

УДК 519.624

МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИИ В ЗАДАЧАХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ¹⁾

© 2008 г. П. В. Бреславский, В. И. Мажукин

(125047 Москва, Миусская пл., 4, ИММ РАН)

Поступила в редакцию 26.10.2007 г.

Рассматривается применение метода динамической адаптации для задач газовой динамики с нелинейной теплопроводностью. Выбор функции адаптации осуществляется из условия квазистационарности уравнения энергии и квазиравномерного распределения узлов. На основе метода динамической адаптации с использованием указанной выше функции адаптации и явном выделении разрывов решается модельная задача о поршне, вдвигающемся в теплопроводный газ. Показывается существенная зависимость результатов от выбора коэффициента теплопроводности. Сравнение результатов расчетов на сетке, содержащей 40 узлов, осуществляется с полученными для данной задачи автомодельными решениями. Библ. 15. Фиг. 5.

Ключевые слова: газодинамические задачи, метод динамической адаптации разностных сеток, нелинейная теплопроводность.

ВВЕДЕНИЕ

В газовой динамике содержится класс задач, описывающий процессы разлета полностью ионизованной плазмы. Основными механизмами переноса энергии в плазменных средах, наряду с радиационным, являются конвективный и кондуктивный. В этих задачах основу математических моделей, наряду с уравнениями переноса излучения, составляют уравнения гидродинамики с нелинейной теплопроводностью. Ранее исследованию влияния нелинейной теплопроводности на особенности взаимодействия тепловых процессов с гидродинамическими уделялось большое внимание (см. [1]–[6]). Было установлено, что решения данного класса задач отличаются большим разнообразием, а в относительно узком диапазоне параметров возможно появление автомодельных решений (см. [1], [4]–[8]). Характер взаимодействия тепловых и гидродинамических потоков качественно изменяется с изменением величины теплопроводности среды. При низкой теплопроводности на передний план выдвигаются чисто гидродинамические явления. Теплопроводность при этом играет роль диссипирующего и разглаживающего фактора. Высокая теплопроводность среды приводит к появлению температурных волн (см. [9]), которые по виду вызываемого ими гидродинамического движения разделяются на два различных типа.

Температурные волны I рода (ТВ-I) характеризуют режим сверхзвукового распространения тепла, в котором температурные волны распространяются с конечной скоростью по начальному фону с нулевой температурой. За фронтом ТВ-I может возникать изотермическая ударная волна.

Температурные волны II рода (ТВ-II) – это режим распространения тепла с дозвуковой скоростью. Фронт ТВ-II располагается за идущей впереди нее ударной волной и характеризуется равенством нулю теплового потока W , максимумом плотности ρ и локальным минимумом температуры.

С вычислительной точки зрения решение уравнений гидродинамики с нелинейной теплопроводностью, относится к проблемам повышенной сложности. Типичное решение подобных задач имеет сложную структуру и включает в себя сильные (фронт ударной волны – УВ) и слабые (фронт тепловой волны – ТВ) разрывы, зоны больших градиентов температуры, давления, плотности и скорости. Структура фронтов УВ и ТВ зависит от степени нелинейности уравнения теплопроводности. Без учета диссипативных процессов в среде УВ представляет собой сильный разрыв всех компонентов решения u , ρ , P , T . Учет теплопроводности устраняет разрыв функции $T(x, t)$ и приводит к возникновению эффективной ширины фронта по температуре. При низкой теплопроводности фронт УВ по температуре близок к квазиравномерному. Сильная (степенная) зависи-

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проекты 06-07-89191-а, 07-07-00045).

мость коэффициента теплопроводности от температуры приводит к существенному увеличению эффективной ширины фронта УВ и к появлению температурных волн, фронт которых в точке примыкания решения к невозмущенному фону, представляет собой слабый разрыв.

Наличие разрывных решений, зон больших градиентов и их быстрое распространение по пространству предъявляет жесткие требования к эффективности используемых вычислительных алгоритмов, в первую очередь, не столько к качеству разностных схем, сколько к принципам построения оптимальных расчетных сеток.

В настоящей работе в рамках одномерной нестационарной задачи гидродинамики с нелинейной теплопроводностью (коэффициент теплопроводности λ является степенной функцией температуры T и плотности ρ $\lambda(T, \rho) = \lambda_0 T^a \rho^b$) рассматривается задача об ускоряющемся поршне, в которой гидродинамическая энергия, создаваемая поршнем, трансформируется в работу сжатия, вызывающую нагрев среды, генерацию температурных волн и следующих за ними или перед ними, ударных волн. На возникновение того или иного режима распространения тепла влияет ряд факторов. Выбирая тот или иной закон движения поршня и различные законы изменения теплового потока на нем, можно существенным образом повлиять на характер связи тепловых и гидродинамических процессов. В частности, специальным выбором граничных условий на поршне, можно получить решение с сильно пережатыми изотермическими ударными волнами с 10-ти кратным разрывом плотности на фронте (см. [4]). Для сравнения в адиабатической УВ в одноатомном газе перепад плотности на фронте волны не может превышать 4-х кратного. Возможность получения больших перепадов плотности на изотермической ударной волне связана со скачком тепловых потоков на разрыве.

Решение нелинейных уравнений гидродинамики с теплопроводностью осуществляется конечно-разностными схемами, совмещенными с динамической адаптацией. Принципы построения вычислительных конечно-разностных алгоритмов с динамической адаптацией для широкого класса уравнений параболического и гиперболического типов с подвижными и неподвижными границами подробно изложены в работах [10]–[12]. Там же содержится цитируемая литература по методам адаптации.

Основной целью настоящей статьи является построение эффективного вычислительного алгоритма с управляемым распределением узлов сетки и возможностью явного выделения сильных и слабых разрывов в задачах гидро-газодинамики с нелинейной теплопроводностью. Общее количество узлов уменьшается при этом на несколько порядков, по сравнению с сетками с фиксированными узлами.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Постановка задачи об ускоряющемся поршне в идеальном газе с нелинейной теплопроводностью в переменных Эйлера описывается полной системой уравнений газовой динамики с теплопроводностью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(P + \rho u^2) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \epsilon) + P \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} &= 0, \\ W &= -\lambda(T, \rho) \frac{\partial T}{\partial x}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

с уравнениями состояния

$$P = \rho R T, \quad \epsilon = \frac{R}{\gamma - 1} T, \quad \gamma = \frac{5}{3}.$$

Здесь ρ – плотность, u – скорость, P – давление, ϵ , T – внутренняя энергия и температура, R – газовая постоянная, γ – показатель адиабаты, W – тепловой поток, λ – коэффициент теплопроводности. Предполагается, что коэффициент теплопроводности является степенной функцией температуры и плотности $\lambda(T, \rho) = \lambda_0 T^a \rho^b$.

Начальные условия. В начальный момент времени $t = 0$ предполагается нулевой фон температуры, скорости, давления и постоянное по пространству значение плотности:

$$u(x, 0) = 0, \quad P(x, 0) = 0, \quad T(x, 0) = 0, \quad \rho(x, 0) = \rho_0. \quad (2.2)$$

Граничные условия. Формулировка граничных условий производится с учетом того, что применение метода динамической адаптации позволяет явным образом выделять сильные и слабые разрывы. Левая плоскость $x = \Gamma_p(t)$ является поверхностью поршня, которая при $W \neq 0$ является источником движения и нагрева, поэтому на ней формулируются два граничных условия, определяющих скорость движения поршня и величину теплового потока:

$$u(\Gamma_p(t), t) = v_0 t^n, \quad W(\Gamma_p(t), t) = \rho_0 v_0^3 t^{3n}. \quad (2.3)$$

Конкретные значения показателей a, b, n будут согласованы с автомодельным решением и указаны позднее.

На правой границе $x = \infty$ сохраняются фоновые значения

$$u(\infty, t) = 0, \quad T(\infty, t) = 0, \quad \rho(\infty, t) = \rho_0. \quad (2.4)$$

Учитывая, что все возмущения возникают на левой границе (поверхность поршня) $x = \Gamma_p(t)$ и распространяются в направлении правой, в целях экономии вычислительных ресурсов целесообразно исключить из рассмотрения область, неохваченную возмущением. С этой целью правая граница смещается к левой и располагается на некотором малом расстоянии от нее. В момент появления на правой границе возмущения она объявляется свободной границей ($x = \Gamma_T(t)$) и распространяется со скоростью тепловых или газодинамических возмущений. Новая граница $x = \Gamma_T(t)$ в задачах с нелинейной теплопроводностью и нулевым температурным фоном всегда будет совпадать с фронтом температурной волны. Фронт температурной волны представляет собой слабый разрыв, и скорость его перемещения v_T определяется соотношением, полученным из уравнения движения в подвижной системе координат. Остальные условия переносятся из (2.4) без изменений:

$$x = \Gamma_T(t): \quad v_T = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial u}, \quad u(\Gamma_T(t), t) = 0, \quad T(\Gamma_T(t), t) = 0, \quad \rho(\Gamma_T(t), t) = \rho_0. \quad (2.5)$$

Соотношения на фронте УВ. С учетом непрерывности температуры на фронте УВ $x = \Gamma_w(t)$ выписываются три закона сохранения (условия Гюгионо):

$$\begin{aligned} \rho_-(u_- - v_w) &= \rho_+(u_+ - v_w) = D_M, \\ P_- + \rho_-(u_- - v_w)^2 &= P_+ + \rho_+(u_+ - v_w)^2, \\ \varepsilon_- + P_-/\rho_- + \frac{(u_- - v_w)^2}{2} + \frac{W_-}{D_M} &= \varepsilon_+ + P_+/\rho_+ + \frac{(u_+ - v_w)^2}{2} + \frac{W_+}{D_M}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Индексы $-$ и $+$ относятся к параметрам на разных сторонах ударной волны, v_w – скорость ударной волны, а D_M – поток массы через нее.

3. ПРОИЗВОЛЬНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

В соответствии с методом динамической адаптации (см. [13]) осуществим переход к произвольной нестационарной системе координат. В новых переменных (q, τ) система (2.1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi \rho) + \frac{\partial}{\partial q}(\rho(u + Q)) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi \rho u) + \frac{\partial}{\partial q}(P + \rho u(u + Q)) = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi \rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial q}(\varepsilon \rho(u + Q)) + P \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial W}{\partial q} = 0, \quad W = -\frac{\lambda(\rho, T)}{\psi} \frac{\partial T}{\partial q}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial Q}{\partial q}, \quad (3.4)$$

где ψ – якобиан обратного преобразования, Q – функция преобразования, подлежащая определению.

Таким образом, переход в произвольную нестационарную систему координат сопровождается трансформацией исходной дифференциальной модели (2.1) в расширенную модель (3.1)–(3.4), дополненную уравнением обратного преобразования (3.4). Соответственно в начальные (2.2) и граничные условия (2.3)–(2.6) вносятся следующие необходимые дополнения:

$$u(q, 0) = 0, \quad P(q, 0) = 0, \quad T(q, 0) = 0, \quad \rho(q, 0) = \rho_0, \quad \psi(q, 0) = 1 \quad \text{при} \quad \tau = 0 \quad (3.5)$$

$$u(\Gamma_p, \tau) = v_0 \tau^n, \quad W(\Gamma_p, \tau) = \rho_0 v_0^3 \tau^{3n}, \quad Q(\Gamma_p, \tau) = -v_0 \tau^n \quad \text{при} \quad q = \Gamma_p \quad (3.6)$$

$$Q(\Gamma_T, \tau) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial u}, \quad u(\Gamma_T, \tau) = 0, \quad T(\Gamma_T, \tau) = 0, \quad \rho(\Gamma_T, \tau) = \rho_0 \quad \text{при} \quad q = \Gamma_T \quad (3.7)$$

Разрывы в нестационарной системе координат выделяются явным образом и, после появления УВ решение системы (3.1)–(3.4) производится в двух подобластях, разделенных фронтом УВ. Решение на фронте сшивается при помощи условий Гюгонио:

$$\begin{aligned} q &= \Gamma_w: \\ \rho_-(u_- + Q_w) &= \rho_+(u_+ + Q_w) = D_M, \\ P_- + \rho_-(u_- + Q_w)^2 &= P_+ + \rho_+(u_+ + Q_w)^2, \\ W_- + 0.5\rho_-(u_- + Q_w)^3 &= W_+ + 0.5\rho_+(u_+ + Q_w)^3, \\ Q_w &= -v_w. \end{aligned} \quad (3.8)$$

4. РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Для численной реализации системы (3.1)–(3.8) использовалась разностная сетка

$$\begin{aligned} \omega_{h, \Delta\tau} &= \langle (q_i, \tau^j), (q_{i+1/2}, \tau^j), q_{i+1} = q_i + h, q_{i+1/2} = q_i + 0.5h, i = 0, 1, \dots, N-1, \\ &\tau^{j+1} = \tau^j + \Delta\tau^j, j = 0, 1, \dots \rangle. \end{aligned}$$

Аппроксимация дифференциальных уравнений осуществлялась при помощи метода конечных разностей. На разнесенных сетках выписывалось семейство разностных схем, в которых в полудельных точках определяются плотность $\rho_{i+1/2}$, температура $T_{i+1/2}$, давление $P_{i+1/2}$ и внутренняя энергия $\varepsilon_{i+1/2}$, а в целых – скорость u_i и функция Q_i :

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_{i+1/2}^{j+1} - \Psi_{i+1/2}^j}{\Delta\tau^j} &= -\frac{Q_{i+1}^{\sigma_1} - Q_i^{\sigma_1}}{h_{i+1/2}}, \\ \frac{\Psi_{i+1/2}^{j+1} \rho_{i+1/2}^{j+1} - \Psi_{i+1/2}^j \rho_{i+1/2}^j}{\Delta\tau^j} &= -\frac{\rho_{i+1}^{\sigma_2} (u_{i+1}^{\sigma_3} + Q_{i+1}^{\sigma_1}) - \rho_i^{\sigma_2} (u_i^{\sigma_3} - Q_i^{\sigma_1})}{h_{i+1/2}}, \\ \frac{\Psi_i^{j+1} \rho_i^{j+1} u_i^{j+1} - \Psi_i^j \rho_i^j u_i^j}{\Delta\tau^j} &= \\ &= -\frac{P_{i+1/2}^{\sigma_4} - P_{i-1/2}^{\sigma_4} + \rho_{i+1/2}^{\sigma_2} u_{i+1/2}^{\sigma_3} (u_{i+1/2}^{\sigma_3} + Q_{i+1/2}^{\sigma_1}) - \rho_{i-1/2}^{\sigma_2} u_{i-1/2}^{\sigma_3} (u_{i-1/2}^{\sigma_3} + Q_{i-1/2}^{\sigma_1})}{0.5(h_{i+1/2} + h_{i-1/2})}, \\ \frac{\Psi_{i+1/2}^{j+1} \rho_{i+1/2}^{j+1} \varepsilon_{i+1/2}^{j+1} - \Psi_{i+1/2}^j \rho_{i+1/2}^j \varepsilon_{i+1/2}^j}{\Delta\tau^j} &= \\ &= -P_{i+1/2}^{\sigma_4} \frac{u_{i+1}^{\sigma_3} - u_i^{\sigma_3}}{h_{i+1/2}} - \frac{\rho_{i+1}^{\sigma_2} \varepsilon_{i+1}^{\sigma_5} (u_{i+1}^{\sigma_3} + Q_{i+1}^{\sigma_1}) - \rho_i^{\sigma_2} \varepsilon_i^{\sigma_5} (u_i^{\sigma_3} + Q_i^{\sigma_1})}{h_{i+1/2}} + \\ &+ \left(\frac{\lambda(\rho_{i+1}^{\sigma_2}, T_{i+1}^{\sigma_5})}{\Psi_{i+1}^{\sigma_1}} \frac{T_{i+3/2}^{\sigma_5} - T_{i+1/2}^{\sigma_5}}{0.5(h_{i+3/2} + h_{i+1/2})} - \frac{\lambda(\rho_i^{\sigma_2}, T_i^{\sigma_5})}{\Psi_i^{\sigma_1}} \frac{T_{i+1/2}^{\sigma_5} - T_{i-1/2}^{\sigma_5}}{0.5(h_{i+1/2} + h_{i-1/2})} \right) h_{i+1/2}^{-1}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $f^{\sigma_r} = \sigma_r f^{j+1} + (1 - \sigma_r) f^j$, а $\sigma_r = \sigma_1, \sigma_2, \dots$ – весовые множители, определяющие степень неявности разностной схемы. Если $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = 0$, получаем полностью явную разностную схему с погрешностью аппроксимации $O(\Delta\tau + h^2)$. В случае $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = 1$ схема является полностью неявной с тем же порядком аппроксимации. Значению $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = 0.5$ соответствует схема с порядком аппроксимации $O(\Delta\tau^2 + h^2)$. Вычисления производились по полностью неявной разностной схеме с порядком аппроксимации $O(\Delta\tau + h^2)$.

Функции $\{u, Q\} = f$, заданные в целых узлах сетки ω , в полуцелых узлах определялись по формуле $f_{i+1/2} = 0.5(f_i + f_{i+1})$. Аналогично значения остальных функций $\{\psi, \rho, T, P, \varepsilon\} = f$ в целых узлах находились через известные значения этих функций в полуцелых: $f_i = 0.5(f_{i-1/2} + f_{i+1/2})$. Блок-схема алгоритма расчета уже неоднократно публиковалась (см. [10]), и поэтому здесь не приводится. Алгоритм расчета заключается в последовательном итерировании методом Ньютона двух блоков, первый из которых содержит разностный аналог уравнения энергии, а второй – аналоги уравнений неразрывности, движения и уравнения, отвечающего за перестройку сетки (первых трех уравнений системы (4.1)). Оба блока включались в глобальный итерационный цикл. В тех случаях, когда количество внешних итераций в глобальном цикле превышало 7, или внутренних итераций оказывалось больше 10, временной шаг уменьшался в два раза. Если количество глобальных итераций становилось меньше 4, следующий шаг по времени увеличивался на 20%. В качестве начального приближения для каждой из искомых сеточных функций выбиралось значение $f^{j+1(0)} = f^j + (f^j - f^{j-1})(\Delta\tau^j/\Delta\tau^{j-1})$.

На ударной волне $q = \Gamma_w$ требуется выполнение соотношений Гюгонио (3.8). Так как эти уравнения задают связь шести величин, то три из них определяются из решения системы (3.1)–(3.4) в граничных точках, а именно плотность ρ_- и скорость u_- перед фронтом ударной волны и скорость u_+ за фронтом. Остальные три – скорость движения разрыва v_w , плотность ρ_+ за фронтом ударной волны и температура на ней $T_- = T_+$ находятся из соотношений (3.8).

5. ВЫБОР ФУНКЦИИ АДАПТАЦИИ

Управляемое распределение узлов сетки в методе динамической адаптации осуществляется посредством функции преобразования Q . Функция преобразования для адаптации под большие градиенты решения обычно определяется из принципа квазистационарности (см. [12]–[14]), согласно которому необходимо выбрать такую нестационарную систему координат, в которой все физические процессы протекали бы стационарно, а характеризующие их временные производные были бы достаточно малы. Приравнивая временные производные в уравнениях к нулю, получают необходимую функцию преобразования.

Общее решение полной системы уравнений гидродинамики (3.1)–(3.4) определяется суммой функций скорости, плотности и температуры. Эти функции имеют различные пространственно-временные распределения, зачастую противоположного направления. Управляемое распределение узлов сетки для системы уравнений должно учитывать особенности пространственно-временного распределения всех компонент решения.

В задачах гидродинамики в общем случае для определения необходимой функции преобразования можно использовать всю систему уравнений (см. [10], [13]). В настоящей статье для определения функции Q используется уравнение энергии (3.3), решение которого зависит от скорости, плотности и теплопроводности. В недивергентной форме уравнение энергии имеет вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{(u + Q) \partial \varepsilon}{\psi \partial q} + \frac{P \partial u}{\rho \psi \partial q} + \frac{\partial W}{\partial q} = 0.$$

Исходя из принципа квазистационарности, полагаем, что $\partial \varepsilon / \partial \tau = 0$ и получаем уравнение

$$\rho(u + Q) \frac{\partial \varepsilon}{\partial q} + P \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial W}{\partial q} = 0. \quad (5.1)$$

Учитывая конкретный вид уравнений состояния $P = \rho RT$, $\varepsilon = \frac{R}{\gamma - 1}T$ и дифференцируя выражение для теплового потока $W = -\frac{\lambda(\rho, T)\partial T}{\Psi \partial q}$, функцию Q путем несложных преобразований определяем из уравнения (5.1):

$$Q = -\left[u + C_1 T \frac{\partial u}{\partial q} \left(\frac{\partial T}{\partial q} + re \right)^{-1} \right] + \left[\frac{C_2}{\rho \Psi} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial q} + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial q} + \lambda(\rho, T) \frac{\partial^2 T}{\partial q^2} \left(\frac{\partial T}{\partial q} + re \right)^{-1} \right) \right] + \left[C_2 \frac{\lambda(\rho, T)}{\rho} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\Psi} \right) \right], \quad (5.2)$$

$$C_1 = (\gamma - 1), \quad C_2 = \frac{(\gamma - 1)}{R},$$

где re – регуляризирующая константа, ограничивающая снизу значение производной при ее стремлении к нулю.

В полученном выражении (5.2) слагаемое в первой квадратной скобке после разностной аппроксимации оказывает сжимающее воздействие на узлы сетки по переменным u и T . Слагаемое во второй квадратной скобке учитывает влияние нелинейной теплопроводности и оказывает сжимающее воздействие по переменным ρ и T . Последнее слагаемое является слагаемым диффузионного типа. В случае $\lambda(\rho, T) \neq 0$ оно обладает разглаживающим действием и, в частности, предотвращает пересечение траекторий движения узлов.

Особенности рассматриваемого класса задач определяются двумя факторами. Первый – степенная зависимость коэффициента теплопроводности от температуры. В области низких температур (вблизи нуля) из-за малости коэффициента теплопроводности расталкивающее воздействие диффузионного члена резко уменьшается и его может оказаться недостаточно для оптимального распределения узлов сетки. Второй связан с представлением исходной задачи в виде задачи со свободной границей. Исходная область может при этом увеличиваться на много порядков, соответственно на столько порядков возрастут значения функции Ψ , что также будет вызывать сильное ослабление диффузионной составляющей. Для устранения указанных эффектов целесообразно полученную функцию преобразования Q дополнить функцией, получаемой из диффузионного приближения (см. [10]), учитывающей наличие подвижных границ:

$$Q = -D \frac{\partial \Psi}{\partial q},$$

где D – коэффициент диффузии, величина которого определяется через геометрические размеры одной ячейки (шаг h), скорости движения граничных точек (v_l, v_r) и минимальное для всей области значение функции (Ψ_{\min}):

$$D = \frac{h |\max(v_l, v_r)|}{\Psi_{\min}}.$$

Кроме того, отношение двух производных от температуры в уравнении (5.2), целесообразно представить в виде производной от медленно меняющейся логарифмической функции

$$\frac{\partial^2 T}{\partial q^2} \left(\frac{\partial T}{\partial q} + re \right)^{-1} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\ln \left(\left| \frac{\partial T}{\partial q} \right| + re \right) \right).$$

С учетом приведенных особенностей функция преобразования запишется в окончательном виде

$$Q = -\left[u + C_1 T \frac{\partial u}{\partial T} \right] + \left[\frac{C_2}{\rho \Psi} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial q} + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial q} + \lambda(\rho, T) \frac{\partial}{\partial q} \left(\ln \left(\left| \frac{\partial T}{\partial q} \right| + re \right) \right) \right) \right] - \left[\left(\frac{C_2 \lambda(\rho, T)}{\rho \Psi^2} + D \right) \frac{\partial \Psi}{\partial q} \right], \quad (5.3)$$

$$C_1 = (\gamma - 1), \quad C_2 = \frac{(\gamma - 1)}{R}.$$

6. АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Для оценки достоинств метода динамической адаптации и его преимуществ желательно получаемое численное решение сравнить с аналитическим, если оно существует, или с решением, полученным другим способом. Одним из наиболее распространенных способов подобного сравнения является сравнение с автомодельными решениями. Задачи гидродинамики с нелинейной теплопроводностью относительно хорошо изучены и для них известен довольно большой класс автомодельных решений (см. [4]–[8]).

Используя методику, изложенную в [8] получаем автомодельное решение для задачи (2.1)–(2.6) с нелинейным коэффициентом теплопроводности в виде степенной функции температуры и плотности

$$\lambda = \lambda_0 T^a \rho^b, \quad a > 0, \quad b \leq 0, \tag{6.1}$$

и граничными условиями (2.3) с нелинейным нагревающим потоком на границе $x = \Gamma_p(t)$

$$u(\Gamma_p(t), t) = v_0 t^n, \quad W(\Gamma_p(t), t) = \rho_0 v_0^3 t^{3n}.$$

Поиск автомодельного решения состоит в отыскании таких значений a, b, n , при которых данное решение существует, формировании системы ОДУ в автомодельных переменных и ее численном решении.

Проведем анализ системы уравнений газовой динамики с теплопроводностью (2.1). Вначале приведем физические размерности используемых в задаче функций и констант:

$$\begin{cases} [\rho] = ML^{-3} \\ [u] = L\tilde{T}^{-1} \\ [T] = \tilde{C} \\ [W] = M\tilde{T}^{-3} \\ [\lambda] = ML\tilde{T}^{-3}\tilde{C}^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [R] = L^2\tilde{T}^{-2}\tilde{C}^{-1} \\ [\rho_0] = M\tilde{T}^{-3} \\ [v_0] = L\tilde{T}^{-1-n} \\ [\lambda_0] = M^{1-b}L^{1+3b}\tilde{T}^{-3}\tilde{C}^{-1-a}, \end{cases} \tag{6.2}$$

где $M, L, \tilde{T}, \tilde{C}$ – размерности, соответствующие массе, длине, времени и температуре.

Известно (см. [15]), что решение задачи будет автомодельным, если среди всех размерных определяющих параметров задачи (в нашем случае $R, \rho_0, v_0, \lambda_0$) имеется $k - 1$ постоянных с независимыми размерностями, где k – число основных единиц измерения. Так как для рассматриваемой задачи $k = 4$, из четырех определяющих параметров один должен быть линейно зависимым от трех других. Выбирая величины v_0, ρ_0, R за постоянные параметры с независимыми размерностями, определим, при каких значениях a, b, n константа λ_0 будет выражаться через эти параметры.

Запишем $\lambda_0 = \hat{\lambda}_0 v_0^x \rho_0^y R^z$, где $\hat{\lambda}_0$ – безразмерная константа. Тогда с учетом приведенных размерностей (6.2) можем выписать систему соответствия каждой из размерностей для константы λ_0 :

$$\begin{pmatrix} M \\ L \\ \tilde{T} \\ \tilde{C} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - b \\ x - 3y + 2z = 1 + 3b \\ (1 + n)x + 2z = 3 \\ z = 1 + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - b \\ x + 2z = 4 \\ nx = -1 \\ z = 1 + a \end{cases} \Rightarrow 2a = 2 + n^{-1}.$$

Из записанной системы следует, что если положить $a = 4, b = -2$, то условием автомодельности будет $n = 1/6$.

Для вывода системы ОДУ введем такие безразмерные функции f, α, δ, w , что

$$f(s) = \frac{RT(x, t)}{v_0^2 t^{2n}}, \quad \alpha(s) = \frac{u(x, t)}{v_0 t^n}, \quad \delta(s) = \frac{\rho(x, t)}{\rho_0}, \quad w(s) = \frac{W(x, t)}{\rho_0 v_0^3 t^{3n}},$$

где формулы перехода к координате s задаются следующими соотношениями:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\delta}{v_0 t^{n+1}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{ds}{dt} - u \frac{\partial s}{\partial x} = -(n+1)st^{-1} - \alpha \delta t^{-1}.$$

Тогда, например, для первого уравнения системы (2.1) справедливо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(\rho u) \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_0 \delta'(-(n+1)st^{-1} - \alpha \delta t^{-1}) + (\rho_0 \delta' \alpha v_0 t^n + \rho_0 \delta \alpha' v_0 t^n) \frac{\delta}{v_0 t^{n+1}} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -(n+1)s \delta' + \delta^2 \alpha' &= 0 \end{aligned}$$

и аналогично поступая для всех уравнений системы (2.1) и уравнения для теплового потока с коэффициентом теплопроводности вида (6.1), получаем

$$(n+1)s \delta' = \delta^2 \alpha', \quad n\alpha - (n+1)s\alpha' = -(f\delta)',$$

$$\frac{1}{\gamma-1}(2nf - (n+1)sf') = -f\delta\alpha' - w',$$

$$w = -\hat{\lambda}_0 f^a \delta^{b+1} f',$$

или с учетом $a = 4, b = -2, n = 1/6, \gamma = 5/3$

$$\frac{7s\delta'}{6} = \delta^2 \alpha', \quad \frac{\alpha}{6} - \frac{7s\alpha'}{6} = -(f\delta)',$$

$$\frac{f}{2} - \frac{7sf'}{4} = -f\delta\alpha' - w', \quad w = -\hat{\lambda}_0 f^4 \delta^{-1} f'.$$

(6.3)

Граничные условия

$$\alpha = 1, \quad w = 1, \quad s = 0, \quad \alpha = 0, \quad w = 0, \quad f = 0, \quad \delta = 1, \quad s = \infty.$$

Если ввести вспомогательные функции

$$F = -\frac{w\delta}{\hat{\lambda}_0 f^4}, \quad \Delta = \frac{49}{36}s^2 - \delta^2 f \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{7}{6}\left(\frac{1}{6}\alpha + \delta F\right),$$

то систему (6.3) можно также переписать несколько иначе:

$$\alpha' = \frac{s\varphi}{\Delta}, \quad \delta' = \frac{6\delta^2\varphi}{7\Delta},$$

$$w' = \frac{7}{4}sF - \frac{1}{2}f - f\delta\frac{s\varphi}{\Delta}, \quad f' = F.$$

(6.4)

Для решения полученной системы необходимо отметить два момента. Во-первых, существует точка s_0 – фронт тепловой волны, в которой рвется функция f' , правее этой точки все функции имеют изначально заданные значения. Во-вторых, из вида функции Δ можно заметить, что при $s = 0$ $\Delta < 0$, а при $s = s_0$ $\Delta > 0$. При этом не существует такой точки q_1 , в которой $\Delta = 0$ (см. [8]), следовательно, в этой точке функция Δ , а также и все остальные искомые функции, кроме f имеют разрыв. В автомодельных переменных можно записать соотношения Гюгонио на этом разрыве:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{36f_1\delta_1^2}{49s_1^2} = \Theta, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{7s_1}{6\delta_1}(1 - \Theta),$$

$$f_2 = f_1, \quad w_2 = w_1 - 0.5\delta_1\left(\frac{7s_1}{6\delta_1}\right)^3(1 - \Theta^2).$$

(6.5)

Значение параметров s_0, s_1 определяется из численного решения системы уравнений (6.4) при соответствующих граничных условиях, заданных при $s = 0$ и $s = s_0$.

Алгоритм решения системы (6.4) можно условно описать следующим образом. Для выбранного значения s_0 находится такое s_1 , что при решении (6.4), (6.5) при $s = 0$ решение для безразмерной функции α выходит на заданную в граничных условиях величину ($\alpha = 1$). Если при этом $w > 1$, то выбирается новое значение s_0 меньше предыдущего; если $w < 1$ – новое значение s_0 больше предыдущего. Итерационный процесс продолжается до выхода с заданной степенью точности на условие $w = 1$, после чего решение считается найденным.

Были найдены три автомодельных профиля для разных коэффициентов теплопроводности: $\hat{\lambda}_0 = \{10, 50, 200\}$ ($R = 1$).

7. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделирование задачи о поршне, ускоряющемся в среде с нелинейной теплопроводностью, заключается в решении системы (3.1)–(3.4) с начальными (3.5) и граничными (3.6), (3.7) условиями, соотношениями Гюгонио (3.8) и функцией адаптации (5.3). Поскольку производится сравнение с автомодельными профилями, задача решается в безразмерных переменных с константами, соответствующими автомодельному решению:

$$R = 1, \quad \rho_0 = 1, \quad v_0 = 1, \quad n = \frac{1}{6}, \quad a = 4, \quad b = -2.$$

Одной из основных целей моделирования являлось сравнение численного решения системы (3.1)–(3.8) с автомодельным, получаемым из решения системы ОДУ (6.4). Так как в предыдущих работах авторов (см. [10], [11], [13]) много внимания уделялось вопросам автоматического выделения момента и места возникновения УВ, то в настоящей статье, с целью некоторого сокращения объема вычислений, расчеты начинались с некоторого момента времени $t^* > t_0$. Предполагалось, что к этому моменту времени УВ успела сформироваться. Начальная стадия в расчетах моделировалась заданием частично согласованных с автомодельным решением пространственных профилей газодинамических и тепловых величин, заданных в двух областях, разделенных явно выделяемой УВ. В итоге, начальные условия (3.5) заменялись следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \tau = \tau^*: \quad u(q, \tau^*) &= v_0(\tau^*)^n (1 - 0.5(q - \Gamma_p)(\Gamma_w - \Gamma_p)^{-1}), \quad \rho(q, t_0) = \rho_+, \quad T(q, t_0) = T_+, \quad \psi(q, t_0) = 1, \\ &\Gamma_p \leq q \leq \Gamma_w, \\ u(q, \tau^*) &= u_- = 0, \quad \rho(q, \tau^*) = \rho_- = \rho_0, \quad T(q, \tau^*) = T_- = T_0, \quad \psi(q, \tau^*) = 1, \\ &\Gamma_w \leq q \leq \Gamma_T. \end{aligned}$$

В то же время задание почти произвольных газодинамических профилей служит дополнительной проверкой достоверности проводимых расчетов.

Функция преобразования (5.3) с учетом конкретной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры и плотности $\lambda = \lambda_0 T^4 \rho^{-2}$ приобретает вид

$$\begin{aligned} Q &= -\left[u + C_1 T \frac{\partial u}{\partial T} \right] + \left(\frac{C_2}{\rho \psi} \left\{ -(2\lambda_0 T^4 \rho^{-3}) \frac{\partial \rho}{\partial q} + (4\lambda_0 T^3 \rho^{-2}) \frac{\partial T}{\partial q} + \right. \right. \\ &\left. \left. + (\lambda_0 T^4 \rho^{-2}) \frac{\partial}{\partial q} \left[\ln \left(\left| \frac{\partial T}{\partial q} \right| + re \right) \right] \right\} \right) - \left[\left(\frac{C_2 (\lambda_0 T^4 \rho^{-2})}{\rho \psi^2} + D \right) \frac{\partial \psi}{\partial q} \right]. \end{aligned} \quad (7.1)$$

В начальный момент времени $\tau^* = 10^{-6}$ суммарный размер двух подобластей решения полагая равным 10^{-8} . Общее количество узлов N во всех вариантах расчетов составляло 40, соответственный пространственный шаг был равен $h = 2.5 \times 10^{-10}$. Константы λ_0 при коэффициенте теплопроводности соответствовали безразмерным коэффициентам теплопроводности $\hat{\lambda}_0$ в автомодельных решениях.

Отличительная особенность рассматриваемых режимов движения поршня в среде с нелинейной теплопроводностью состоит в том, что появление изотермического разрыва гидродинамических величин в тепловом потоке обусловлено исключительно взаимодействием тепловых и гидродинамических процессов переноса. Смена режимов распространения тепла в рассматриваемом случае зависит от степени нелинейности теплопроводности и определяется значениями параметра λ_0 . При значениях λ_0 меньше $\lambda_0 < \lambda^*$ некоторого значения безразмерной константы λ^* (для рассматриваемых режимов $\lambda^* \approx 30$) образуется ТВ-II, а при обратном соотношении $\lambda_0 \geq \lambda^*$ возникает ТВ-I. В данной работе рассматривался один вариант ТВ-II при $\lambda_0 = 10$ (см. фиг. 1–3), и два варианта ТВ-I при $\lambda_0 = 50$ и при $\lambda_0 = 200$ (см. фиг. 4, 5).

Моделирование режима ТВ-II. ТВ-II с $\lambda_0 = 10$ характеризует дозвуковой режим распространения тепла. Для его моделирования использовалась расчетная сетка с общим числом узлов $N = 40$. Из них 30 узлов располагались в области между поршнем и ударной волной, а в области между ударной волной и внешней границей использовались 10 узлов. На фиг. 1–3 приведены пространственные профили газодинамических функций и температуры на моменты времени $t = 1.1 \times 10^{-6}$, $t = 10^{-3}$ и $t = 10^6$. Сплошные линии соответствуют автомодельному решению, а пунктирные с маркерами – численному. В момент времени $t = 1.1 \times 10^{-6}$, близкий к началу расчета, численное решение не имеет ничего общего с автомодельным в силу произвольности изначально заданных профилей (см. фиг. 1). На момент времени $t = 10^{-3}$ численное решение хотя и имеет примерный вид автомодельного, но еще не совпадает с ним. На более позднем этапе $t = 10^6$ численное решение согласуется с автомодельным, и их пространственные профили полностью совпадают (см. фиг. 2).

Смена режима от ТВ-I к ТВ-II связана с усилением взаимного влияния тепловых и гидродинамических процессов. Структура решения в режиме ТВ-II (фиг. 3) представляется в виде конфигурации, состоящей из трех волн следующих друг за другом: сверхзвуковой ТВ-I, генерируемой УВ; ударной волны, представляющей собой изотермический скачок с непрерывной температурой и разрывными плотностью и скоростью; и дозвуковой ТВ-II, идущей после УВ.

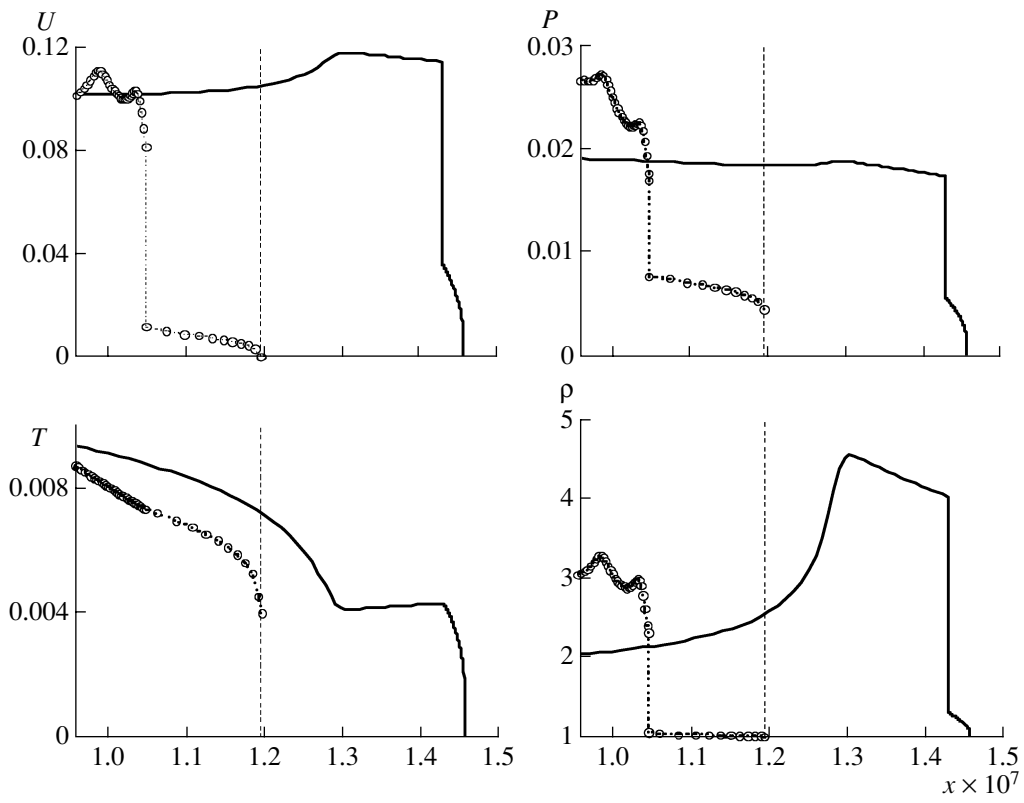
На фронте ТВ-I (слабый разрыв) производные от всех функций по x бесконечны, но, как и в случае одного уравнения нелинейной теплопроводности без учета влияния гидродинамики, все физические величины непрерывны. При этом за фронтом потока тепла, скорость, плотность и температура резко возрастают. Изотермический разрыв характеризуется сильным изменением всех величин за фронтом волны.

Еще одной областью резкого изменения всех физических величин является фронт ТВ-II, распространяющийся с дозвуковой скоростью по ненулевому температурному фону. Фронт ТВ-II характеризуется максимумом плотности, нулевым потоком тепла и локальным минимумом температуры.

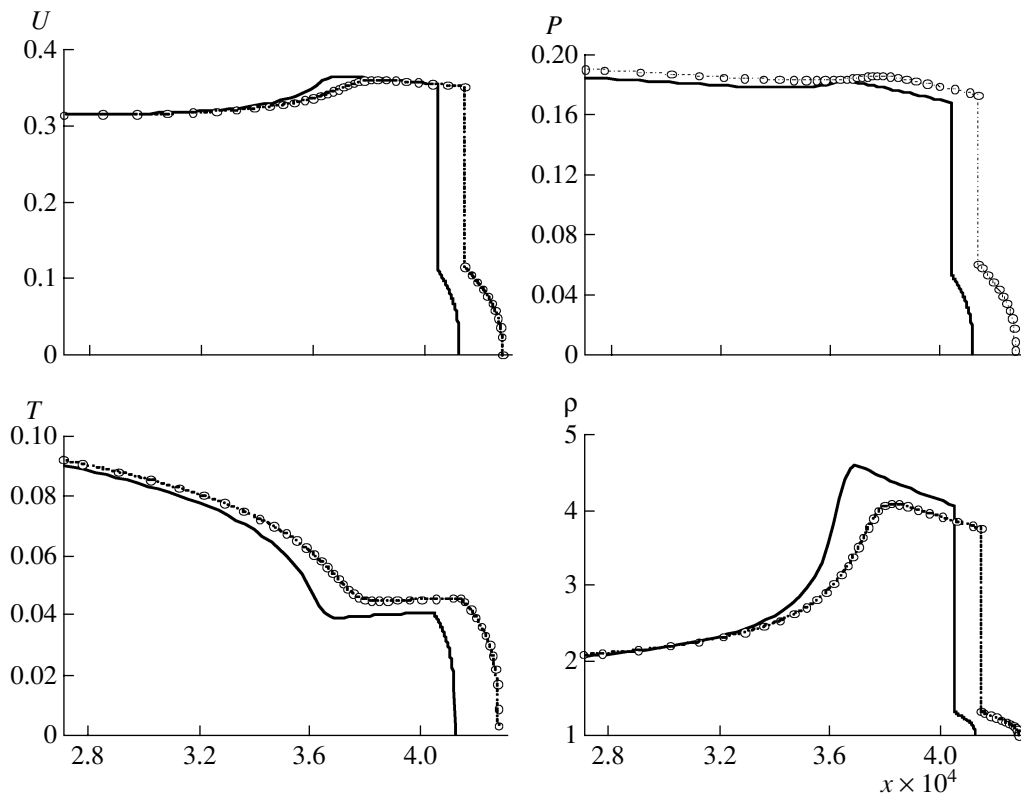
Размеры области и пространственных шагов сетки в физическом пространстве характеризуются функцией $\psi(x, t)$, которая на каждый момент времени показывает, во сколько раз изменились размеры шага и области в целом. Для достижения полного совпадения численного решения с автомодельным потребовался большой промежуток времени $t \in (10^{-6} - 10^6)$. С учетом того, что рассматривалась область с подвижными границами, у которой скорость движения правой границы (фронт ТВ-I) намного превосходила скорость движения левой (поршень), $v_T \gg v_p$, геометрический размер физической области, охваченной возмущением, на указанном промежутке времени увеличился, согласно кривой $\psi(x, t)$, более чем на 15 порядков. Локальные минимумы функции $\psi(x, t)$ приходятся на области наибольших градиентов решения и совпадают с фронтами ТВ-I, ТВ-II (см. фиг. 3).

Моделирование режима ТВ-I. Как уже отмечалось, ТВ-I характеризует режим распространения тепла со сверхзвуковой скоростью, что предопределяет слабое взаимодействие тепловых процессов с гидродинамическими. Тем не менее, в ряде случаев при сильной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры ($a \gg 1$) и высоких скоростях распространения тепла режим ТВ-I может стать преобладающей формой теплопереноса.

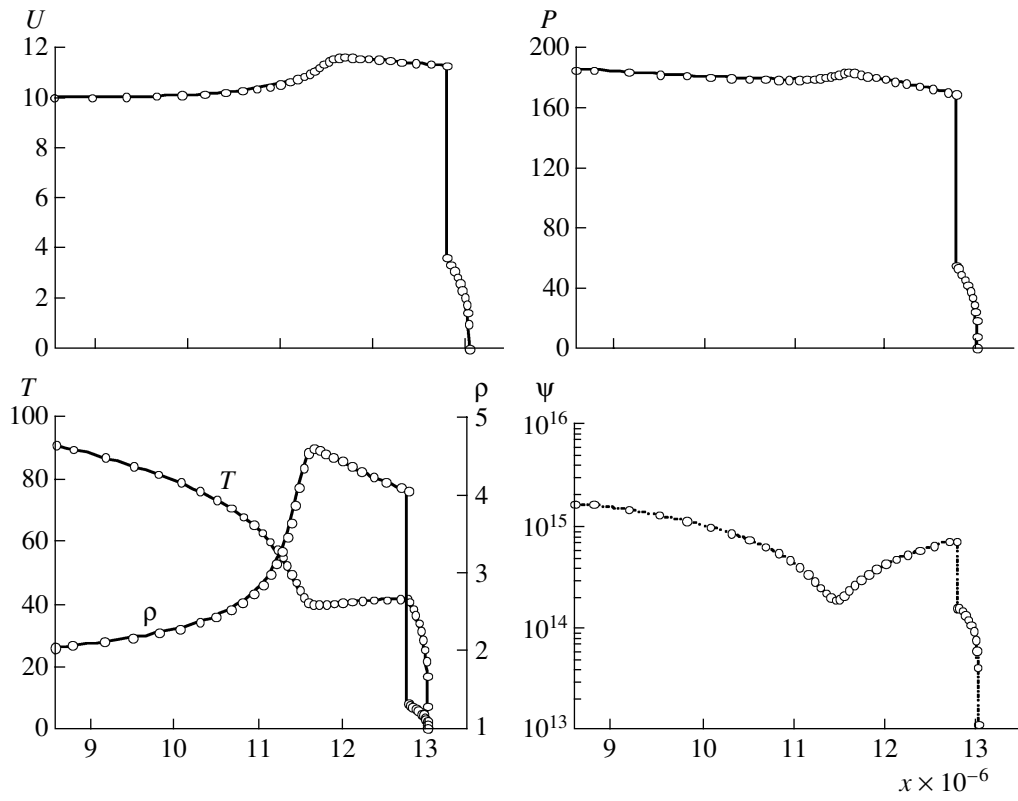
На фиг. 4, 5 показаны пространственные профили газодинамических функций, температуры и функции ψ для $\lambda_0 = 50, 200$ соответственно, полученных после выхода численного решения на автомодельное (момент времени $t = 10^6$). В расчетах использовалась сетка с общим количеством узлов $N = 40$, по 20 в областях между поршнем и ударной волной и между ударной волной и внешней границей (фронт ТВ-I).



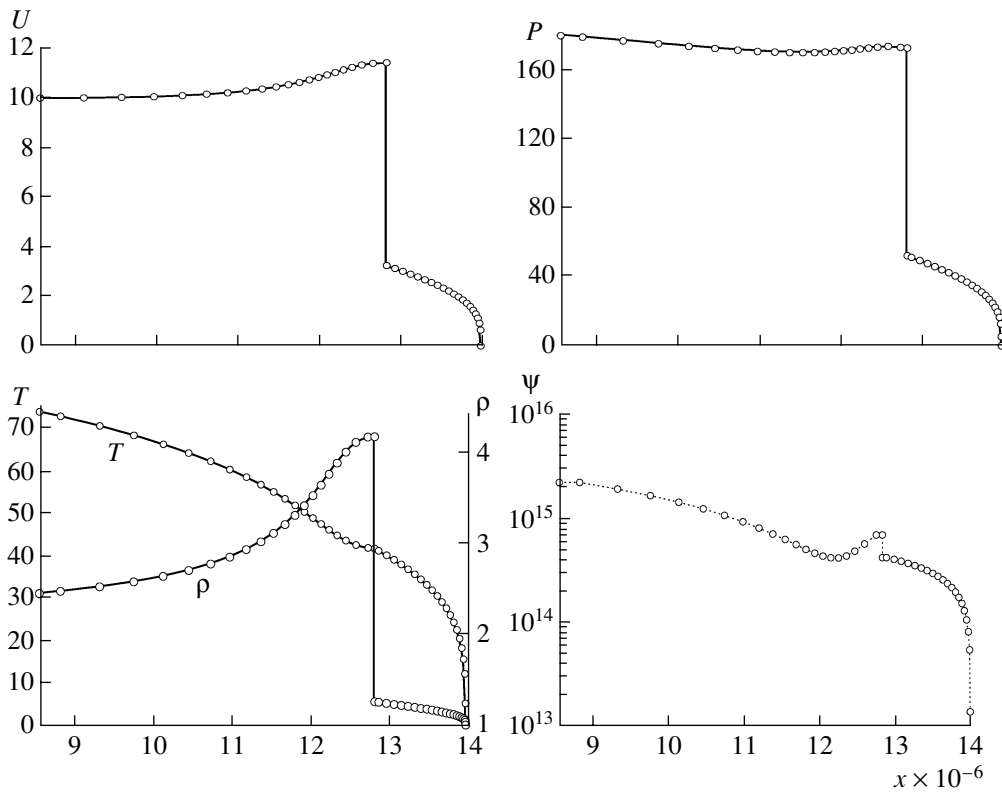
Фиг. 1.



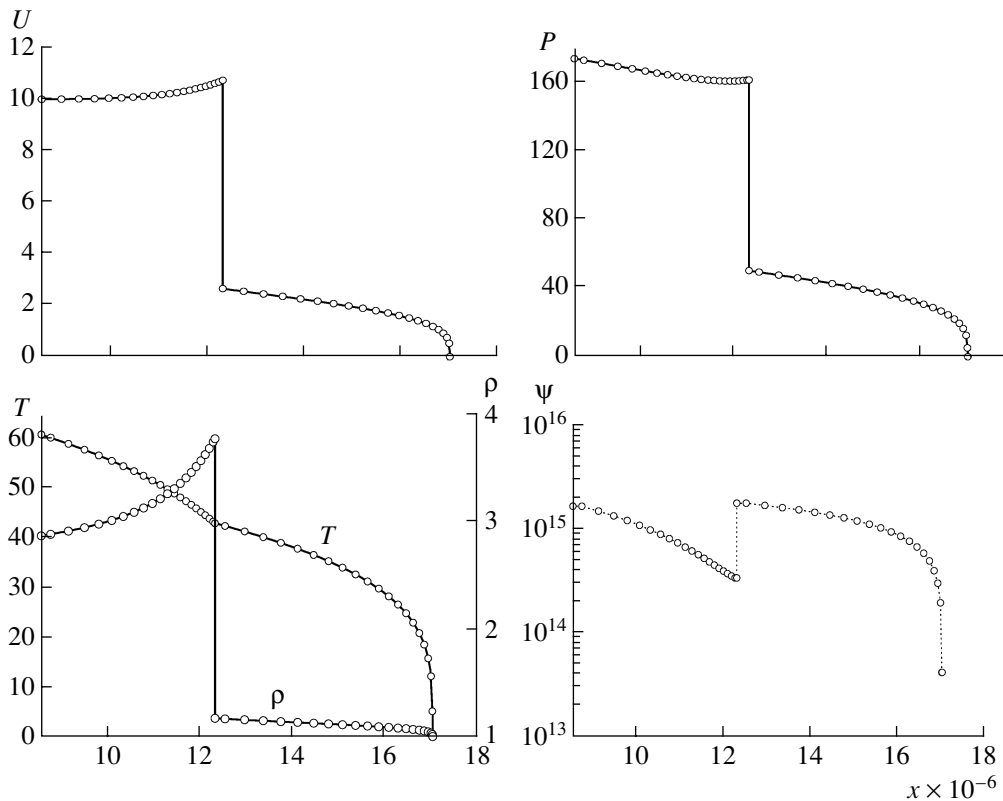
Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Структура решения режима ТВ-I много проще, чем у ТВ-II и ее можно представить в виде двух следующих друг за другом волн – температурной и гидродинамической. Скорости распространения их в этом режиме различны, и фронт температурной волны намного опережает фронт гидродинамической (см. фиг. 4, 5). Положению фронта в каждой из них соответствует слабый и сильный разрыв соответственно, в окрестности которых происходит наибольшее сгущение узлов сетки.

В режиме с $\lambda_0 = 50$ (см. фиг. 4) скорость тепловой волны сравнима со скоростью ударной волны, и область сверхзвукового прогрева много меньше, чем для среды с высокой теплопроводностью ($\lambda_0 = 200$) (см. фиг. 5), для которой скорость распространения температурной волны много выше.

Особенности динамической адаптации. С точки зрения построения расчетных сеток с динамической адаптацией краткий анализ режимов ТВ-I и ТВ-II (см. фиг. 1–5), позволяет выделить следующие особенности. Оба режима характеризуются тремя подвижными границами: границей ускоряющегося поршня с известным законом движения (2.3), фронтом ударной волны (сильный разрыв) и фронтом сверхзвуковой температурной волны (слабый разрыв), распространяющейся по нулевому температурному фону, законы, движения которых неизвестны и должны определяться по ходу решения. Все три подвижные границы выделяются явным образом.

Явное выделение границы поршня и фронта ТВ-I позволяет исключить из рассмотрения области тривиального решения. Это особенно актуально в нестационарных задачах, типа задач о распространении волн, в которых возмущение зарождается вблизи одной из границ и распространяется в направлении другой. При длительных временах рассмотрения возмущение охватывает область, размеры которой могут на несколько порядков отличаться от размеров первоначально заданной области. В подобных ситуациях исключение из рассмотрения областей, не охваченных возмущением, играет важную роль и позволяет строить экономичные вычислительные алгоритмы.

Явное выделение фронта УВ позволяет решать проблемы связанные с разрывными решениями.

Кроме подвижных границ задачи о распространении температурных волн содержат по несколько областей быстрого изменения всех функций решения: температуры, плотности и скорости. В режиме ТВ-I их две, в режиме ТВ-II – три.

Таким образом, динамическая адаптация должна учитывать поведение всех функций: температуры, скорости и плотности, а также наличие подвижных границ. Всем этим требованиям удовлетворяет управляющая функция Q (5.3), которая с учетом конкретной зависимости коэффициента теплопроводности принимает вид (7.1).

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен метод динамической адаптации применительно к задачам газовой динамики с нелинейной теплопроводностью. На примере задачи о поршне, ускоряющемся в среде с нелинейной теплопроводностью, показана эффективность и применимость предлагаемого подхода. К основным особенностям решения уравнений гидродинамики с нелинейной теплопроводностью относятся следующие: наличие трех подвижных границ и, в зависимости от исследуемого режима две (режим ТВ-I) или три (режим ТВ-II) области быстрого изменения всех функций решения. Все подвижные границы выделяются явным образом. Для двух из них – фронта УВ и фронта ТВ, закон движения заранее неизвестен и определяется по ходу решения.

Для этого класса задач предложена функция адаптации, управляющая распределением узлов сетки в зависимости от особенностей решения. Управляющая функция имеет сложный вид и состоит из нескольких слагаемых. Одна часть их определяется из диффузионного приближения и учитывает изменение размеров области под влиянием движения поршня и распространения слабого и сильного разрывов. Другая часть слагаемых определяется из принципа квазистационарности и осуществляет сгущение узлов расчетной сетки в областях больших градиентов температуры, плотности и скорости.

Численные решения, получаемые с помощью семейства конечно-разностных схем сравниваются с автомоделными. Выход на автомоделные профили численного решения свидетельствует не только о возможности применения метода динамической адаптации для моделирования задач газовой динамики с нелинейной теплопроводностью, но и о высоком качестве получаемых результатов.

Применение метода динамической адаптации позволяет получать численные решения на сетках с необычайно малым числом узлов. Во всех расчетах используются сетки с общим числом узлов $N = 40$, несмотря на увеличение расчетной области более чем на 15 порядков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я.Б., Компанец А.С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // К семидесятилетию академика А.Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–71.
2. Баренблатт Г.И., Вишик И.М. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // Прикл. матем. и механ. 1956. Т. 20. № 3. С. 411–417.
3. Самарский А.А., Соболев И.М. Примеры численного расчета температурных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3. № 4. С. 703–719.
4. Волосевич П.П., Курдюмов С.П., Бусурина Л.Н., Крус В.П. Решение одномерной плоской задачи о движении поршня в идеальном теплопроводном газе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3. № 1. С. 159–169.
5. Самарский А.А., Курдюмов С.П., Волосевич П.П. Бегущие волны в среде с нелинейной теплопроводностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 2. С. 199–217.
6. Волосевич П.П., Курдюмов С.П., Леванов Е.И. Различные режимы теплового нагрева при взаимодействии мощных потоков излучения с веществом // Прикл. механ. и техн. физ., 1972. № 5. С. 41–48.
7. Коробейников В.П. О распространении сильной сферической взрывной волны в теплопроводном газе // Докл. АН СССР. 1954. Т. 113. № 5. С. 1006–1009.
8. Волосевич П.П., Леванов Е.И. Автомоделные решения задач газовой динамики и теплопереноса. М.: МФТИ, 1997.
9. Marshak R. An influence of the radiation on the behavior of the shock waves // Phys. Fluids. 1958. № 1. P. 24–29.

10. *Бреславский П.В., Мажукин В.И.* Динамически адаптирующиеся сетки для взаимодействующих разрывных решений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2007. Т. 47. № 4. С. 717–737.
11. *Breslavsky P.V., Mazhukin.* Simulation of interacting discontinuous solutions on dynamically adaptive grids // *Comput. Meth. Appl. Math.* 2007. V. 7. № 2. P. 103–117.
12. *Мажукин А.В., Мажукин В.И.* Динамическая адаптация в параболических уравнениях // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2007. Т. 47. № 11. С. 1911–2034.
13. *Бреславский П.В., Мажукин В.И.* Метод динамической адаптации в задачах газовой динамики // *Матем. моделирование.* 1995. Т. 7. № 12. С. 48–78.
14. *Мажукин В.И., Самарский А.А., Шапранов А.В.* Метод динамической адаптации в проблеме Бюргерса // *Докл. РАН.* 1993. Т. 333. № 2. С. 165–169.
15. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1988.