

УДК 519.635

ДИНАМИЧЕСКАЯ АДАПТАЦИЯ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ¹⁾

© 2007 г. А. В. Мажукин, В. И. Мажукин

(127047 Москва, Миусская пл., 4а, Ин-т матем. моделирования РАН)

e-mail: immras@orc.ru

Поступила в редакцию 22.05.2007 г.

Представлен метод динамической адаптации, основанный на идее использования произвольной нестационарной системы координат, скорость движения которой определяется искомым решением. На примере решения ряда известных модельных задач рассмотрены особенности построения адаптирующихся к решению сеток для уравнений параболического типа. Среди рассматриваемых задач проблемы нелинейной теплопроводности о формировании подвижных и неподвижных температурных фронтов и задачи конвекции–диффузии, описываемые нелинейными уравнениями Брюггера и Бакли–Левретта. Детальный анализ дифференциальных приближений и результатов численных решений показал, что идея использования произвольной нестационарной системы координат для построения адаптирующихся сеток в совокупности с принципом квазистационарности делает метод динамической адаптации универсальным, эффективным и алгоритмически простым. Универсальность метода обеспечивается использованием произвольной нестационарной системы координат, скорость движения которой зависит и определяется с помощью искомого решения. С единых позиций и с одинаковым успехом можно строить адаптирующиеся сетки для нестационарных проблем математической физики с существенно различающимися математическими особенностями, среди которых наличие сильных градиентов, распространение слабых и сильных разрывов в известных проблемах нелинейного переноса и теплопроводности, подвижные контактные и свободные границы в гидродинамике. Эффективность определяется автоматическим согласованием скорости движения узлов сетки с динамикой решения. Тесная связь механизма адаптации со структурой параболических уравнений позволяет осуществлять автоматический контроль движения узлов сетки, не допуская пересечения их траекторий. Данный механизм свойствен всем уравнениям параболического типа, в отличие от гиперболических уравнений, структура которых не содержит компонент расталкивающего действия. Алгоритмическая простота достигается общим подходом к построению адаптирующихся сеток независимо от вида и типа дифференциальных уравнений. Библ. 40. Фиг. 17.

Ключевые слова: динамическая адаптация, принцип квазистационарности, адаптирующиеся к решению сетки, параболические уравнения, дифференциальное приближение, различные схемы, нелинейная теплопроводность, нелинейные уравнения конвекции–диффузии.

ВВЕДЕНИЕ

Точность численного решения уравнений в частных производных в сильной степени зависит от того, насколько хорошо распределение узлов расчетной сетки согласуется с характерными особенностями искомого решения. Построение оптимальных сеток осуществляется с помощью различных методов адаптации, развитию которых в последние несколько десятилетий уделяется особое внимание (см. [1]–[5]). Применение того или иного метода адаптации зависит от ряда факторов, важнейшими из которых являются тип уравнения или системы уравнений в частных производных, их размерность, степень нелинейности, наличие подвижных границ и др.

Наиболее развитыми в настоящее время являются методы построения адаптивных сеток для эллиптических задач (см. [6]–[9]), в которых сетка строится до начала интегрирования уравнений. Проблема оптимального распределения узлов особенно остро стоит в нелинейных нестационарных задачах математической физики, решение которых содержит сильную пространственную разномасштабность. Такие особенности решения, как большие градиенты, переходные слои или фронты разрывов, могут возникать вблизи одной из границ или внутри области и с течением времени распространяться по всей расчетной области. В подобных ситуациях заранее построить сетку с оптимальным распределением узлов не представляется возможным, в связи с чем

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 06-07-89191, 07-07-00045).

широкое распространение получили расчетные сетки, адаптирующиеся к искомому решению. По количеству опубликованных работ по нестационарным задачам в настоящее время выделяются два основных направления построения адаптирующихся к решению сеток: адаптивно встраивающиеся и динамически адаптирующиеся.

Адаптивно встраивающиеся (см. [10]–[12]), получившие в последние годы широкое распространение (см. [13], [14]), используются для повышения точности численного решения посредством дробления ячеек исходной сетки в областях резкого изменения решения. Дробление может применяться многократно, что определяет появление измельченных ячеек высоких (от 3-го до 6-го) уровней.

В методах динамической адаптации (см. [15]–[26]), менее сложных алгоритмически и позволяющих работать как с постоянным (см. [19], [20], [26]), так и с переменным числом узлов (см. [16], [17]), управляемое распределение узлов достигается посредством использования информации о динамике искомого решения. Это позволяет концентрировать большое количество узлов в зонах резкого изменения решения (см. [19]). Тесная взаимосвязь между динамикой решения и положением узлов сетки приводит к необходимости переопределения координат узлов на каждом временном слое. Это обстоятельство вынуждает предъявлять более жесткие требования к согласованию динамики численного решения с движением узлов и к степени автоматизации построения сетки, из-за чего преимущественно обладают алгоритмы, в которых отсутствуют разного рода подгоночные параметры (см. [35]).

Настоящая работа посвящена определению общих закономерностей построения динамически адаптирующихся к решению сеток, характерных для параболических уравнений типа конвекции–диффузии (уравнения Бакли–Левретта и Бюргерса) и нелинейной теплопроводности (квазилинейное уравнение теплопроводности). В рассматриваемых задачах оптимальное распределение узлов сетки связано как с перемещением границ, так и с особенностями решения внутри области определения.

С сильно нелинейной теплопроводностью связано появление крутых неподвижных и распространяющихся температурных фронтов.

К задачам конвекции–диффузии сводится ряд математических моделей, составляющих основу задач механики жидкости и газа. Эти модели описывают два основных механизма переноса энергии и вещества: диффузионный и конвективный. В зависимости от внешних условий каждый из механизмов может иметь доминирующее влияние. Для оценки преобладания того или иного процесса обычно используют безразмерные параметры – так называемые числа Пекле (Pe) или Рейнольдса (Re). При $Pe \ll 1$ ($Re \ll 1$) в системе доминирует диффузионный процесс, а при $Pe \gg 1$ ($Re \gg 1$) преобладает конвективный перенос. В случае сильного доминирования конвективного механизма переноса получают класс сингулярно возмущенных нелинейных математических моделей с малым параметром Pe^{-1} или Re^{-1} при старшей производной. Нестационарные сингулярно возмущенные модели допускают возникновение областей сильного изменения решения, распространяющихся в виде различных фронтов и переходных слоев.

С вычислительной точки зрения сингулярно возмущенные задачи относятся к трудно решаемым проблемам. В частности, разностные схемы, используемые для аппроксимации уравнений конвекции–диффузии, как правило, обладают сильной дисперсией, для подавления которой применяются специальные меры.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основным объектом исследований служит класс нестационарных краевых задач математической физики, имеющих вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P(u)}{\partial x} = F^{(n)}(u), \quad x_0 < x < x_r, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$t = 0: u(x, 0) = u^0(x), \quad (1.2)$$

$$x = x_0: g_0\left(t, x_0, u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x}, \dots\right) = 0, \quad (1.3)$$

$$x = x_r: g_r\left(t, x_r, u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x}, \dots\right) = 0,$$

где $P(u) \geq 0$ – сложная линейная или нелинейная функция, $F^{(n)}(u) \geq 0$ – линейный или нелинейный оператор порядка не выше второго, $n = 0, 1, 2$. Предполагается, что решение $u(x, t)$, как и функция $u^0(x)$, обладает необходимой гладкостью.

В зависимости от конкретного вида операторов $P(u)$ и $F^{(n)}(u)$ уравнение (1.1) может описывать те или иные физические процессы и, соответственно, являться линейным или нелинейным уравнением гиперболического или параболического типа. Так, если

$$F^{(n)}(u) = 0, \quad P(u) = \nu u,$$

где $\nu = \text{const}$, то уравнение (1.1) представляет собой простейшее уравнение переноса гиперболического типа; если

$$F^{(n)}(u) = 0, \quad P(u) = u^2/2,$$

то уравнение (1.1) является неполным уравнением Бюргера и представляет собой простейшее нелинейное уравнение переноса гиперболического типа; если

$$F^{(2)}(u) = \frac{\partial}{\partial x} k(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad P(u) = 0, \quad (1.4)$$

то уравнение (1.1) в зависимости от физического смысла функции $k(u)$ будет представлять собой квазилинейное уравнение диффузии или теплопроводности, относящееся к уравнениям переноса параболического типа;

$$F^{(2)}(u) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad P(u) = u^2/2, \quad (1.5)$$

где $\mu = \text{const}$, то уравнение (1.1) является полным нелинейным уравнением Бюргера параболического типа; если

$$F^{(2)}(u) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad P(u) = \frac{u^2}{u^2 + \alpha(1-u)^2}, \quad (1.6)$$

где $D, \alpha = \text{const}$, то уравнение (1.1) является нелинейным уравнением Бакли–Левевертта параболического типа.

В данной работе используется набор дифференциальных операторов (1.4)–(1.6), обеспечивающих параболичность уравнений в частных производных типа (1.1).

2. ПРОИЗВОЛЬНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

В основу метода динамической адаптации положена процедура перехода к произвольной нестационарной системе координат. Использование произвольной нестационарной системы координат позволяет проблему построения и адаптации расчетных сеток формулировать на дифференциальном уровне, т.е. в получаемой математической модели часть дифференциальных уравнений описывает физические процессы, а другая – поведение узлов сетки (см. [15]). Переход к произвольной нестационарной системе координат осуществляется посредством автоматического преобразования координат с помощью искомого решения.

2.1. Замена переменных

Следуя работам [17]–[20], выполняем переход из физического пространства $\Omega_{x,t}$ с эйлеровыми переменными (x, t) в некоторое расчетное пространство с произвольной нестационарной системой координат $\Omega_{q,\tau}$ и переменными (q, τ) . Выполнить указанное преобразование можно, воспользовавшись заменой переменных общего вида $x = f(q, \tau)$, $t = \tau$, имеющей однозначное невырожденное обратное преобразование $q = \varphi(x, t)$, $\tau = t$.

Частные производные зависимых переменных при переходе из одной системы в другую связаны следующими выражениями:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q}, \quad (2.1)$$

где $\psi = \partial x / \partial q$ – якобиан обратного преобразования.

С помощью замен переменных общего вида и соотношений (2.1) представим дифференциальную модель (1.1)–(1.3) в переменных (q, τ) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{Q}{\psi} \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial P(u)}{\partial q} = \frac{1}{\psi} F^{(n)}(u), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = -Q, \quad (2.3)$$

$$q_0 < q < q_r, \quad \tau > 0,$$

где (2.3) – уравнение обратного преобразования с функцией преобразования Q . Функция Q характеризует скорость движения нестационарной системы координат, она заранее не известна и подлежит определению. Более удобным для использования является уравнение обратного преобразования, записанное в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial Q}{\partial q},$$

которое можно получить дифференцированием уравнения (2.3) по переменной q .

Путем несложных преобразований систему (2.2), (2.3) можно представить в консервативном виде:

$$\frac{\partial(\psi u)}{\partial \tau} + \frac{\partial(uQ)}{\partial q} + \frac{\partial P(u)}{\partial q} = F^{(n)}(u), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial Q}{\partial q}. \quad (2.5)$$

Таким образом, при переходе к произвольной нестационарной системе координат исходная дифференциальная модель трансформируется в расширенную дифференциальную систему, в которой появляется дополнительное уравнение типа (2.3) или (2.5). Его тип, свойства и вид краевых условий зависят от конкретного вида функции Q . Функция Q на данном этапе рассуждений остается пока не определенной. После ее определения уравнение (2.5) используется для построения адаптирующей к решению сетки. Его разностный аналог описывает динамику узлов сетки, а функция Q осуществляет контролируемое движение узлов сетки, согласованное с динамикой искомого решения. Согласование достигается введением функциональной зависимости функции Q от искомого решения. Но так как решение заранее не известно, то возникает проблема определения оптимальной функции преобразования Q , обеспечивающей полную согласованность механизма адаптации с решением. Если полное согласование отсутствует, то в управляющую функцию вводят подгоночные коэффициенты, подбором которых стремятся уменьшить степень несогласованности. В то же время наличие подгоночных коэффициентов в методе адаптации свидетельствует о его несовершенстве.

2.2. Принцип квазистационарности

Задание функции Q определяет конкретный вид преобразования координат и определенный способ управления движением узлов. Как уже отмечалось, определение оптимальной функции преобразования Q , обеспечивающей согласованное с решением движение узлов, является важнейшим моментом в методе динамической адаптации.

В понятие полной согласованности входит несколько требований, наиболее важными из которых являются:

распределение узлов в строгой зависимости от особенностей искомого решения;

наличие надежного автоматического контроля движения узлов с целью недопущения пересечения их траекторий в процессе адаптации;

полная автоматизация процесса адаптации, состоящая в отсутствии всевозможных подгоночных параметров, изменяющихся от варианта к варианту;

возможность изменения по ходу расчетов общего числа узлов сетки, состоящей в генерации новых узлов, если исходного количества недостаточно, и уничтожения определенной части имеющихся, если их количество оказалось избыточным.

Как показывает опыт применения динамической адаптации (см. [26]–[28]), для удовлетворения указанных требований и достижения полной согласованности конструкции управляющей функции Q должна быть тесно связана со структурой исходного уравнения (см. [19]) или системы уравнений [27], [28], описывающих физические процессы. Получить подобную связь можно, воспользовавшись принципом квазистационарности (см. [19]), смысл которого заключается в следующем.

При переходе к новой системе координат всегда неявно подразумевается, что будет выбрана такая нестационарная система координат, в которой временные производные решения окажутся значительно меньшими, чем в исходной. Логическим завершением данного предположения является требование обращения в нуль временных производных или по крайней мере их достаточной малости. Малость временных производных равносильна требованию режима квазистационарности для процессов в новой системе. Этот момент представляет чрезвычайно важным, так как из анализа качества разностных схем известно, что временные производные играют важную роль в диссипативных и дисперсионных свойствах этих схем.

В случае параболического уравнения оператор $F^{(n)}$ в (1.1) является дифференциальным оператором 2-го порядка $F^{(2)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, а само уравнение в переменных (q, τ) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{Q \partial P(u)}{\psi \partial q} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{\psi} \frac{\partial u}{\partial q}.$$

Предположим, что найдена такая система координат, в которой $du/d\tau = 0$. Тогда в этой системе рассматриваемое уравнение примет вид

$$\frac{Q \partial u}{\psi \partial q} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial P(u)}{\partial q} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{\psi} \frac{\partial u}{\partial q}.$$

Отсюда найдем функцию Q :

$$Q = -\left(\frac{\partial P(u)}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\psi} \right) - \frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 u / \partial q^2}{\partial u / \partial q + \text{Re}} \right), \quad (2.6)$$

где $\text{Re} \ll 1$ – регуляризирующая константа, ограничивающая снизу значение производной $\partial u / \partial q$ в случае ее обращения в нуль.

Проанализируем полученное выражение (2.6). Первое слагаемое после дифференцирования представляет собой либо решение u , либо его производную du/dq , либо их комбинацию. После разностной аппроксимации это слагаемое оказывает сильно сжимающее действие на узлы сетки. Третье слагаемое оказывает такое же воздействие. Но в силу того, что оно представляет собой отношение производных, влияние его по сравнению с первым слагаемым намного слабее и по этой причине оно учитывается не всегда. Второе слагаемое оказывает расталкивающее воздействие на узлы сетки и представляет собой механизм автоматического контроля движения узлов с целью недопущения пересечения их траекторий. При неограниченном сближении двух соседних узлов $(i, i + 1)$ функция $\psi_{i+1/2}$ соответствующей ячейки стремится к нулю. Величина слагаемого $\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\psi} \right)$ резко возрастает (как $1/\psi^2$) и, соответственно, резко возрастает расталкивающее воздействие функции Q , предотвращая обращение в нуль якобиана преобразования (функция ψ), не позволяя схлопываться ячейкам сетки.

Отметим, что данный механизм автоматического контроля свойствен всем уравнениям параболического типа. В то же время в гиперболических уравнениях, допускающих появление разрывных решений, структура уравнений другая и функция преобразования Q , получаемая из принципа квазистационарности и соответствующая условиям полного согласования, не содержит механизма предотвращающего схлопывание ячеек. Поэтому для гиперболических уравнений в ряде случаев слагаемое расталкивающего воздействия типа $\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\psi} \right)$ вводится искусственно (см. [20], [26]).

2.3. Начальные и граничные условия

Переход к произвольной нестационарной системе координат приводит к тому, что неизвестными являются не только сеточные функции u_i^j , но и координаты узлов сетки x_i^j . Для их определения в расширенной математической модели (2.4)–(2.6) используется дифференциальное уравнение в частных производных (2.5).

Трансформация исходного уравнения (2.1) в расширенную дифференциальную систему (2.4)–(2.6) требует соответствующих дополнений в граничных и начальных условиях, т.е. требуется дополнительное определение величин $\psi(0, q)$, $Q(\tau, q_0)$, $Q(\tau, q_r)$.

Начальные условия при $\tau = \tau_0 = 0$ задаются из следующих соображений. Функция $\psi = \partial x / \partial q$, являющаяся якобианом преобразования, показывает, во сколько раз с течением времени изменяются геометрические размеры исходной области или отдельного шага сетки h по сравнению с начальными при $t = 0$. Если предположить, что переход в расчетное пространство не сопровождается деформацией исходной области, то в начальный момент времени будут выполняться следующие условия:

$$u(\tau_0, q) = u_0, \quad \psi(\tau_0, q) = 1 \quad \text{при} \quad \tau = \tau_0. \quad (2.7)$$

Граничные условия для уравнения (2.4) запишутся в виде

$$\begin{aligned} g_0 \left[\tau, q, u(q), \frac{1}{\psi} \frac{\partial u}{\partial q} \right] &= 0 \quad \text{при} \quad q = q_0, \\ g_r \left[\tau, q, u(q), \frac{1}{\psi} \frac{\partial u}{\partial q} \right] &= 0 \quad \text{при} \quad q = q_r. \end{aligned} \quad (2.8)$$

При формулировке граничных условий для уравнения обратного преобразования (2.5) необходимо учитывать общие для всех видов Q положения, которые состоят в следующем. Всем неподвижным границам соответствует условие $Q(\tau, q) = 0$. Любое другое условие, отличное от нуля ($Q(\tau, q) \neq 0$), характеризует подвижную границу области.

На примере численного решения ряда модельных задач, описывающих процессы нелинейной теплопроводности и конвекции–диффузии, покажем, что в параболических задачах принцип квазистационарности позволяет определять функции преобразования Q , обеспечивающие полную согласованность механизма адаптации сетки с искомым решением.

3. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

В теории теплопроводности (см. [29]) в зависимости от тепловых условий на границе или вида нелинейной зависимости коэффициента теплопроводности $k(u)$ известны различные режимы распространения тепла. Так, было установлено в [30], что степенная зависимость $k(u) = k_0 u^\alpha$, $\alpha > 1$, способствует формированию крутых температурных градиентов, а в случае обращения коэффициента теплопроводности в нуль ($k(u) = 0$) возникают неподвижные или подвижные температурные фронты (см. [31], [32]), распространяющиеся по среде с конечной скоростью (см. [33]) в виде температурных волн.

Воспользовавшись соотношениями (1.4) и подставив их в уравнение (1.1), получим квазилинейное уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad W = -k(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \\ x_0 &< x < x_r, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $-k(u) = k_0 u^\alpha$, k_0 – некоторая постоянная, $\alpha > 1$.

Применив замену переменных общего вида и соотношения (2.1), запишем уравнение (3.1) в переменных (q, τ) :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{Q \partial u}{\psi \partial q} = -\frac{1}{\psi} \frac{\partial W}{\partial q}, \quad W = -\frac{k(u) \partial u}{\psi \partial q}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \psi, \quad (3.3)$$

$$q_0 < q < q_r, \quad \tau > 0.$$

После дискретизации дифференциальной модели уравнение обратного преобразования (3.3) используется для построения сетки.

Применив принцип квазистационарности $du/d\tau = 0$ к уравнению (3.2), определим функцию преобразования Q в виде

$$Q = -\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)^{-1} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{k(u)}{\psi}\right) + \frac{k(u)}{\psi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial q} + \text{Re}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\alpha u^{\alpha-1}}{\psi} \frac{\partial u}{\partial q} + u^\alpha \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{\psi}\right) + \frac{u^\alpha}{\psi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial q} + \text{Re}\right)^{-1}. \quad (3.4)$$

Как уже отмечалось, первое и третье слагаемое в выражении (3.4) оказывают на узлы сетки сжимающее воздействие в области больших градиентов. Второе слагаемое ограничивает сближение двух соседних узлов. Его расталкивающее воздействие резко возрастает в области малых значений ψ , не допуская обращения в нуль функции ψ и тем самым препятствуя пересечению траекторий узлов сетки.

Полученное выражение для функции преобразования Q и эффективность его применения подлежат аналитическому и численному анализу. Покажем, что найденная функция будет оптимальной в смысле качества решения при минимальном числе узлов сетки.

3.1. Дифференциальное приближение разностных схем

При использовании метода конечных разностей численно решается не исходное уравнение в частных производных, а некоторое модифицированное уравнение, называемое дифференциальным приближением разностной схемы (см. [34], [35]). Правая часть этого приближения является погрешностью аппроксимации и равна разности между исходным уравнением в частных производных и его конечно-разностным аналогом. Исследование правых частей дифференциальных приближений позволяет установить преобладающий вклад в погрешность аппроксимации старших производных и связанных с ними таких свойств разностных схем, как диссипация и дисперсия. Известно, что если главный член в выражении для погрешности аппроксимации содержит производные четного порядка, то преобладающими свойствами разностных схем будут диссипативные, а если производные нечетного порядка – то дисперсионные.

В нестационарных системах координат правые части дифференциальных приближений зависят от скорости движения, что позволяет в ряде случаев соответствующим выбором преобразования координат влиять на качество разностных схем.

Введем в дискретном пространстве $\Omega_{q,\tau}$ расчетную сетку

$$\omega_h^{\Delta\tau} = ((q_i, \tau^j); q_{i+1} = q_i + h, \tau^{j+1} = \tau^j + \Delta\tau, i = 0, 1, \dots, N-1, j = 0, 1, \dots, J).$$

и рассмотрим семейство из трех конечно-разностных схем, аппроксимирующих уравнение (3.2) с учетом выполнения условия $du/d\tau = 0$: схема с центральными разностями

$$Q_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - \frac{1}{h} \left(\left(\frac{k}{\Psi} \right)_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \left(\frac{k}{\Psi} \right)_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) = 0; \quad (3.5)$$

схема с конечными разностями вперед

$$Q_i \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{1}{h} \left(\left(\frac{k}{\Psi} \right)_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \left(\frac{k}{\Psi} \right)_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) = 0; \quad (3.6)$$

схема с конечными разностями назад

$$Q_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{1}{h} \left(\left(\frac{k}{\Psi} \right)_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \left(\frac{k}{\Psi} \right)_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) = 0. \quad (3.7)$$

Каждая из выписанных разностных схем представляет собой конечное число алгебраических уравнений для сеточных функций, которые с разной степенью точности аппроксимируют дифференциальное уравнение (3.2). Различия, возникающие между дифференциальной моделью и ее конечно-разностным аналогом, при определенных условиях могут стать значительными и в общем случае требуют дополнительного анализа.

Запишем для разностных схем (3.5)–(3.7) их дифференциальные приближения. Для получения дифференциальных приближений воспользуемся стандартной процедурой разложения сеточных функций в окрестности точки (i) в ряд Тейлора. Выполнив несложные, но громоздкие преобразования, запишем дифференциальные приближения для разностных схем (3.5)–(3.7), различающиеся между собой лишь коэффициентами в правых частях:

$$Q \frac{\partial u}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{k(u) \partial u}{\psi} \right) = \delta_n \frac{\partial u}{\partial q} + \alpha_n \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \beta_n \frac{\partial^3 u}{\partial q^3} + \gamma_n \frac{\partial^4 u}{\partial q^4}, \quad n = 1, 2, 3. \quad (3.8)$$

Для схемы с центральными разностями ($n = 1$)

$$\delta_1 = \frac{h^2}{24} \frac{\partial^3}{\partial q^3} \left(\frac{k(u)}{\psi} \right), \quad \alpha_1 = \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left(\frac{k(u)}{\psi} \right), \quad \beta_1 = -\frac{h^2}{6} \left(Q - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{k(u)}{\psi} \right) \right), \quad \gamma_1 = \frac{h^2}{12} \frac{k(u)}{\psi}.$$

Для схем с разностями вперед ($n = 2$, см. (3.6)) и назад ($n = 3$, см. (3.7)) дифференциальные приближения различаются только знаками в правых частях:

$$\delta_{2,3} = \delta_1, \quad \alpha_{2,3} = \alpha_0 + \alpha_1, \quad \alpha_0 = \mp \frac{h}{2} Q, \quad \beta_{2,3} = \beta_1, \quad \gamma_{2,3} = \gamma_1.$$

В этих выражениях индекс 2 соответствует уравнению для схемы (3.6), а индекс 3 – дифференциальному приближению для схемы (3.7). Верхний знак в коэффициентах $\delta_{2,3}$ и $\alpha_{2,3}$ относится к первому индексу, а нижний – ко второму.

Проанализируем коэффициенты, стоящие перед производными в правой части дифференциальных приближений. Наиболее существенную роль из рассматриваемых коэффициентов играет коэффициент β , стоящий перед третьей производной и определяющий величину дисперсии соответствующей разностной схемы. Для всего семейства разностных схем коэффициент β имеет один и тот же вид. Его можно легко обратить в нуль, задав функцию Q в виде

$$Q = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{k(u)}{\psi} \right) = \frac{\alpha u^{\alpha-1} \partial u}{\psi} + u^\alpha \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\psi} \right). \quad (3.9)$$

Выражение (3.9) содержит на одно слагаемое меньше, чем выражение (3.4), и позволяет полностью избавиться от внутренней дисперсии разностных схем. Особенность остальных коэффициентов проявляется в их зависимости от нелинейного коэффициента теплопроводности $k(u)$. Большие градиенты решения возникают в окрестности точек, где $k(u) \rightarrow 0$. Однако, в силу зависимости коэффициентов δ , α , γ от $k(u)$, их значения также стремятся к нулю, уменьшая диссипативные свойства и устремляя к нулю погрешность аппроксимации в целом. Стремление к нулю погрешности аппроксимации повышает качество разностных схем в областях сильного изменения решения. В областях больших значений коэффициента теплопроводности $k(u)$ решение не содержит резких перепадов и влияние погрешности аппроксимации не играет особой роли.

3.2. Численный анализ

Рассмотрим формирование двух неподвижных температурных фронтов на примере модельной задачи теплопроводности с краевыми условиями I рода.

Для этого квазилинейное уравнение теплопроводности (3.1) дополним начальным условием в виде положительной синусоидальной полуволны

$$u^0(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad (3.10)$$

и однородными граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0. \quad (3.11)$$

Задачу нелинейной теплопроводности (3.1), (3.10), (3.11) представим в переменных (q, τ) , записав квазилинейное уравнение теплопроводности (3.2) в дивергентном виде:

$$\frac{\partial(\psi u)}{\partial \tau} + \frac{\partial(Qu)}{\partial q} = -\frac{\partial W}{\partial q}, \quad W = -\frac{k(u)\partial u}{\psi \partial q}, \quad k(u) = k_0 u^\alpha, \quad \alpha > 1, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \psi, \quad 0 < q < 1, \quad \tau > 0, \quad (3.13)$$

$$u^0(q, 0) = \sin(\pi q), \quad \psi(q, 0) = 1, \quad \tau = 0, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} u(0, \tau) = 0, \quad Q(0, \tau) = 0, \quad q = 0, \\ u(1, \tau) = 0, \quad Q(1, \tau) = 0, \quad q = 1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

В расчетном пространстве $\Omega_{q, \tau}$ введем расчетную сетку $\omega_h^{\Delta \tau}$, в которой для удобства используются узлы с целыми и полуцелыми индексами:

$$\omega_h^{\Delta \tau} = \{(q_i, \tau^j), (q_{i+1/2}, \tau^j)\}:$$

$$q_{i+1} = q_i + h, \quad q_{i+1/2} = q_i + 0.5h, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad \tau^{j+1} = \tau^j + \Delta \tau^j, \quad j = 0, 1, \dots, J\}.$$

К целым узлам будем относить функции x_i^j, u_i^j, Q_i^j , к полуцелым $(q_{i+1/2}^j, \tau^j)$ – сеточные функции $\psi_{i+1/2}^j, W_{i+1/2}^j$. Используя введенную сетку, выпишем для системы уравнений (3.12), (3.13) семейство консервативных разностных схем (см. [36]):

$$\begin{aligned} (\psi \cdot u)_i^{j+1} &= (\psi \cdot u)_i^j - \frac{\Delta \tau^j}{h} \{ (1 - \sigma) [W_{i+1/2} - W_{i-1/2} + (u \cdot Q)_{i+1/2} - (u \cdot Q)_{i-1/2}]^j + \\ &\quad + \sigma [W_{i+1/2} - W_{i-1/2} + (u \cdot Q)_{i+1/2} - (u \cdot Q)_{i-1/2}]^{j+1} \} \\ (\psi)_{i+1/2}^{j+1} &= (\psi)_{i+1/2}^j - \frac{\Delta \tau^j}{h} ((1 - \sigma) [Q_{i+1} - Q_i]^j + \sigma [Q_{i+1} - Q_i]^{j+1}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$W_{i+1/2} = -\left(\frac{u^\alpha}{\psi}\right)_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad x_{i+1} = h\psi_{i+1/2}.$$

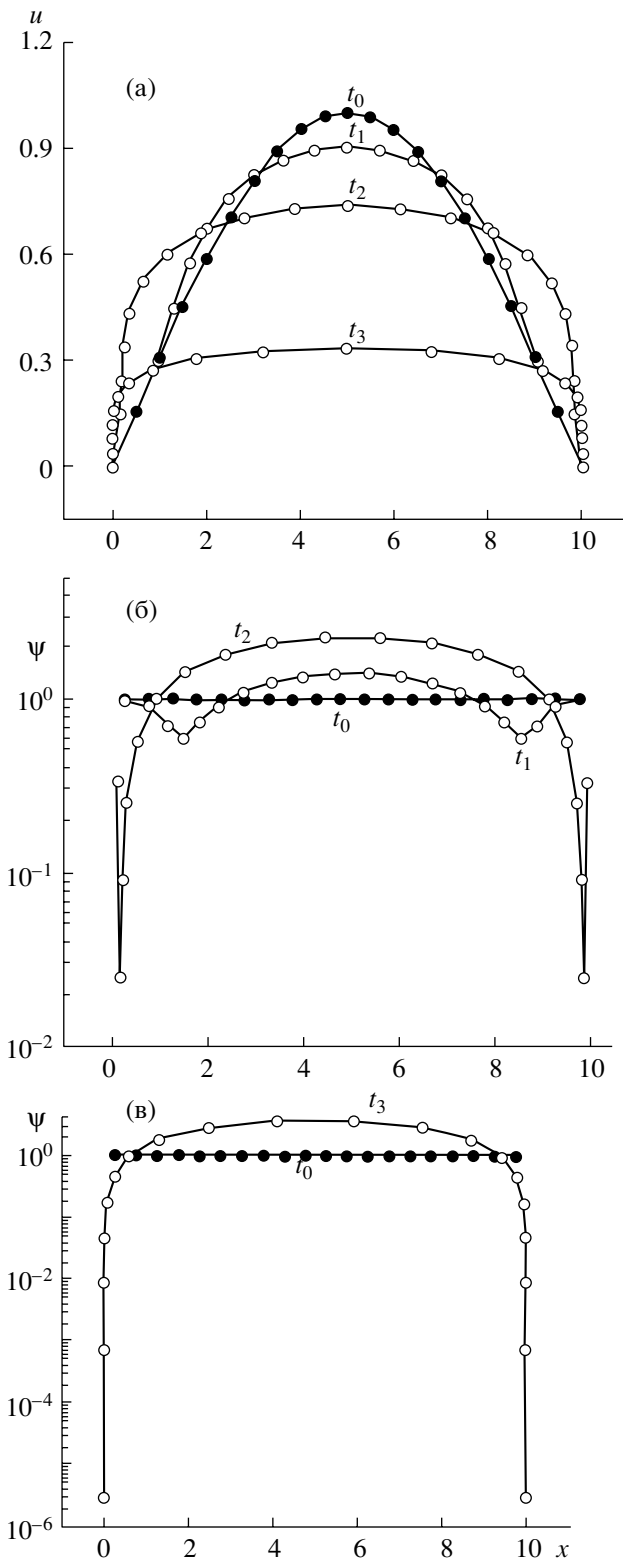
$$Q_i = \left[\left(\frac{\alpha u^{\alpha-1}}{\psi}\right) \frac{1}{h} (u_{i+1/2} - u_{i-1/2}) + \frac{u_i^\alpha}{h} \left(\frac{1}{\psi_{i+1/2}} - \frac{1}{\psi_{i-1/2}} \right) \right], \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Семейство схем (3.16) аппроксимирует дифференциальную систему с порядком $O(\Delta \tau + h^2)$ при $\sigma \geq 0, 1$ и $O(\Delta \tau^2 + h^2)$ при $\sigma = 0.5$. В качестве управляющей функции использовалась функция преобразования Q , определяемая из дифференциального приближения (3.9).

Система нелинейных разностных уравнений (3.16) линеаризовывалась с помощью итерационного метода Ньютона. На каждой итерации система линейных алгебраических уравнений решалась методом матричной прогонки. Шаг интегрирования $\Delta \tau^j$ выбирался автоматически, исходя из заданной точности и максимального числа итераций.

Решение дифференциальной задачи (3.12)–(3.15) на сетке с $N = 20$ и $\alpha = 5$ представлено на фиг. 3 в виде кривых $u(t, x), \psi(t, x)$, характеризующих пространственно-временное распределение безразмерных температуры и пространственного шага сетки. Количество и положение узлов на всех графиках отмечены точками (начальные распределения $u(t_0, x), \psi(t_0, x)$ при $t = t_0$); светлые кружочки – все остальные кривые, рассчитанные на различные моменты времени t_1, t_2, t_3 .

Кривые на фиг. 1 характеризуют динамику формирования неподвижных температурных фронтов вблизи левой и правой границ и связанное с ними перераспределение узлов сетки. С течением времени под влиянием нелинейной теплопроводности из центра области в направлении обеих границ выходят большие тепловые потоки, под влиянием которых центр становится все более плоским, а вблизи границ начинают формироваться области больших градиентов (кривые t_1-t_3 на фиг. 1а). Сетка реагирует на появление градиентов сгущением узлов в области их наибольших значений и увеличением безразмерного шага $\psi(t, x)$ в центре области, где градиенты ре-



Фиг. 1.

шения невелики (кривые t_1, t_2 на фиг. 1б, 1в). Формирование температурных фронтов заканчивается после того, как максимальные градиенты выходят на границы области. Кривая $\psi(t_3, x)$ приобретает такую же форму, как и $u(t_3, x)$, и в дальнейшем остается неизменной. И если в начале процесса максимальный шаг отличался от минимального в несколько раз, то к моменту формирования фронтов это отличие достигает пяти порядков (кривая $\psi(t_3, x)$ на фиг. 1в). Динамику сетки удобно характеризовать с помощью траектории движения узлов (см. фиг. 2). В области каждого из фронтов концентрируется всего по 4 узла, что свидетельствует об избыточности общего количества узлов сетки. Как показали расчеты, без особого ущерба для точности общее количество узлов можно сократить вдвое.

На фиг. 3 представлены результаты расчета той же задачи на адаптирующейся сетке с общим числом узлов $N = 11$. Отметим, что для достижения той же точности на сетке с фиксированными узлами число их должно составлять ~ 500 .

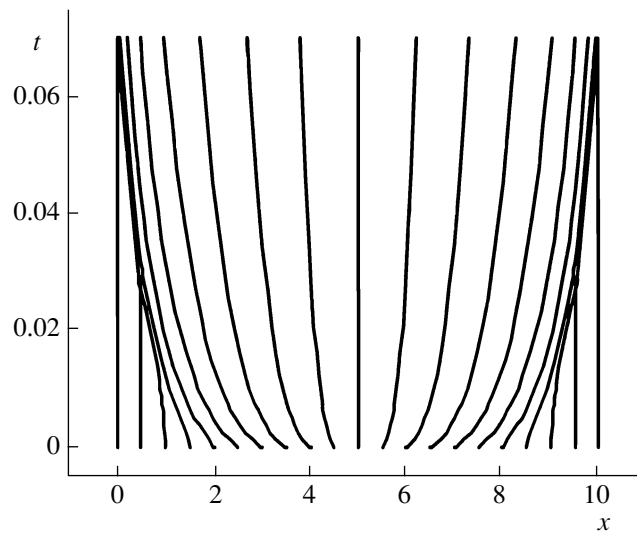
Влияние степени нелинейности теплопроводности проявляется в том, что центр области с ростом значений α становится более плоским, а фронты все более крутыми. Соответственно, увеличиваются пространственные шаги в центре области и еще сильнее уменьшаются в области фронта. На фиг. 4 представлены пространственные профили температуры $u(x)$ и безразмерного шага $\psi(x)$, рассчитанные на сетке с 10 узлами для $\alpha = 10$ на моменты времени t_0, t_1, t_2, t_3 . К моменту t_3 температурные фронты уже полностью сформировались. При этом в области фронта безразмерный шаг уменьшился на ~ 5 порядков, в центре увеличился в ~ 4 раза.

3.3. Распространение температурных волн

Квазилинейное уравнение (3.1) с коэффициентом теплопроводности в виде степенной функции допускает решения, производные которых обращаются в бесконечность в точках, где $u(x, t)$ обращается в нуль, а тепловой поток $W(x, t)$ непрерывен, т.е. $W = k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$.

В нелинейных ситуациях подобные соотношения приводят к возникновению фронта температуры, распространяющегося с конеч-

ной скоростью в виде температурной волны. Уравнение теплопроводности (3.1), дополненное начальными и граничными условиями вида



Фиг. 2.

$$u^0(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad u(0, t) = f(t), \quad u(\infty, t) = 0, \quad (3.17)$$

допускает аналитическое решение в виде бегущей волны:

$$u(x, t) = \begin{cases} (\alpha D)^{1/\alpha} \{ [D(t-x)]^{1/\alpha} \}, & x < Dt, \\ 0, & x \geq Dt, \end{cases} \quad (3.18)$$

где α, D – положительные константы.

С математической точки зрения температурная волна представляет собой распространение слабого разрыва. Численные расчеты температурных волн без выделения слабого (см. [16], [31]) разрыва показали, что в области фронта возникает неустранимая погрешность, минимизация которой требует применения расчетных сеток с мелким шагом. Ситуация коренным образом изменяется с применением динамической адаптации, в которой переход к произвольной нестационарной системе координат позволяет естественным образом выделять слабый разрыв, представляя исходную задачу в виде задачи со свободной границей. Выделение слабого разрыва позволяет получить численное решение со сколь угодно малой погрешностью при минимальном числе узлов сетки (см. [18], [37]).

Для выделения слабого разрыва используется условие непрерывности потока $W(x_\Gamma(t), t) = 0$, где x_Γ – точка слабого разрыва. В силу непрерывности потока W в точке $x = x_\Gamma$, записывается равенство потоков слева и справа: $W^-(x_\Gamma(t), t) = -W^+(x_\Gamma(t), t)$. Представляя потоки $W^-(x_\Gamma(t), t)$ и $W^+(x_\Gamma(t), t)$ в виде $W^-(x_\Gamma(t), t) = v(x_\Gamma(t), t)u(x_\Gamma(t), t)$ и $W^+ = -k(u) \frac{\partial u}{\partial x}$, условие для скорости распространения разрыва запишем в виде

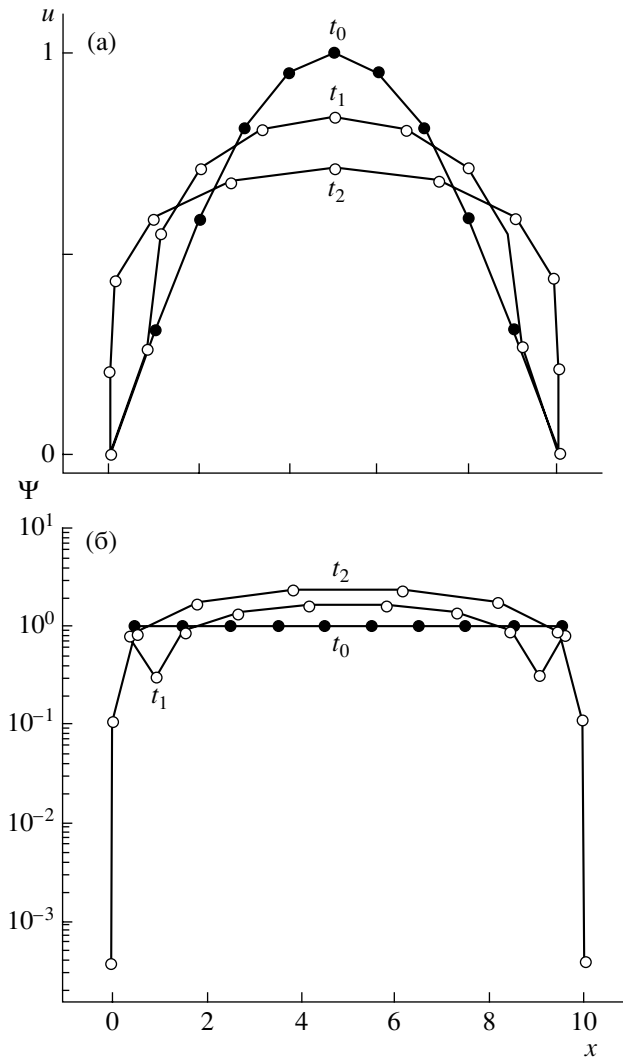
$$v(x_\Gamma(t), t) = - \lim_{x \rightarrow x_\Gamma(t)} \frac{W^+(x, t)}{u(x, t)} = \lim_{x \rightarrow x_\Gamma(t)} \frac{k(u(x, t)) \partial u}{u(x, t) \partial x}. \quad (3.19)$$

Кроме (3.19), в точке разрыва выполняется второе условие:

$$u(x_\Gamma(t), t) = 0. \quad (3.20)$$

Для представления исходной задачи в виде задачи со свободной границей достаточно совместить точку слабого разрыва с одной из границ отрезка и в качестве граничных условий для уравнения (3.1) использовать соотношения (3.19), (3.20).

В переменных (q, τ) задача о распространении температурных волн формулируется следующим образом. Нелинейная дифференциальная система (3.12), (3.13) дополнялась следующими



Фиг. 3.

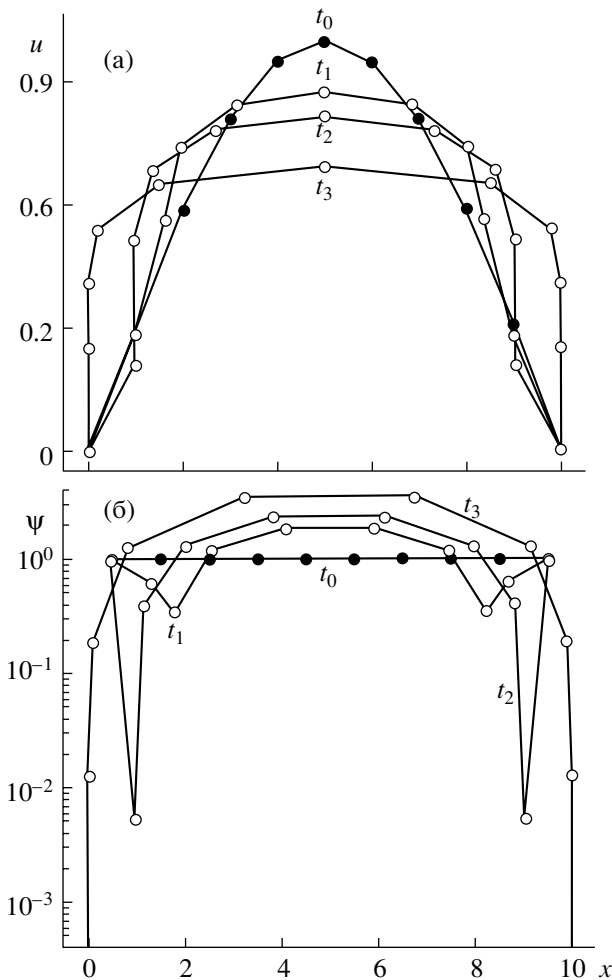
краевыми условиями:

$$\begin{aligned}
 \tau = 0: & \begin{cases} u^0(0, q) = 0, \\ \psi^0(0, q) = 1, \end{cases} & q = 0: & \begin{cases} u(\tau, 0) = f(\tau), \\ Q(\tau, 0) = 0, \end{cases} \\
 q = q_\Gamma: & \begin{cases} u(\tau, q_\Gamma) = 0, \\ Q(\tau, q_\Gamma) = -v(\tau, q_\Gamma) = -\frac{1}{\psi} \frac{k(u(\tau, q_\Gamma)) \partial u}{u(\tau, q_\Gamma) \partial q} = -\frac{u^{\alpha-1}(\tau, q_\Gamma) \partial u}{\psi \partial q}. \end{cases} & & (3.21)
 \end{aligned}$$

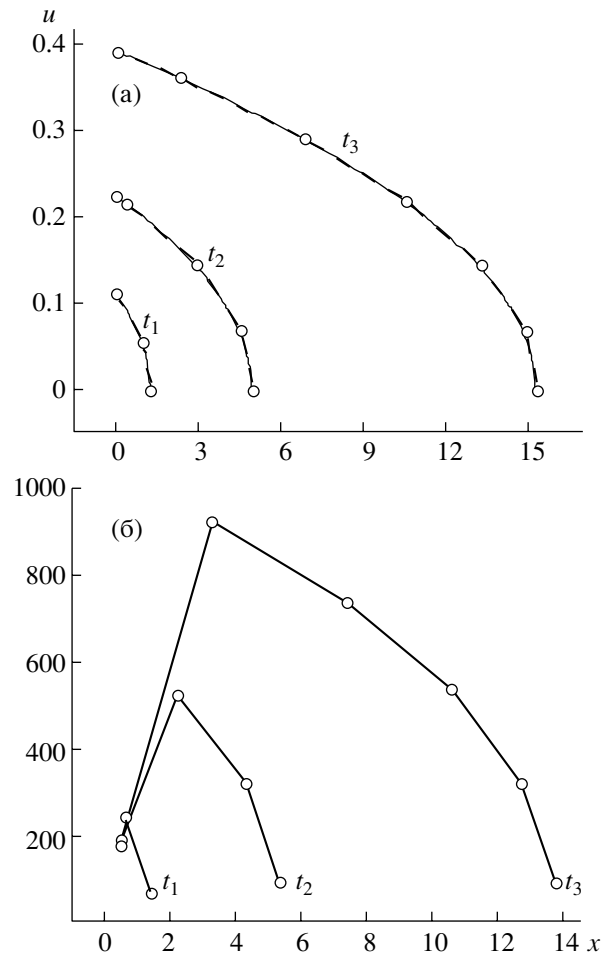
В расчетах использовались следующие величины:

$$f(\tau) = (D\alpha)^{1/\alpha} (D\tau)^{1/\alpha}, \quad D = 1, \quad \alpha = 2, 10.$$

Для моделирования использовалось семейство разностных схем (3.16). Основное отличие от ранее проводившихся расчетов (см. [18], [37]) состоит в том, что в данном анализе управляющая функция Q не содержит подгоночных параметров, поскольку для ее определения использовался принцип квазистационарности. Отсутствие подгоночных параметров в первую очередь сказывается на точности расчетов и связанного с ней количества узлов сетки.



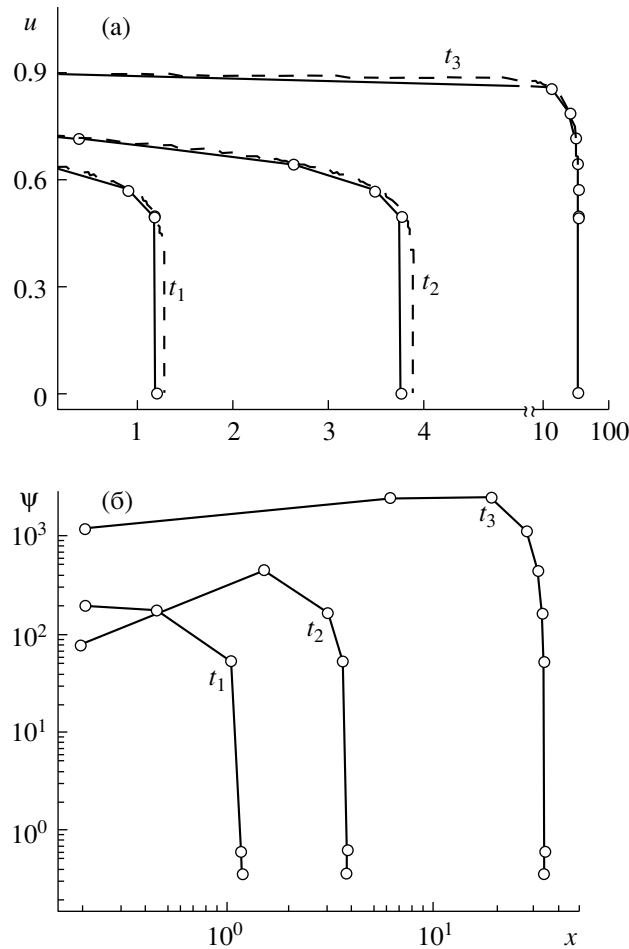
Фиг. 4.



Фиг. 5.

Применение функции Q в виде (3.9) позволило по сравнению с результатами работ [18], [37] существенно повысить точность расчетов при одновременном уменьшении в несколько раз числа узлов. Точность определялась посредством сравнения аналитического решения с численным. Погрешность численного решения зависит от степени нелинейности коэффициента теплопроводности $k(u)$. С увеличением значения параметра α возрастают степень нелинейности, крутизна фронта и погрешность численного решения. Для $\alpha = 2$ кривые аналитического (штриховые линии) и численного (сплошные линии) решения полностью совпадают, см. фиг. 5. Некоторое расхождение между решениями становится заметным при $\alpha \geq 10$, фиг. 6. Во всех расчетах количество используемых узлов не превышало $N \leq 10$. Столь малого количества узлов оказалось достаточно, несмотря на то, что распространение волны в задаче со свободной границей приводит к увеличению области определения на несколько порядков. Однако мелкий пространственный шаг требуется лишь для узкой области вблизи фронта. В остальной области пространственные градиенты решения невелики, поэтому для получения решения с высокой точностью достаточно сконцентрировать несколько узлов в окрестности точки слабого разрыва. Различие пространственных шагов может достигать нескольких порядков, что наглядно отображается на кривых $\psi(x)$. Так, на фиг. 6б отношение ψ_{\max}/ψ_{\min} достигает $\sim 10^4$.

Вторая особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что она относится к классу задач, где особенно эффективны расчеты на сетках с переменным числом узлов. Поскольку за счет подвижности одной или нескольких границ область решения может многократно увеличиваться, то нецелесообразно в начале расчетов, пока размеры области малы, использовать большое число узлов. В рассматриваемых примерах в качестве исходной сетки использовалась сетка с мини-



Фиг. 6.

мальным количеством узлов $N = 3$. Затем по мере увеличения пространственной области вблизи левой границы вводились новые узлы (см. фиг. 5, 6).

Таким образом, результаты расчетов свидетельствуют о высокой эффективности динамической адаптации в задачах нелинейной теплопроводности.

Согласно анализу дифференциального приближения и численного решения, динамическая адаптация, основанная на принципе квазистационарности, существенно повышает качество разностных схем. Согласованное с решением сгущение сетки в зоне больших градиентов приводит к уменьшению схемной вязкости и практически полному устранению дисперсии разностных схем.

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ (БАКЛИ–ЛЕВЕРЕТТА, БЮРГЕРСА)

Использование в (1.1) соотношений (1.6) приводит к нелинейному уравнению Бакли–Леверетта параболического типа, лежащего в основе модельной задачи о движении двухфазной несмешивающейся жидкости (например, нефть–вода) в пористой среде, описывающей процессы конвективного переноса и диффузии.

Применение соотношений (1.5) превращает уравнение (1.1) в полное нелинейное уравнение Бюргера, являющееся модельным для уравнений пограничного слоя, параболизированных уравнений Навье–Стокса и полных уравнений Навье–Стокса (см. [38]).

4.1. Постановка задачи

Оба уравнения имеют одинаковую структуру и отличаются только видом нелинейного оператора $P(u)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P(u)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (4.1)$$

$$x_0 < x < \infty, \quad t > 0,$$

где $P(u) = \frac{u^2}{u^2 + \alpha(1-u)^2}$ для уравнения Бакли–Левретта и $P(u) = \frac{u^2}{2}$ для уравнения Бюргерса,

$\mu \sim \text{Re}^{-1} \ll 1$ (малый параметр при старшей производной) в уравнении Бакли–Левретта имеет смысл диффузии, а в уравнении Бюргерса – смысл вязкости. Из-за наличия малого параметра при старшей производной оба уравнения относятся к классу сингулярно возмущенных уравнений, численное решение которых затруднено возникновением при соответствующем выборе краевых условий областей сильного изменения решения. Разностные схемы, используемые для решения уравнений конвекции–диффузии, при конвективном преобладании, как правило, обладают сильной дисперсией, приводящей к паразитным осцилляциям при скачкообразном изменении решения. Покажем эффективность применения динамической адаптации для решения данного класса уравнений.

Воспользовавшись заменой переменных общего вида и соотношениями (2.1), запишем уравнение (4.1) в переменных (q, τ) :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{Q \partial u}{\Psi \partial q} + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial P(u)}{\partial q} = \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial u}{\partial q} \right), \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \Psi = \frac{\partial x}{\partial q}, \quad (4.3)$$

$$q_0 < q < q_R, \quad \tau > 0.$$

Из условия квазистационарности $du/d\tau = 0$ получим уравнение, из которого определяется функции Q :

$$Q \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial P(u)}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\mu \partial u}{\Psi \partial q} \right) = 0, \quad (4.4)$$

$$Q = - \left(\frac{\partial P(u)}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\mu}{\Psi} \right) - \frac{\mu \partial^2 u}{\Psi \partial q^2} \frac{\partial u}{\partial q} \right) \quad (4.5)$$

где $\frac{\partial P(u)}{\partial u}$ для уравнений Бакли–Левретта и Бюргерса имеют, соответственно, вид

$$\frac{\partial P(u)}{\partial u} = \frac{2\alpha u(1-u)}{[u^2 + \alpha(1-u)^2]^2}, \quad \frac{\partial P(u)}{\partial u} = u.$$

4.2. Анализ дифференциального приближения

В дискретном пространстве $\omega_h^{\Delta \tau}$ рассмотрим семейство пятиточечных схем для стационарного уравнения (4.4), аналитическое исследование качества которых значительно упрощается по сравнению с разностными схемами для нестационарного уравнения (4.2): схема с центральными разностями

$$Q_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + \frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{2h} - \frac{1}{h} \left(\frac{\mu}{\Psi_{i+1/2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{\mu}{\Psi_{i-1/2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) = 0; \quad (4.6)$$

схема с конечными разностями вперед

$$Q_i \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \frac{P_{i+1} - P_i}{h} - \frac{1}{h} \left(\frac{\mu}{\Psi_{i+1/2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{\mu}{\Psi_{i-1/2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) = 0; \quad (4.7)$$

схема с конечными разностями назад

$$Q_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + \frac{P_i - P_{i-1}}{h} - \frac{1}{h} \left(\frac{\mu}{\Psi_{i+1/2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{\mu}{\Psi_{i-1/2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) = 0. \quad (4.8)$$

Запишем для каждой разностной схемы (4.6)–(4.8) ее дифференциальные приближения различающиеся между собой лишь коэффициентами в правых частях:

$$Q \frac{\partial u}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{k(u) \partial u}{\Psi \partial q} \right) = \delta_n \frac{\partial u}{\partial q} + \alpha_n \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \beta_n \frac{\partial^3 u}{\partial q^3} + \gamma_n \frac{\partial^4 u}{\partial q^4}, \quad n = 1, 2, 3. \quad (4.9)$$

Для схемы (4.6) с центральными разностями ($n = 1$)

$$\delta_1 = -\frac{h^2}{24} \left(\left(4 \frac{\partial^3 P}{\partial u^3} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 - \frac{\partial^3}{\partial q^3} \left(\frac{\mu}{\Psi} \right) \right), \quad \alpha_1 = -\frac{h^2}{8} \left(4 \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial q} - \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left(\frac{\mu}{\Psi} \right) \right),$$

$$\beta_1 = -\frac{h^2}{6} \left(Q + \frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\mu}{\Psi} \right) \right), \quad \gamma_1 = \frac{h^2 \mu}{12 \Psi};$$

для схем с разностями вперед (4.7) ($n = 2$) и назад (4.8) ($n = 3$) дифференциальные приближения различаются только знаками в правых частях:

$$Q \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial P(u)}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q} \frac{\mu \partial u}{\Psi \partial q} = \delta_{2,3} \frac{\partial u}{\partial q} + \alpha_{2,3} \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \beta_{2,3} \frac{\partial^3 u}{\partial q^3} + \gamma_{2,3} \frac{\partial^4 u}{\partial q^4}, \quad (4.10)$$

где $\delta_{2,3} = \delta_1 + \delta_0$, $\alpha_{2,3} = \alpha_0 + \alpha_1$, $\beta_{2,3} = \beta_1$, $\gamma_{2,3} = \gamma_1$.

$$\delta_0 = \mp \frac{h}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial q}, \quad \alpha_0 = \mp \frac{h}{2} \left(Q + \frac{\partial P}{\partial u} \right),$$

В этих выражениях индекс 2 соответствует уравнению для схемы (4.7), а индекс 3 – дифференциальному приближению для схемы (4.8). Верхний знак в коэффициентах $\delta_{2,3}$ и $\alpha_{2,3}$ относится к первому индексу, а нижний – ко второму.

Проанализируем коэффициенты α и β , стоящие перед второй и третьей производными и характеризующие, соответственно, диссипацию и дисперсию разностных схем. Оба коэффициента зависят от параметров адаптации, что предопределяет зависимость диссипации и дисперсии разностных схем от способа адаптации и соответствующим выбором управляющей функции Q могут быть изменены в нужную сторону. Коэффициент β имеет один и тот же вид для всех семейств разностных схем и обращается в нуль, если функцию Q взять в виде

$$Q = - \left(\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\mu}{\Psi} \right) \right). \quad (4.11)$$

Выражение (4.11) содержит на одно слагаемое меньше, чем выражение (4.3), и позволяет полностью избавиться от внутренней дисперсии разностных схем.

Из трех разностных схем наименьшую диссипацию имеет схема с центральными разностями (4.6). В соответствующем ей дифференциальном приближении (4.9) коэффициент перед диссипативным членом α_1 пропорционален h^2 . С учетом выбора функции Q в виде (4.11), разностная схема (4.6) по формальным признакам обладает наиболее высокими качествами: малой схемной вязкостью и отсутствием дисперсии. В разностных схемах 2-го порядка с фиксированными узлами для уравнений конвекции–диффузии малость диссипации играет отрицательную роль, так как из-за нескомпенсированности дисперсионной составляющей недостаточно большая схемная вязкость не в состоянии подавлять паразитные колебания решения. В схемах (4.7), (4.8) первого порядка $O(h)$ диссипативная составляющая пропорциональна h , $\alpha_{2,3} \approx h$. Однако и в этих случаях схемная вязкость не будет большой и не будет играть столь значительную роль, как в схемах с

фиксированными узлами. Коэффициенты α_2 и α_3 в уравнении (4.10) представляют собой сумму, состоящую из $\alpha_1 \sim h^2$ и некоторой добавки $\alpha_0 = \mp \frac{h}{2} \left(Q + \frac{\partial P}{\partial u} \right)$, зависящей от функции преобразования Q . В случае задания Q согласно (4.11), т.е. пропорционально коэффициенту диффузии/вязкости μ , имеем

$$\alpha_0 = \mp \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\mu}{\Psi} \right).$$

В наиболее интересных случаях, когда значение μ очень мало, добавка α_0 будет исчезающе мала и разностные схемы (4.7), (4.8) по своим качествам будут аналогичны схемам (4.6). При больших значениях μ схемная вязкость не играет заметной роли, так как большая физическая диффузия/вязкость препятствует формированию крутых градиентов решения.

Таким образом, анализ дифференциального приближения свидетельствует о том, что, как и в задачах нелинейной теплопроводности. Динамическая адаптация существенно повышает качество разностных схем. Согласованное с решением сгущение сетки в зоне больших градиентов приводит к уменьшению схемной вязкости и практически к полному устранению дисперсии разностных схем.

Дифференциальное приближение может также использоваться для определения оптимальной функции преобразования Q , так как показывает результаты, близкие к тем, что получены из принципа квазистационарности.

4.3. Численное решение модельных задач

Рассмотрим две типичные постановки задач конвекции–диффузии, использующих уравнения Бакли–Леверетта (см. [39]) и Бюргера (см. [40]).

4.3.1. Уравнение Бакли–Леверетта. Введем обозначение $W(u) = P(u) - \mu \frac{\partial u}{\partial x}$ и запишем уравнение Бакли–Леверетта в переменных (q, τ) в дивергентном виде:

$$\frac{\partial(\Psi u)}{\partial t} = - \frac{\partial(Q \cdot u)}{\partial q} - \frac{\partial W}{\partial q}, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial q}, \quad q_0 < q < q_\infty, \quad \tau > 0, \quad (4.13)$$

где

$$P(u) = \frac{u^2}{u^2 + \alpha(1-u)^2}, \quad Q(u) = - \left\{ \frac{2\alpha u(1-u)}{[u^2 + \alpha(1-u)^2]^2} - \frac{\mu}{\Psi} \frac{\partial u}{\partial q} \right\},$$

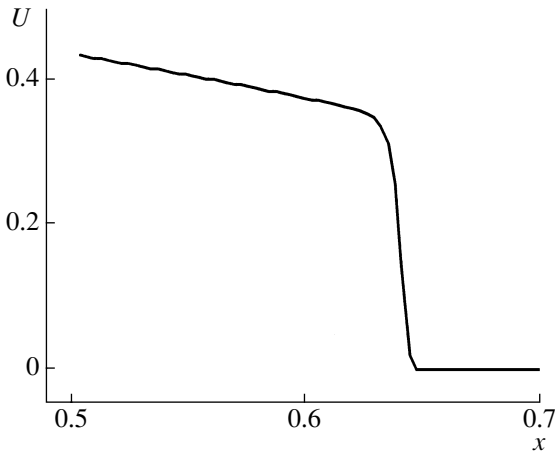
с начальными и граничными условиями

$$\tau = 0: \begin{cases} u(0, q) = u^0(q), \\ \Psi(0, q) = \Psi^0(q), \end{cases} \quad q = 0: \begin{cases} u(\tau, 0) = g_0(\tau), \\ Q(\tau, 0) = 0, \end{cases} \quad q = \infty: \begin{cases} u(\tau, \infty) = g_\infty(\tau), \\ Q(\tau, \infty) = 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

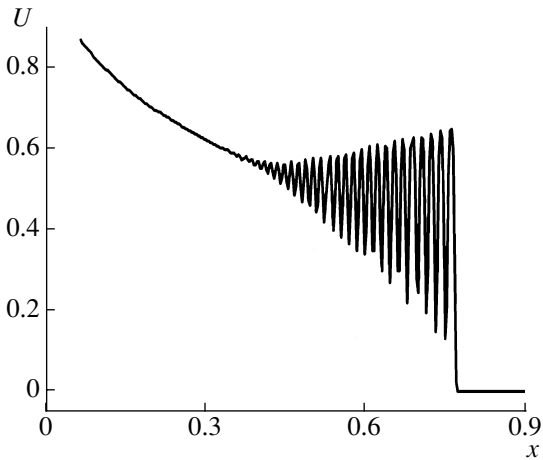
где u – функция, характеризующая насыщенность жидкостью, μ имеет смысл коэффициента диффузии, α – параметр, характеризующий отношение подвижности одной жидкости относительно другой, $u^0(q)$, $\Psi^0(q)$, $g_0(\tau)$, $g_\infty(\tau)$ – известные функции.

Представление уравнения Бакли–Леверетта в виде (4.12) позволяет для численного решения воспользоваться семейством неявных консервативных разностных схем (3.16). Величины $Q(u)$, $W(u)$ аппроксимируются при этом конечно-разностными соотношениями

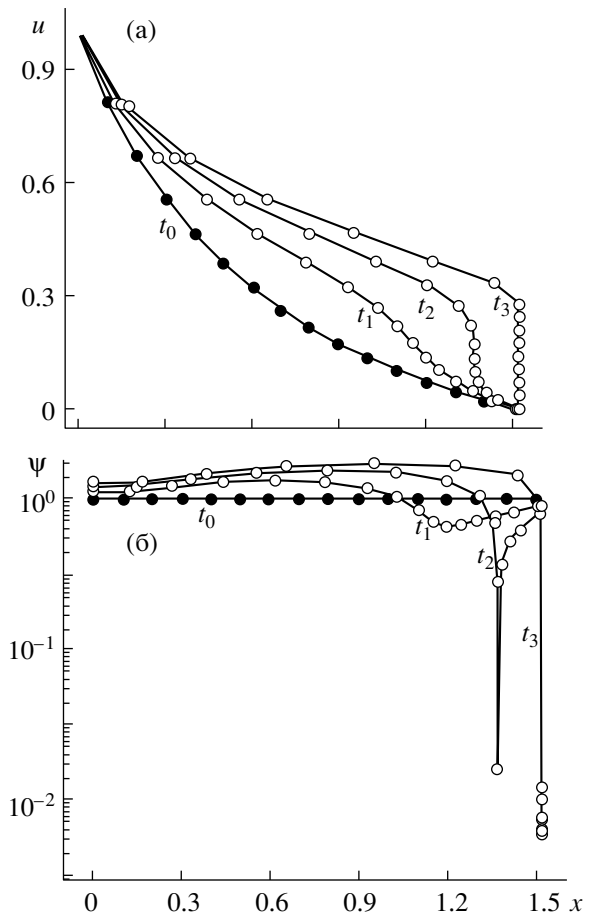
$$W_{i+1/2} = \left(\frac{u^2}{(u^2 + \alpha(1-u)^2)} \right)_{i+1/2} - \left(\frac{\mu}{\Psi} \right)_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad (4.15)$$



Фиг. 7.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

$$Q_i = - \left[\left(\frac{2\alpha u(1-u)}{[u^2 + \alpha(1-u)^2]^2} \right)_i - \frac{\mu}{h} \left(\frac{1}{\psi_{i+1/2}} - \frac{1}{\psi_{i-1/2}} \right) \right]. \quad (4.16)$$

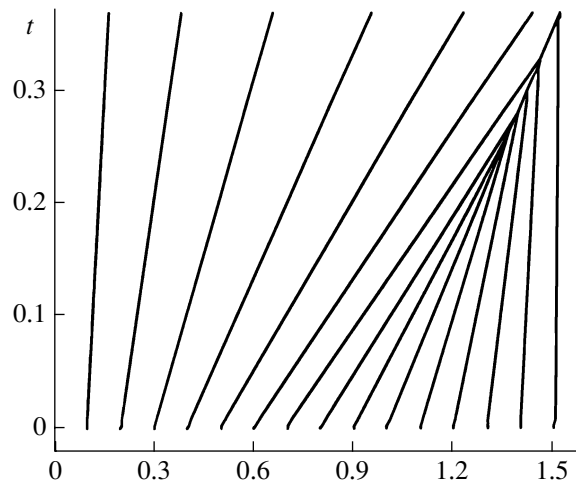
Расчетах использовались следующие значения функций и параметров:

$$u^0(q) = e^{-10q}, \quad \psi^0(q) = 1, \quad g_0(\tau) = 1, \quad g_\infty(\tau) = 0, \quad \mu = 10^{-5}, \quad \alpha = 0.25, 2.5. \quad (4.17)$$

4.3.2. Результаты моделирования. Вначале для сравнения производились расчеты уравнения (4.1) с условиями (4.17) на сетке с фиксированными узлами с общим количеством $N = 500$. Результаты расчетов при использовании разностных схем 1-го $O(\Delta\tau + h^2)$ и 2-го $O(\Delta\tau^2 + h^2)$ порядка представлены на фиг. 7, 8. Схемы 1-го порядка дают сильно сглаженное в области фронта решение, фиг. 7, а схемы 2-го порядка из-за сильной дисперсии теряют качество решения (фиг. 8).

Применение динамически адаптирующихся сеток для решения задачи (4.12)–(4.14), (4.17) с помощью разностных схем (3.16), (4.15), (4.16) 1-го и 2-го порядков позволяет получать решения, свободные от разглаживания и паразитных осцилляций на 10–20 узлах. На фиг. 9 представлены пространственные распределения функции $u(x)$ и безразмерного шага $\psi(x)$ на различные моменты времени, рассчитанные при значениях $\alpha = 0.25, \mu = 10^{-5}$ и $N = 16$.

Сильная нелинейность уравнения совместно с медленной диффузией способствуют формированию больших градиентов внутри области, под влиянием которых происходит перераспределение узлов сетки. За короткое время пространственный шаг в области формирования нелинейного фронта уменьшается на 3 порядка, а в области медленного изменения решения увеличивается



Фиг. 10.

в ~ 25 раз. Динамика узлов сетки характеризуется их траекториями (фиг. 10). Из общего числа узлов $N = 16$ на фронте концентрируется 9.

Коэффициент α является параметром нелинейности, и от его величины зависят место и время образования фронта. При $\alpha = 0$ уравнение (4.1) превращается в линейное, фронт решения не образуется и узлы сетки остаются неподвижными. Увеличение параметра α приводит к сдвигу влево области формирования нелинейного фронта и увеличению его амплитуды. Соответственно, на фронте концентрируется больше узлов. Динамика решения и узлов сетки при $\alpha = 2.5$ показана на фиг. 11.

4.3.3. Уравнение Бюргера. Полное уравнение Бюргера моделирует поведение нелинейных волн, типичные решения которых содержат один или несколько крутых фронтов. Сложности численного решения модельных задач Бюргера хорошо известны (см. [39], [40]).

Уравнение Бюргера в переменных (x, t) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2/2)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x_0 < x < x_\infty, \quad t > 0. \quad (4.18)$$

Рассмотрим типичную постановку задачи, в которой решение уравнения Бюргера из-за малой физической вязкости $\mu = 10^{-5}$ стремится к разрывному. Специальным выбором начального пространственного профиля $u^0(x)$ квазиразрывное решение возникает в середине области и на границе.

Начальное распределение $u(x, 0)$ представлялось в виде двух положительных полувольт синусоиды:

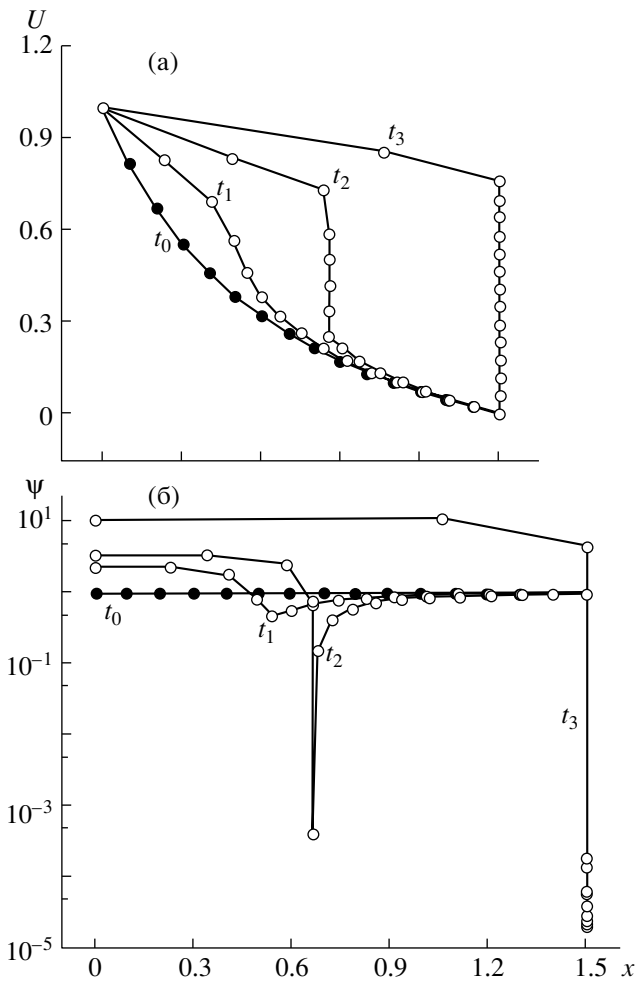
$$u(x, 0) = u^0(x) = \begin{cases} |\sin(2\pi x/x_R)|, & 0 < x < x_R, \\ 0, & x > x_R. \end{cases} \quad (4.19)$$

Граничные условия выбирались в виде

$$u(x_0, t) = u(x_R, t) = 0. \quad (4.20)$$

Посредством представления функции $W(u)$ в виде $W(u) = \frac{u^2}{2} - \mu \frac{\partial u}{\partial x}$ уравнение Бюргера в переменных (q, τ) сводится к системе (4.12), (4.13), что позволяет в расчетах использовать семейство разностных схем (3.16), дополненных конечно-разностными соотношениями

$$W_{i+1/2} = \frac{u_{i+1/2}^2}{2} - \frac{\mu}{\Psi_{i+1/2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad Q_i = -\left[u_i - \frac{\mu}{h} \left(\frac{1}{\Psi_{i+1/2}} - \frac{1}{\Psi_{i-1/2}} \right) \right]. \quad (4.21)$$

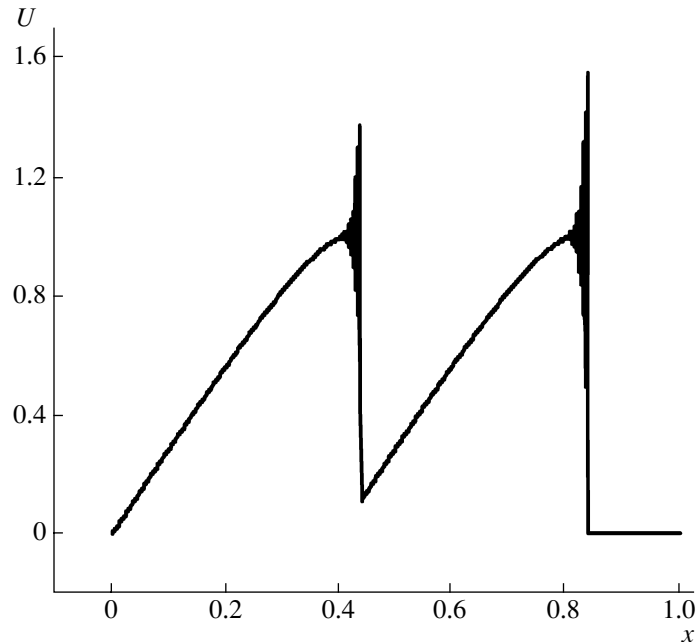


Фиг. 11.

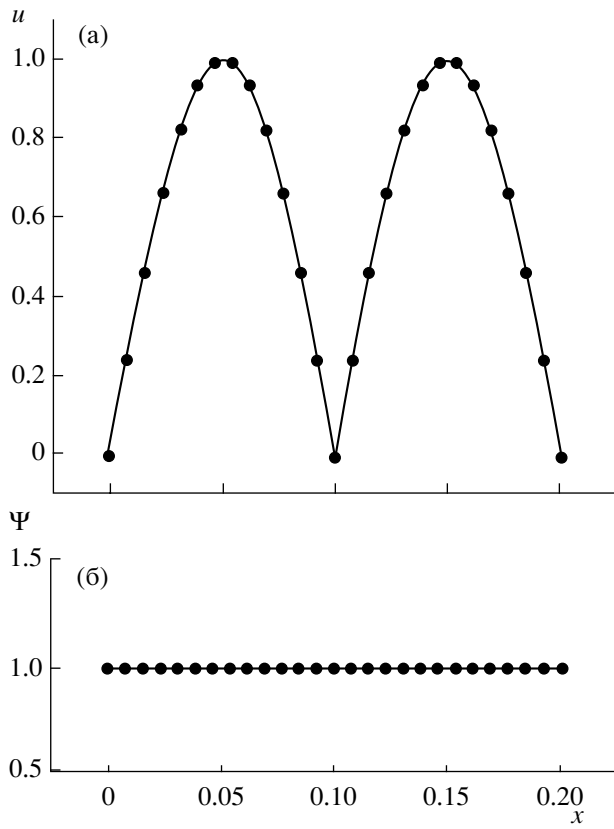
4.3.4. Результаты моделирования. Под влиянием конвективной составляющей и малой физической вязкости $\mu = 10^{-5}$ решение с течением времени стремится к разрывному.

Вначале задача (4.18)–(4.20) решалась на сетке с фиксированными узлами с общим количеством $N = 2000$. В силу специального выбора начального пространственного распределения $u^0(x)$, внутри области возникают два квазиразрывных решения. При использовании разностной схемы 2-го порядка в области обоих фронтов возникают паразитные осцилляции, от которых не удается избавиться даже при $N = 5000$, (см. фиг. 12).

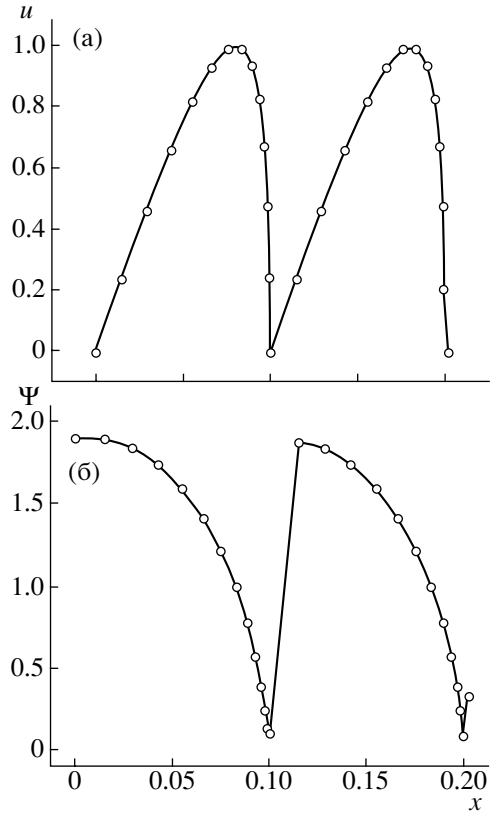
На фиг. 13–17 представлено решение задачи (4.12), (4.13), (4.19), (4.20), полученное в различные моменты времени на динамически адаптирующейся сетке с общим числом узлов $N = 25$. В расчетах использовалась разностная схема 2-го порядка (3.16), (4.21). На фиг. 13 представлено начальное распределение функции $\psi(t_0, x)$, $u(t_0, x)$. Расчеты показали, что за короткое время в каждой из полуволн начинает формироваться квазиразрывное решение. Сетка реагирует на появление больших градиентов сильным сгущением узлов в окрестности правых границ полусинусоид (кривые $\psi(t, x)$, $u(t, x)$ на фиг. 14). К моменту формирования двух фронтов шаг сетки падает на несколько порядков. С течением времени левый фронт догоняет правый (кривые $\psi(t, x)$, $u(t, x)$ на фиг. 15), а затем происходит его по-



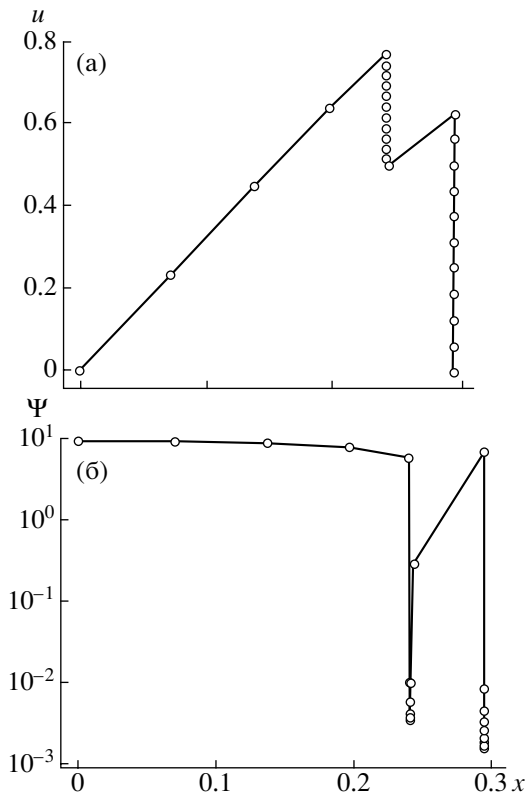
Фиг. 12.



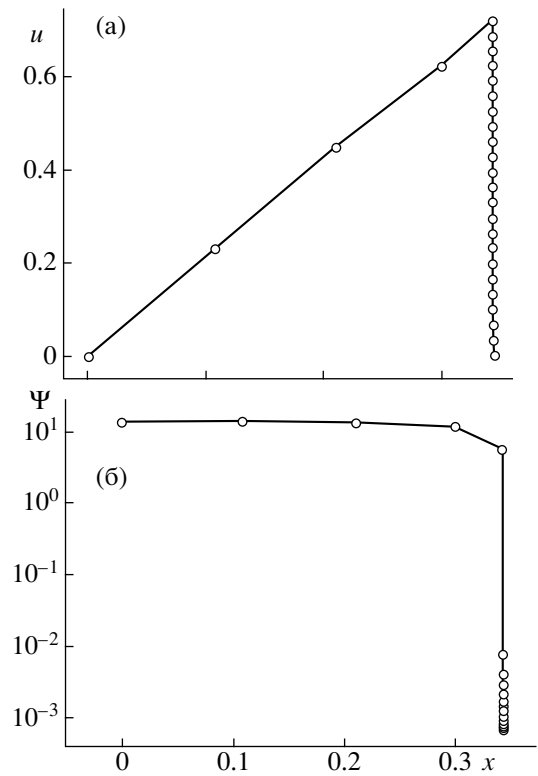
Фиг. 13.



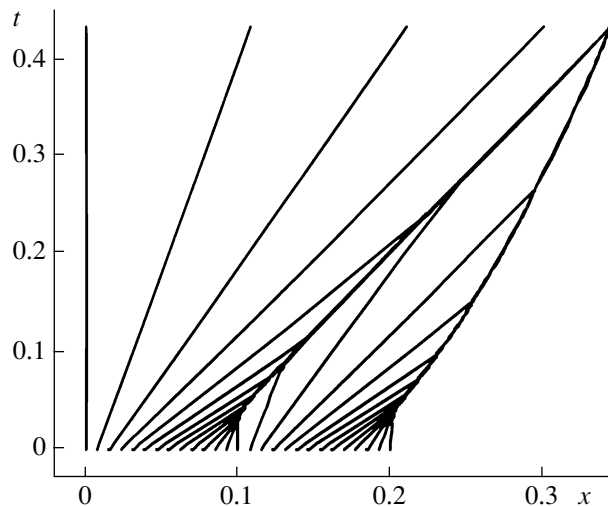
Фиг. 14.



Фиг. 15.



Фиг. 16.



Фиг. 17.

глощение (кривые $\psi(t, x)$, $u(t, x)$ на фиг. 16). В дальнейшем приобретенная треугольная форма, как и режим распространения с одним фронтом, сохраняются (см. кривые на рис. 15). При этом основная доля узлов концентрируется на фронте решения. Динамика формирования фронтов и их слияние наиболее заметно на диаграмме движения узлов, см. фиг. 17.

Полное отсутствие колебаний достигается за счет согласованного с решением движения узлов, которое приводит к полному уничтожению дисперсии разностных схем. Благодаря этому свойству разностных схем, записанных в нестационарных системах координат, динамически адаптирующиеся сетки позволяют использовать в расчетах необычно малое количество узлов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнен детальный анализ возможностей метода динамической адаптации при численном решении уравнений в частных производных параболического типа. Из обобщения результатов, полученных для нелинейных уравнений теплопроводности и конвекции–диффузии следует, что идея использования искомого решения для построения адаптирующихся сеток делает метод динамической адаптации универсальным, эффективным и алгоритмически простым.

Универсальность обеспечивается использованием произвольной нестационарной системы координат, скорость движения которой зависит и определяется с помощью искомого решения.

Эффективность определяется автоматическим согласованием скорости движения узлов сетки с динамикой решения.

Необходимое согласование достигается с помощью оптимальной функции преобразования. Компоненты сжимающего и расталкивающего воздействий содержатся в самом исходном уравнении и вводятся в управляющую функцию с помощью принципа квазистационарности. Тесная связь механизма адаптации со структурой параболического уравнения позволяет осуществлять автоматический контроль движения узлов сетки, не допуская пересечения их траекторий. Данный механизм свойствен все уравнениям параболического типа, в отличие от гиперболических уравнений, структура которых не содержит компонент расталкивающего действия. Динамически адаптирующиеся сетки для гиперболических уравнений допускают пересечение траекторий узлов. Во избежание данного эффекта расталкивающие компоненты в управляющую функцию вводятся искусственно.

Алгоритмическая простота достигается общим подходом к построению адаптирующихся сеток независимо от вида и типа дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W.* Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations. A review // *J. Comput. Phys.* 1982. V. 47. № 1. P. 1–108.

2. *Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W.* Numerical grid generation. Foundation and application. New York: Nort-Holland, 1985.
3. Modeling, mesh generation, and adaptive numerical methods for partial differential / Eqs I. Babuska, J.E. Flaherty, W.D. Henshaw, J.E. Hopcroft. Berlin etc.: Springer; 1995.
4. Proceedings of the 4–9 International Conferences on numerical grid generation in computational field simulations. 1994–2005.
5. Прикладная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления // Тр. Всерос. конф. ВЦ РАН. М.: ВЦ РАН, 2004. Т. 1, 2.
6. *Brackbill J.U., Saltzman J.* Adaptive zoning for singular problems in two dimensions // J. Comput. Phys. 1982. V. 46. P. 342–368.
7. *Anderson D.A.* Equidistribution schemes, poisson generators, and adaptive grids // Appl. Math. Comput. 1987. V. 24. P. 211–227.
8. *Matsuno K., Dwyer H.A.* Adaptive methods for elliptic grid generation // J. Comput. Phys. 1988. V. 77. P. 40–52.
9. *Иваненко С.А., Прокопов Г.П.* Методы построения адаптивно-гармонических сеток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 6. С. 643–662.
10. *Berger M.J., Colella P.* Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics // J. Comput. Phys. 1989. V. 82. P. 64–84.
11. *Berger M.J.* Data structures for adaptive grid generation // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1986. V. 3. P. 904–916.
12. *Hyman J.M., Li S.* Iterative and dynamic control of adaptive mesh refinement with nested hierarchical grids. Report № 5462. Los Alamos Lab., 1998.
13. *Andersen A., Zheng X., Cristini V.* Adaptive unstructured volume remeshing – I: The method // J. Comput. Phys. 2005. V. 208. № 2. P. 616–625.
14. *Nourgaliev R.R., Dinh T.N., Theofanous T.G.* Adaptive characteristics-based matching for compressible multifluid dynamics // J. Comput. Phys. 2006. V. 213. № 2. P. 500–529.
15. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И.* Об одном подходе к построению адаптивных разностных сеток // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 1. С. 64–68.
16. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И.* Об одном подходе к построению адаптивных сеток для нестационарных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 3. С. 454–460.
17. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И., Самарский А.А.* Конечно-разностный метод решения одномерных уравнений газовой динамики на адаптивных сетках // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. № 5. С. 1078–1081.
18. *Мажукин В.И., Такоева Л.Ю.* Принципы построения динамически адаптирующихся к решению сеток в одномерных краевых задачах // Матем. моделирование. 1990. Т. 2. № 3. С. 101–118.
19. *Мажукин В.И., Самарский А.А., Кастельянос О., Шапранов А.В.* Метод динамической адаптации для нестационарных задач с большими градиентами // Матем. моделирование. 1993. Т. 5. № 4. С. 32–56.
20. *Бреславский П.В., Мажукин В.И.* Метод динамической адаптации в задачах газовой динамики // Матем. моделирование. 1995. Т. 7. № 12. С. 48–78.
21. *Hui W.H., Li P.Y., Li Z.W.* A unified coordinate system for solving the two-dimensional Euler equations // J. Comput. Phys. 1999. V. 153. P. 596–637.
22. *Hui W.H., Kudriakov S.* A unified coordinate system for solving the three-dimensional Euler equations // J. Comput. Phys. 2001. V. 172. P. 235–260.
23. *Гильманов Н.А.* Применение динамически адаптивных сеток к исследованию течений с многомасштабной структурой потока // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 2. С. 311–326.
24. *Руденко Д.В., Утюжникова С.В.* Применение динамически адаптивных к решению сеток для моделирования пространственных нестационарных течений газа с большими градиентами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 3. С. 395–409.
25. *Tang H., Tang T.* Adaptive mesh methods for one- and two-dimensional hyperbolic conservation laws // SIAM J. Numer. Anal. 2003. V. 41. № 2. P. 487–515.
26. *Бреславский П.В., Мажукин В.И.* Динамически адаптирующиеся сетки для взаимодействующих разрывных решений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 45. № 4. С. 717–737.
27. *Демин М.М., Мажукин В.И., Шапранов А.А.* Метод динамической адаптации в проблеме ламинарного горения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 4. С. 648–661.
28. *Demin M.M., Shapranov A.V., Smurov I.* The method of construction dynamically adapting grids for problems of unstable laminar combustion // Numer. Heat Transfer. Part B: Fundamentals. 2003. V. 44. № 4. P. 387–415.
29. *Львов А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967.
30. *Зельдович Я.Б., Компанец А.С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // К 70-летию акад. А.Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–71.
31. *Самарский А.А., Соболев И.М.* Примеры численного расчета температурных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3. № 4. С. 702–719.

32. *Волосевич П.П., Леванов Е.И.* Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса. М.: Изд-во МФТИ, 1997.
33. *Баренблатт Г.И., Вишик М.И.* О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // Прикл. матем. и механ. 1956. Т. 20. № 3. С. 411–417.
34. *Warming R.E., Hyett B.J.* The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods // J. Comput. Phys. 1974. V. 14. P. 159–179.
35. *Шокин Ю.И.* Первое дифференциальное приближение. Новосибирск: Наука, 1979.
36. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
37. *Василевский В.Ф., Мажукин В.И.* Численные расчеты температурных волн со слабыми разрывами на сетках с динамической адаптацией // Дифференц. ур-ния. 1989. Т. 25. № 7. С. 1188–1193.
38. *Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H.* Computational fluid mechanics and heat transfer. New York: Hemisphere Publ. Corp., 1984.
39. *Bell J.B., Shubin G.R.* An adaptive grid finite difference method for conservation law // J. Comput. Phys. 1983. V. 52. P. 569–591.
40. *Benton E.R., Platzman G.W.* A table of the one-dimensional Burgers equation // Quarterly Appl. Math. // 1972. V. 30. P. 195–212.