых в полуцелых точках определяются плотность  $\rho_{i+1/2}$ , температура  $T_{i+1/2}$ , давление  $P_{i+1/2}$  и внутренняя энергия  $\varepsilon_{i+1/2}$ , а в целых – скорость  $u_i$  и функция  $Q_i$ .

**5. Результаты моделирования.** На рис.4–11 показаны пространственные профили скорости, и плотности на различные моменты времени, найденные из решения задачи Вудварда-Колелла методом динамической адаптации с явным выделением границ. На всех рисунках показано решение, полученное на расчетной сетке с общим числом узлов  $N=420$ , содержащей во внутренних областях по 80 ячеек, а в областях, примыкающих к внешним границам, - по 50. В силу заданных начальных условий (2) эволюция каждого из разрывов будет иметь свои особенности. В частности, на процесс в целом определяющее влияние оказывает взаимодействие ударных волн различной интенсивности. Рис.4,5 соответствуют моменту времени, когда левая волна разрежения отразилась от внешней границы и подошла к левой ударной волне, в то время как правая волна разрежения лишь подошла к противоположной внешней границе. Дальнейшее распространение ударных волн навстречу друг другу приводит к еще большему разрежению в областях между ударными волнами и внешними границами.

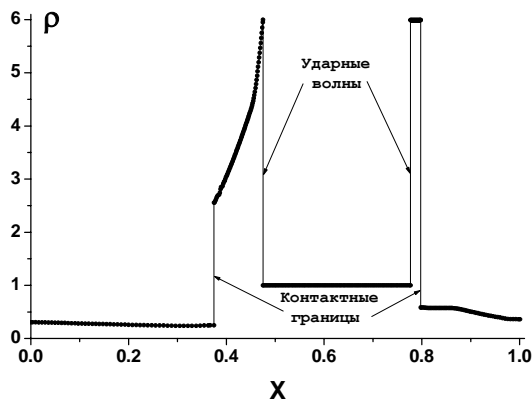


Рис.4. Профиль плотности при  $t=0.016$

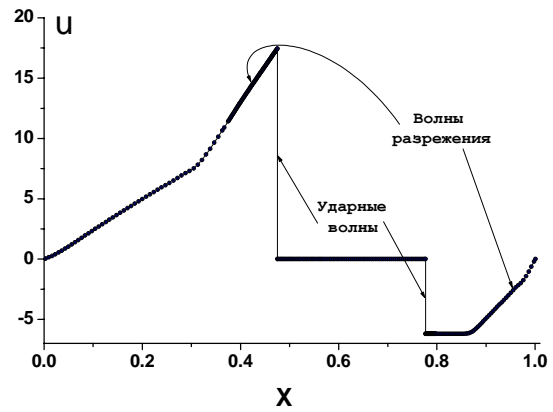


Рис.5. Профиль скорости при  $t=0.016$

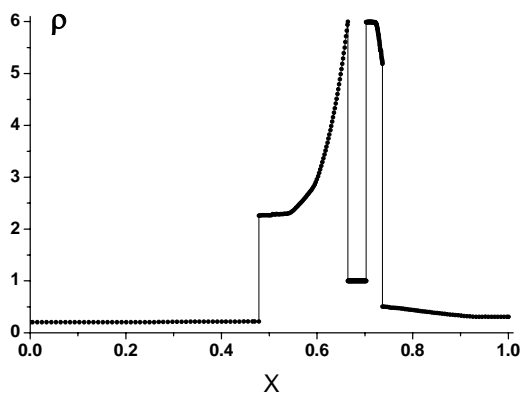


Рис.6. Профиль плотности при  $t=0.026$  перед столкновением ударных волн

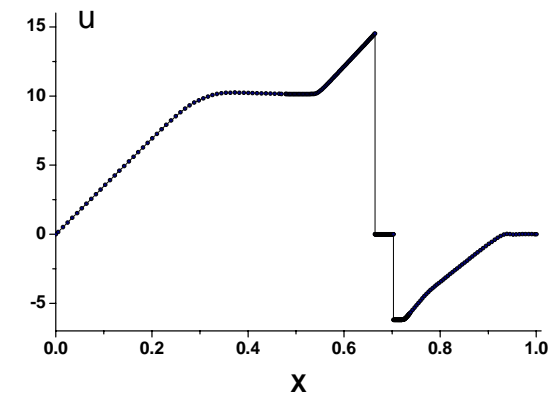


Рис.7. Профиль скорости при  $t=0.026$  перед столкновением ударных волн

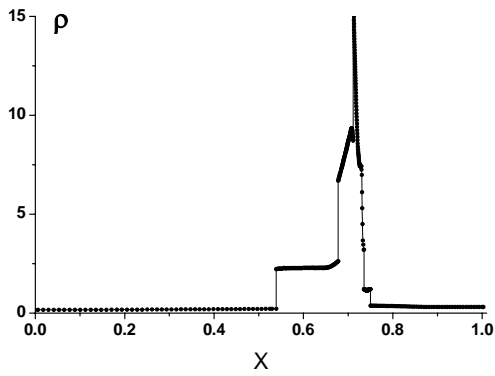


Рис.8. Профиль плотности при  $t=0.032$  после столкновения ударных волн

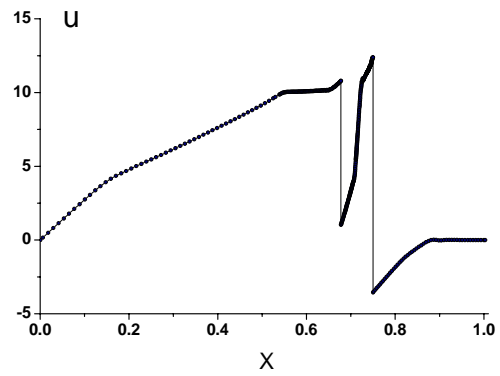


Рис.9. Профиль скорости при  $t=0.032$  после столкновения ударных волн

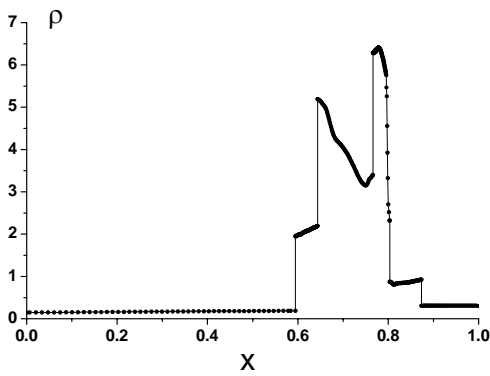


Рис.10. Профиль плотности при  $t=0.038$

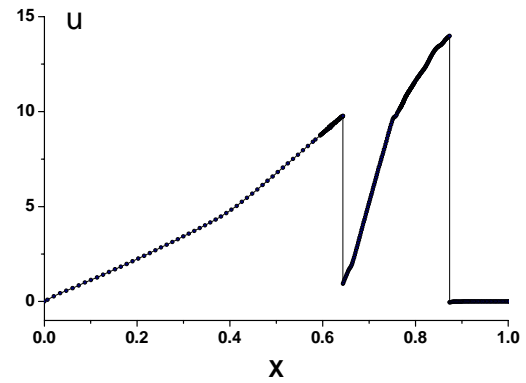


Рис.11. Профиль скорости при  $t=0.038$

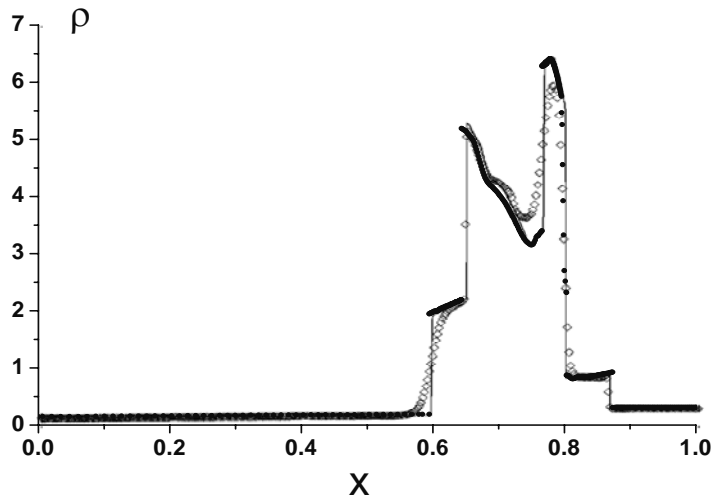


Рис.12. Сравнение решений, полученных методом динамической адаптации ● – 420 ячеек, и при помощи WENO5m ◇ – 400 ячеек, сплошная линия – 12800 ячеек

Профили плотности и скорости непосредственно перед столкновением ударных волн показаны на рис.6,7, а на рис.8,9 – сразу после столкновения. Окончанию расчета соответствовал момент прохождения правой ударной волной правой контактной границы (рис.10,11), когда от-

четливо видны все характерные для этого времени разрывы: две ударные волны и три контактные границы. Следует отметить, что решения, получаемые при помощи других методов, с общим числом узлов менее 500, передают лишь качественное поведение газодинамических функций. Допускаемые количественные ошибки, например, для плотности достигают при этом 10–50 %. На рис.12 представлено сравнение профилей плотности, рассчитанных с использованием метода динамической адаптации и при помощи модифицированной WENO схемы [32]. Видно, что метод динамической адаптации позволил получить решение на 420 ячейках, практически совпадающее с решением на 12800 ячейках WENO5m.

**6. Заключение.** Рассмотрен метод динамической адаптации применительно к задачам газовой динамики с многократным взаимодействием возникающих в процессе решения разрывов. На примере тестовой задачи (проблема Вудварда-Колелла) показана эффективность и применимость предлагаемого подхода. Показана возможность использования метода динамической адаптации для задач с многократным взаимодействием разрывов, когда необходимо их выделение. В качестве функции преобразования выбиралась простейшая функция адаптации диффузионного типа. Диффузионное приближение в задачах типа Вудварда-Колелла, где нет необходимости сгущения узлов к особенностям решения, позволяет с помощью соответствующего выбора коэффициента диффузии строить квазиравномерные сетки во всех подобластях решения. Применение метода динамической адаптации позволило получить решение задачи Вудварда-Колелла на сетке с 30-кратным уменьшением общего количества узлов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчёта разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959, т.47, №3, с.271-306.
2. Van Leer B. Towards the ultimate conservative finite difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme // Journal of Computational Physics. 1974, v.14, p.361-376.
3. Boris J.P., Book D.L., Hain K. Flux-corrected transport: Generalization of the method // Journal of Computational Physics. 1975, v.18, p.248-283.
4. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990, 660 с.
5. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1983, v.49, p.357-393.
6. Osher S. Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximation // SIAM J. Numer. Anal. 1984, v.21, №2, p. 217-235.
7. Harten A. ENO schemes with subcell resolution // Journal of Computational Physics. 1989, v.83, p. 148-184.
8. X-D. Liu, S. Osher, T. Chan. Weighted essentially non-oscillatory schemes // Journal of Computational Physics. 1994, v.115, p.200-212.
9. Colella Ph., Woodward P.R. The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations // Journal of Computational Physics. 1984, v.54, №1, p.174-201.
10. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод "крупных частиц" в газовой динамике. – М.: Наука, 1978, 500с.
11. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических уравнений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001, 608с.
12. Бондаренко Ю.А., Башуров В.В., Янилкин Ю.В. Математические модели и численные методы для решения задач нестационарной газовой динамики. Обзор зарубежной литературы // Препринт. РФЯЦ-ВНИИЭФ. 88-2003, 53с.
13. LeVeque R.J., Shyue K.M. One-Dimensional Front Tracking Based on High Resolution Wave Propagation Methods // SISC. 1995, v.16, № 2, p.348-377.
14. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's method // Journal of Computational Physics. 1979, v.32, p.101-136.
15. Henshaw W.D. A scheme for numerical solution of hyperbolic systems of conservation laws // Journal of Computational Physics. 1987, v.68, № 1, p.25-47.
16. Грудницкий В.Г. Прямой обобщенно-характеристический метод для расчета разрывных решений законов сохранения газовой динамики // Математическое моделирование. 2004, т.16, № 1, с.90-96.

17. *Shyue K.M.* An efficient shock-capturing algorithm for compressible multicomponent problems // *Journal of Computational Physics*. 1998, v.142, p.208-242.
18. *Иваненко С.А., Чарахчян А.А.* Криволинейные сетки из выпуклых четырехугольников // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1988, т.28, № 4, с.503 – 514.
19. *Liseikin V.D.* On some interpretations of a smoothness functional used in constructing regular and adaptive grids // *Russ. J. Numer. Anal. Modelling*. 1993, v.8, №6, с.507-518.
20. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И.* Об одном подходе к построению адаптивных разностных сеток // *Доклады АН СССР*. 1988, т.298, № 1, с.64-68.
21. *Иваненко С.А., Прокопов Г.П.* Методы построения адаптивно-гармонических сеток // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1997, т. 37, № 6, с. 643 - 662.
22. *Лисейкин В.Д.* Обзор методов построения структурных адаптивных сеток // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1996, т.36, №1, с.3-41.
23. *Азаренок Б.Н.* Об одной схеме расчета детонационных волн на подвижных сетках // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2005, т.45, № 12, с.2260- 2282.
24. *Бреславский П.В., Мажукин В.И.* Метод динамической адаптации в задачах газовой динамики // *Математическое моделирование*. 1995, т.7, № 12, с.48-78.
25. *Бреславский П.В., Мажукин В.И.* Математическое моделирование процессов импульсного плавления и испарения металла с явным выделением фазовых границ // *Инженерно-физический журнал*. 1989, т.57, № 1, с.107-114.
26. *Мажукин В.И., Самарский А.А., О. Кастельянос, Шапранов А.В.* Метод динамической адаптации для нестационарных задач с большими градиентами // *Математическое моделирование*. 1993, т.5, №4, с.32-56.
27. *Руденко Д.В., Утюжников С.В.* Применение динамически адаптивных к решению сеток для моделирования пространственных нестационарных течений газа с большими градиентами. // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2002, т.42, №.3, с.395-409.
28. *Мажукин В.И., Самарский А.А., Чуйко М.М.* Метод динамической адаптации для численного решения нестационарных многомерных задач Стефана // *Докл. Акад. наук*.1999, т.368, №3, с.307-310.
29. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики: Учеб. пособие: Для вузов. - 3-е изд., доп. – М.: Наука, 1992, 424 с.
30. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики.- Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 336 с.
31. *Королёва О.Н., Мажукин В.И.* Математическое моделирование лазерного плавления и испарения многослойных материалов. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2006, т.46, №5, с.910–924.
32. *Henrick A.K., Aslam T.D., Powers J.M.* Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: Achieving optimal order near critical points // *Journal of Computational Physics*. 2005, v.207, p.542-567.

Поступила в редакцию 04.07.2006.